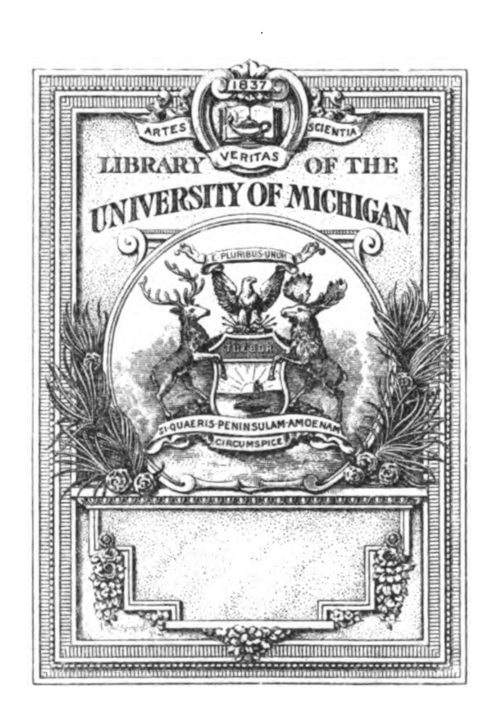


′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
35	0	3.151	40	0	3.467	45	0	3.802	50	0	4.16	55	0	4.53
	10	3.161		10	3.478		10	3.814		10	4.17		10	4.55
	20	3.172		20	3.487		20	3.825		20	4.18		20	4.56
	30	3.183		30	3.498		30	3.836		30	4.20		30	4.57
	40	3.193		40	3.509		40	3.849		40	4.21		40	4.58
	50	3.202		50	3.522		50	3.859		50	4.22		50	4.60
36	0	3.211	41	0	3.531	46	0	3.872	51	0	4.23	56	0	4.614
	10	3.222		10	3.544		10	3.882		10	4.24		10	4.62
	20	3.234		20	3.553		20	3.895		20	4.26		20	4.64
	30	3.245		30	3.564		30	3.905		30	4.27		30	4.65
	40	3.254		40	3.576		40	3.918		40	4.28		40	4.67
	50	3.265		50	3.587		50	3.93		50	4.29		50	4.68
37	0	3.274	42	0	3.598	47	0	3.94	52	0	4.30	57	0	4.69
	10	3.285		10	3.609		10	3.95		10	4.32		10	4.70
	20	3.296		20	3.620		20	3.97		20	4.33		20	4.72
	30	3.307		30	3.632		30	3.98		30	4.34		30	4.74
	40	3.317		40	3.642		40	3.99		40	4.36		40	4.75
	50	3.326		50	3.655		50	4.00		50	4.37		50	4.76
38	0	3.337	43	0	3.664	48	0	4.013	53	0	4.38	58	0	4.77
	10	3.350		10	3.676		10	4.03		10	4.39		10	4.79
	20	3.359		20	3.689		20	4.04		20	4.41		20	4.80
	30	3.370		30	3.700		30	4.05		30	4.42		30	4.81
	40	3.380		40	3.709		40	4.06		40	4.43		40	4.83
	50	3.391		50	3.720		50	4.07		50	4.44		50	4.84
39	0	3.402	44	0	3.734	49	0	4.08	54	0	4.459	59	0	4.85
	10	3.411		10	3.745		10	4.10		10	4.47		10	4.87
	20	3.422		20	3.755		20	4.11		20	4.48		20	4.88
	30	3.433		30	3.766		30	4.12		30	4.50		30	4.89
	40	3.444		40	3.780		40	4.13		40	4.51		40	4.91
	50	3.456		50	3.791		50	4.15		50	4.52		50	4.92
40	0	3.467	45	0	3.802	50	0	4.16	55	0	4.53	60	0	4.933

Handbuch der angewandten Optik

Hugo Adolph Steinheil, Ernst Voit




1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



HANDBUCH

DER

ANGEWANDTEN OPTIK

VON

DR. ADOLPH STEINHEIL,
INHABER DER FIRMA C. A. STEINHEIL SÖHNE UND
MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN MÜNCHEN.

UND

DR. ERNST VOIT,
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU MÜNCHEN.

I. BAND.

VORAUSSETZUNG FÜR DIE BERECHNUNG OPTISCHER SYSTEME
UND ANWENDUNG AUF EINFACHE UND ACHROMATISCHE LINSEN.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND 7 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1891.



Vorrede.

Das vorliegende Handbuch der angewandten Optik soll ein Hilfsbuch für den ausübenden Optiker sein; es soll ihm einerseits ein klares Bild von der Leistung optischer Systeme verschaffen, und ihn andrerseits in den Stand setzen, die Berechnung optischer Systeme mit wissenschaftlicher Strenge durchzuführen. Die erste der erwähnten Aufgaben, nämlich optische Systeme auf ihre Leistung, insbesondere auf die Eigenschaften der von ihnen erzeugten Bilder zu untersuchen, ist durch zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten gelöst worden. Wir erinnern in dieser Hinsicht an die bahnbrechenden Arbeiten von Möbius, Gauss und Bessel, sowie an die weiterbildenden von Helmholtz, Seidel und Anderen. Mit Absicht berühren wir von diesen theoretischen Betrachtungen nur diejenigen, welche eine directe Verwerthung zulassen; wir werden entwickeln, welche Bedingungen ein herzustellendes optisches System erfüllen muss, welche dieser Bedingungen die wichtigsten, und welche weniger wichtig sind. Die andere Aufgabe, welche der ausübende Optiker zu lösen hat, besteht, wie oben schon angedeutet, darin, ein optisches System zu berechnen, es so anzuordnen, dass der jeweilig angestrebte Zweck mit den einfachsten Mitteln und möglichst vollkommen erreicht werde. Nach dieser Richtung ist Klügel's Dioptrik, welche die Arbeiten vor Fraunhofer zusammenfasst, auch durch spätere Werke nicht verdrängt; es darf noch heute der Ausspruch Fraunhofer's: „Klügel's Dioptrik ist das einzige Buch, was der Praktiker wirklich brauchen kann", als zutreffend bezeichnet werden, und wird deshalb ein Buch, das auch die neueren Arbeiten dem Praktiker zugänglich macht, nicht unerwünscht sein. Eine strenge Rechnung optischer Systeme ist ja erst möglich geworden, als Fraunhofer durch die Entdeckung der fixen Linien in dem Sonnenspectrum die Eigenschaften der Gläser präcis in Zahlen auszudrücken lehrte. Seit dieser grossen Entdeckung kann man das Bild eines in der Axe gelegenen Objectpunktes in voller Strenge berechnen. Auch für einen seitlich von der Axe gelegenen Objectpunkt wurde die strenge Rechnung des Bildes bequem durchführbar mit Hilfe der durch Prof. Dr. v. Seidel auf Veranlassung des Ministerialrathes Dr. C. A. v. Steinheil entwickelten trigonometrischen Formeln. Die Bestimmung der Bilder von Objectpunkten, die in der Axe und seitlich von derselben gelegen sind, gestattet nun optische Systeme zu berechnen, welche ausgedehnte Bilder liefern, die sowohl

in Bezug auf Deutlichkeit, als auf Krümmung der Fläche, in welche das möglichst deutliche Bild zu liegen kommt, und endlich in Bezug auf correcte Zeichnung möglichst gut sind.

Die Methoden, welche wir zur Berechnung optischer Systeme in unserem Handbuche entwickeln, hat der Eine von uns bei mehr als 30jähriger Beschäftigung mit der praktischen Herstellung optischer Instrumente in seinem Institute (C. A. Steinheil, Söhne) als die zweckmässigsten erprobt. Umfangreiche Rechnungen, welche in dieser langen Zeit angestellt wurden, lehrten, welche Strahlen ausgewählt werden müssen, um bei möglichst geringer Zahl derselben, über die Beschaffenheit der Bilder zweier Objectpunkte, eines in der Axe, des anderen seitlich davon, genau orientirt zu sein, und ferner in welcher Reihenfolge die Bedingungen eingeführt werden müssen, um beide Bilder möglichst gut vereinigt zu erhalten. Diese mühsam erworbenen Erfahrungen auch Anderen zugänglich zu machen, bildet die Hauptveranlassung zur Herausgabe dieses Buches.

Wir beabsichtigen das Handbuch in drei Bänden zu vollenden. In dem ersten nun vorliegenden Bande soll ein praktisch erprobter Weg gezeigt werden, wie sich der ausübende Optiker, der in Mathematik nur einigermassen zu Hause ist, über die zu erfüllenden Bedingungen orientiren, die Eigenschaften der Gläser richtig in Zahlen ausdrücken, und die Rechnungsanlage machen kann, um optische Systeme zu berechnen, welche ausgedehnte correcte Bilder erzeugen, und endlich die Berechnung einfacher und achromatischer Linsen in Beispielen durchgeführt werden. Der zweite Band soll die Verwerthung der im ersten Bande gewonnenen Resultate zur Berechnung optischer Constructionen enthalten, und in dem dritten Bande die Prüfung des optischen Effectes ausgeführter Instrumente behandelt werden.

Dem Buche sind überdies noch vier Beilagen zugefügt. Die erste derselben enthält die in dem Buche gebrauchten Bezeichnungen und eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln. Die zweite und dritte Beilage sind: Ueber die Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisses verschiedener Medien von C. A. v. Steinheil und L. v. Seidel, und: Trigonometrische Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes in centrirten sphärischen Flächen von L. v. Seidel. Der Abdruck dieser beiden vergriffenen Arbeiten, welche wir im Wortlaute nicht ändern wollten, wurde uns durch L. v. Seidel gestattet. Endlich die vierte Beilage giebt eine Tabelle der Unterschiede zwischen Sinus und Bogen von 0 bis 30°, fortschreitend von 10″ zu 10″, eine Tabelle, welche hauptsächlich zur Hebung kleiner Kugelgestaltfehler sich verwenden lässt.

München, im October 1890.

Die Herausgeber.

Inhaltsübersicht des ersten Bandes.

Erstes Capitel.

Reflexion und Brechung des Lichtes.

Zweites Capitel.

Fundamentaleigenschaften eines dioptrischen Systems.

Drittes Capitel.

Anforderungen an ein wirkliches Linsensystem und Aufzählung der zu hebenden Fehler.

Viertes Capitel.

Berechnung einer Linse und Discussion ihrer Bildfehler.



Fünftes Capitel.

Achromatische zweilinsige Objective.

Beilagen.

Beilage I.

Beilage II.

Beilage III.

Beilage IV.

I. Capitel.

Reflexion und Brechung des Lichtes.

§ 1. Gesetze der Reflexion und Brechung.

Die allgemein bekannten Gesetze, nach welchen das Licht in verschiedenen Medien sich fortpflanzt, können, soweit dieselben bei der Berechnung optischer Instrumente in Betracht kommen, in die im Folgenden angegebenen Sätze zusammengefasst werden:

1) Das Licht wird bei dem Durchlaufen eines Mediums, je nach der Beschaffenheit desselben, in seiner Stärke geschwächt — absorbirt —. Ein Medium, welches einen grossen Theil des eindringenden Lichtes hindurchlässt, also wenig absorbirt, nennt man durchsichtig; wenn es dagegen kein Licht hindurchlässt, undurchsichtig. Die Absorption der einzelnen Bestandtheile von nicht homogenem, etwa von weissem Licht, ist je nach der Beschaffenheit des Mediums verschieden; absorbirt ein Medium alle Bestandtheile des einfallenden Lichtes gleichmässig, so wird es als farblos, wenn es jedoch einzelne Bestandtheile stärker absorbirt, als farbig bezeichnet.

2) Trifft Licht auf die Trennungsfläche zweier Medien, so bleibt ein Theil desselben — das reflectirte Licht — in dem vorausgehenden Medium, der andere — das gebrochene Licht — dringt in das nachfolgende Medium ein.

3) Ist die Trennungsfläche der Medien rauh, so wird die Reflexion wie die Brechung des Lichtes eine unregelmässige — diffuse —. An glatten Trennungsflächen erfolgt dagegen eine regelmässige Reflexion — Spiegelung — und eine regelmässige Brechung, beide nach bestimmten Gesetzen.

Da bei den optischen Instrumenten im Allgemeinen nur polirte Trennungsflächen zweier Medien vorkommen, soll im Folgenden nur von regelmässiger Reflexion und Brechung die Rede sein.

4) Sowohl der reflectirte, wie der gebrochene Lichtstrahl setzen ihren Weg in einer Ebene fort, welche auch den einfallenden Strahl und die Normale an der Einfallsstelle — das Einfallsloth — enthält. Bezeichnet man die durch das Loth und den einfallenden Strahl gelegte Ebene als Einfallsebene, die durch das Loth und den reflectirten Strahl als Reflexionsebene, und die durch das Loth und den gebrochenen Strahl als Brechungsebene, so müssen nach dem Vorausgehenden die Einfalls-, Reflexions- und Brechungs-Ebene in einer und derselben Ebene liegen.

5) In dem speciellen Falle, wenn das Licht im Einfallspunkte senkrecht auf die Trennungsfläche zweier Medien trifft, bleibt sowohl der



reflectirte wie der gebrochene Lichtstrahl mit dem auffallenden in der gleichen Geraden, und erfährt somit keiner eine Ablenkung.

6) Der gespiegelte Lichtstrahl bleibt immer auf derselben Seite der spiegelnden Fläche, jedoch auf der andren Seite des Lothes wie der einfallende Strahl, und bildet dabei mit dem Lothe den gleichen Winkel — Reflexionswinkel — wie der einfallende Strahl — Einfallswinkel —. Der Winkel zwischen dem reflectirten und einfallenden Lichtstrahl — der Ablenkungswinkel — ist gleich dem doppelten Einfallswinkel. In Formeln ausgedrückt, ist demnach:

$$(1)\qquad \varphi_{2r} = \chi_{2r},$$

$$(2)\qquad \delta_{2r} = \varphi_{2r} + \chi_{2r} = 2\varphi_{2r}.$$

7) Das auf die Trennungsfläche zweier Medien treffende, nicht homogene, z. B. weisse Licht wird, wenn es nicht normal zur Fläche die Einfallsstelle trifft, im nachfolgenden Medium abgelenkt, und gleichzeitig in verschiedenfarbige Strahlen zerlegt — zerstreut —.

Ein normal zur Trennungsfläche einfallender weisser Lichtstrahl wird weder gebrochen noch zerstreut.

Bestimmte Stellen in dem durch Zerstreuung des weissen Lichtes gebildeten Farbenspectrum bezeichnet man, wie dies Fraunhofer vorgeschlagen, mit den Buchstaben A, B . . . H; genauere Angaben über diese Bezeichnungsweise folgen später.

8) Die Fähigkeit, das Licht abzulenken, ist bei demselben Stoffe verschieden für die einzelnen Farben, in welche der nicht homogene Strahl zerlegt wird, und ist für verschiedene Stoffe eine andere auch für dieselbe Farbe. Es kann diese Fähigkeit das Licht abzulenken durch eine Zahl ausgedrückt werden, welche der Brechungsindex des betreffenden Stoffes heisst, und für die verschiedenen Farben ein verschiedener ist. Bei der Angabe des Brechungsindex für ein Medium muss deshalb auch die Farbe angegeben werden, für welche er gilt. Den Quotient der Brechungsindices zweier aufeinander folgender Medien $\left(\frac{n_{2r+1}}{n_{2r-1}}\right)$ nennt man das Brechungsverhältniss derselben; die Differenz der Brechungsindices eines Mediums für zwei verschiedene Farben

$${}_G n_{2r-1} - {}_F n_{2r-1} = {}_{F,G}\Delta n_{2r-1}$$

wird die Zerstreuungsgrösse des Mediums für die betrachteten Farben genannt.

9) Der gebrochene Strahl setzt nach der Brechung seinen Weg jenseits der brechenden Fläche, in der nach dieser Seite ausgedehnten Einfallsebene fort, und es erfolgt die Ablenkung des gebrochenen Strahles, wenn das nachfolgende Medium optisch dichter als das vorausgehende ist, zum Einfallslothe, wenn dagegen das nachfolgende Medium optisch dünner als das vorausgehende ist, vom Einfallslothe.

10) Der Winkel, welchen der gebrochene Strahl mit dem Lothe bildet — der Brechungswinkel — ergiebt sich aus dem Satze: Der Sinus des Brechungswinkels verhält sich zu dem Sinus des Einfallswinkels, wie der Brechungsindex des vorausgehenden Mediums, in welchem der



einfallende Strahl liegt, zu dem Brechungsindex des nachfolgenden Mediums, in welchem der gebrochene Strahl sich befindet. In Formeln ausgedrückt ist:

$$\frac{\sin\varphi_{2r}}{\sin\varphi'_{2r}} = \frac{n_{2r+1}}{n_{2r-1}}, \tag{3}$$

$$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}. \tag{4}$$

Es ist leicht einzusehen, dass die Reflexion als ein specieller Fall der Brechung betrachtet werden kann. Setzt man nämlich in den Formeln für die Brechung $\frac{n_{2r+1}}{n_{2r-1}} = -1$, und $\varphi'_{2r} = -\chi_{2r}$, so gehen dieselben in die Formeln für Reflexion über.

11) Wenn das vorausgehende Medium optisch dichter als das nachfolgende, also n_{2r-1} grösser als n_{2r+1}, oder $\frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$ grösser als 1 ist, so kann eine totale Reflexion eintreten, d. h. es kann von einem bestimmten Einfallswinkel an das Licht vollkommen im vorausgehenden Medium verbleiben, also nicht in das nachfolgende eindringen. Wählt man für den Einfallswinkel denjenigen Werth φ_{2r}, welcher sich aus der Gleichung $\sin\varphi_{2r} = \frac{n_{2r+1}}{n_{2r-1}}$ ergiebt, so wird $\sin\varphi_{2r}\frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}} = 1$, und nach der Gleichung (3) $\sin\varphi'_{2r} = 1$, oder $\varphi'_{2r} = 90^0$. Ein grösserer Werth des Einfallswinkels als der aus $\sin\varphi_{2r} = \frac{n_{2r+1}}{n_{2r-1}}$ gerechnete, würde $\sin\varphi'_{2r}$ grösser als 1 ergeben, d. h. einen unmöglichen Werth für den Brechungswinkel liefern.

Beispielsweise sei der Brechungsindex von Crownglas für die mit dem Buchstaben D bezeichnete Farbe: 1,536, und für die Farbe H: 1,547; erfolgt die Brechung aus Glas in Luft, so wird, da der Brechungsindex von Luft gleich 1 ist, für die Farbe D bei einem Einfallswinkel von 40° 37′ 13″, und für die Farbe H bei einem Einfallswinkel von 40° 16′ 18″ totale Reflexion eintreten. Bei einer Brechung aus Flintglas in Luft, dessen Brechungsindices für die Farbe D gleich 1,635 und für H gleich 1,671 sind, erfolgt totale Reflexion für Einfallswinkel, die grösser als 37° 42′ 25″, beziehungsweise 36° 45′ 31″ sind.

Den Einfallswinkel, dessen Werth sich je nach den Brechungsindices aus der obigen Formel verschieden berechnet, nennt man den Winkel der totalen Reflexion, und giebt derselbe den oberen Grenzwerth des Einfallswinkels an, für welchen noch eine Brechung stattfindet, während für einen grösseren Werth desselben ein Eindringen des Lichtes in das nachfolgende Medium nicht mehr erfolgt.

Bei den optischen Instrumenten benutzt man sowohl die Reflexion, wie die Brechung des Lichtes, und unterscheidet demgemäss katoptrische und dioptrische Instrumente. Im Folgenden sollen jedoch im Allgemeinen nur die dioptrischen Instrumente einer genauen Betrachtung unterzogen werden, und zwar deshalb, weil diese gegenwärtig eine weit grössere Bedeutung besitzen, und weil die für dioptrische Instrumente gewonnenen Resultate im Bedürfnissfalle leicht auf die katoptrischen übertragen werden können. Nur gelegentlich werden Reflexionen dann Berücksichtigung finden, wenn dieselben bei dioptrischen Instrumenten zur Anwendung kommen.

§ 2. Bestimmung der Brechungsindices.

1. Mittel und Methode der Messung.

In der angeführten Formel für das Brechungsgesetz erscheinen die Constanten n_{-1}, n_{+1}, n_{+3} . . ., welche von der Natur der aufeinanderfolgenden brechenden Medien abhängig sind; es ist deshalb zur rechnerischen Verwerthung jener Formel nothwendig, eine Bestimmungsmethode der Brechungsindices kennen zu lernen. Fraunhofer hat zuerst eine genaue Beobachtung dieser Constanten insbesondere dadurch möglich gemacht, dass er in dem durch ein Prisma entworfenen Farbenbilde des Sonnenlichtes eine Reihe von dunkeln Linien (Fraunhofer'sche Linien) auffand, einzelne hervorragende derselben mit den Buchstaben A, B . . . bis H bezeichnete und dazu benutzte, die Brechungsindices der verschiedenen Farben in Zahlen auszudrücken[1]). In Fig. 1 ist das Sonnenspectrum mit den von Fraunhofer gefundenen schwarzen Linien, sowie mit der von ihm eingeführten Bezeichnung der Linien wiedergegeben; die Zeichnung ist aus der Fraunhofer'schen Abhandlung entnommen.

(Behufs Herausgabe der gesammelten Werke Fraunhofers's durch die Kgl. Bayr. Akademie der Wissenschaften wurde die Spectraltafel mit Hülfe des photographischen Druckverfahrens von Obernetter reproducirt, und deren Benützung in dem Handbuche der Optik durch die Herausgeber der Fraunhofer'schen Werke uns in zuvorkommenster Weise gestattet.)

Der von Fraunhofer zu seinen Messungen angewendete Apparat war wenig handlich und kam erst durch Verbesserungen, welche C. Steinheil und Seidel[2]), Meyerstein[3]) und Andere[4]) anbrachten, in allgemeine Aufnahme. Für specielle Zwecke sind in neuerer Zeit von Abbe[5]) noch einfachere Instrumente angegeben worden.

Es genügt, die Bestimmung der Brechungsindices mit Hülfe eines Instrumentes zu schildern, und soll dazu ein von der Firma C. A. Steinheil, Söhne für die optische Prüfungsstation der königl. techn. Hochschule in München gefertigtes und in Fig. 2 dargestelltes Goniometer dienen.

Das Goniometer ist gebildet aus einem gusseisernen Dreifuss, mit drei verstellbaren Fussschrauben (α, α in der schematischen Zeichnung Fig. 3). Zwei Füsse (A) sind, von der Axe des Instrumentes aus bis zum Stützpunkte der Fussschrauben gemessen, je 10,6 cm, der dritte (B) jedoch 27,4 cm lang; letzterer dient zur Unterstützung des Spaltfernrohres (P).

---

1) Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glasarten, in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernröhre. Von *Jos. Fraunhofer*. Denkschriften der Münchner Akademie für 1814 und 1815. Bd. V, Jahrgang 1817. Auszug hiervon in *Gilbert's* Annalen, Bd. 56. 1817. Ins Französische übersetzt in *Schumacher's* astronomischen Nachrichten Heft II. 1823.

2) Ueber die Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungs-Verhältnisses verschiedener Medien. Von *Steinheil* und *Seidel*. Abhandl. der II. Cl. der Kgl. Bayr. Akademie der Wissenschaften. V. Bd. II. Abth. p. 1.

3) Beschreibung des Spectrometers. Von *M. Meyerstein*. Pogg. Ann. Bd. XCVIII.

4) Ueber Spectralapparate. Von *E. Voit*. Carl's Repertorium I. p. 93 ff.

5) Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungs-Vermögens fester und flüssiger Körper. Von *E. Abbe*. Jena 1874.

In den Fuss eingeschraubt ist eine ausgebohrte, aussen conisch abgedrehte Stahlaxe (C), mit welcher die Alhidade (D) fest verbunden ist; durch

Fig. 2.

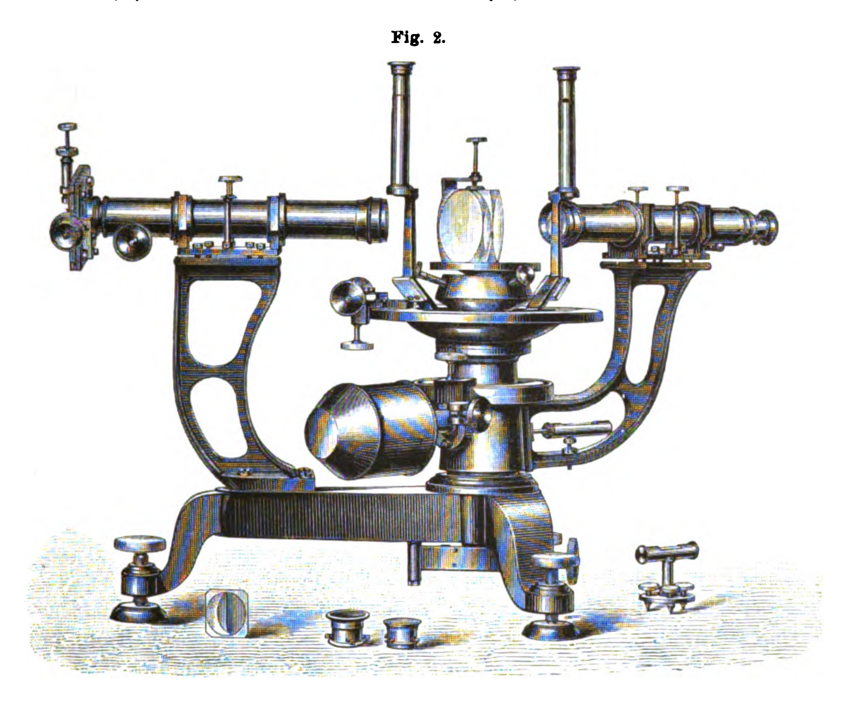
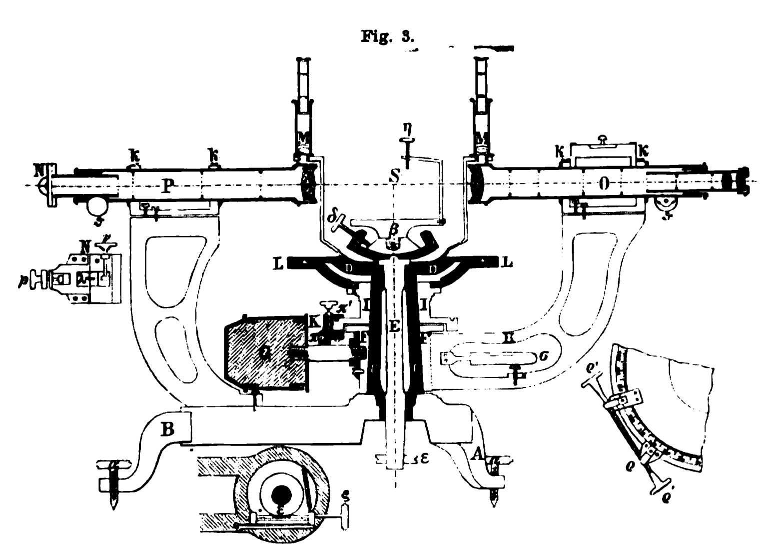


Fig. 3.



die centrale Bohrung der Stahlaxe geht eine Messingaxe (E), auf welcher oben der Tischträger befestigt ist, und die unten eine Vorrichtung zum

Festklemmen und zur feinen Drehung besitzt. Auf der unteren Hälfte der conischen Messingaxe läuft ein Rothgussstück (F), an welchem der Träger (H) des Ablesefernrohres (O) und ein diesem gegenüber liegendes Gegengewicht (G) befestigt sind; über der oberen Hälfte der Axe ist ein zweites, auf dem unteren schleifendes Rothgussstück (J) angebracht, das an seinem unteren Ende eine Klemmplatte (K), an seinem oberen Ende den mit Silber eingelegten Theilkreis (L) trägt. Dieses Stück kann festgeklemmt und mit feiner Bewegung gedreht werden, und zwar gegen das untere Stück, welches das Ablesefernrohr trägt, mit Hülfe der Klemme π' und der Mikrometerschraube π, ferner gegen die Alhidade, in welcher vier unter 90^0 von einander abstehende Nonien sich befinden, mit der Klemme ϱ und der Mikrometerschraube ϱ'.

Die Tischplatte (β) ist auf ein nach unten conisch sich erweiterndes Stahlstück angeschraubt, dessen untere Fläche sphärisch gearbeitet ist; diese ruht dann auf einer mit gleichem Radius ausgeschliffenen Messingschale (γ). Der Mittelpunkt der Sphären ist in dem Schnittpunkte (S) der Drehungsaxe des Instrumentes mit der Ebene, in welcher die Fernrohraxen sich befinden. Die den Tisch tragende Schale ist auf der Messingaxe aufgeschraubt und hat nach oben einen Kranz, durch welchen drei um 120^0 abstehende, abwärts geneigte Druckschrauben (δ) hindurchgehen, die gegen den conischen Ansatz des Tisches anliegen, und so eine Drehung desselben um den Punkt S gestatten. An die Tischplatte sind Federn (η) anzuklemmen, welche dazu dienen, das Prisma fest mit dem Tische zu verbinden. Auf die Messingaxe ist ferner von unten eine Rothgussscheibe (ε) angeschraubt, in deren Umfang ein Muttergewinde eingeschnitten, gegen dasselbe wird durch eine Feder eine Spindel (ζ) mit Schraube ohne Ende angepresst, so dass beim Umdrehen der Spindel eine drehende Bewegung des Tisches erzielt wird, was beim Einstellen auf die Minimalablenkung zur Anwendung kommt. Durch Zurückdrängen der erwähnten Feder kann der Eingriff der Spindel aufgehoben und nun der Tisch mit der Hand frei herumgedreht werden.

Der Theilkreis, dessen Durchmesser ca. 16 cm beträgt, ist von 10 zu 10 Minuten getheilt, der Abstand von 59 Theilen desselben enthält am Nonius 60 Theile, so dass die Ablesung noch direct 10 Bogensecunden giebt. Durch zwei um die Axe des Instrumentes verstellbare Fernröhrchen (M, M) können die Ablesungen an zwei Diametern, um 180^0 von einander abstehenden Nonien vorgenommen werden. Die Fernröhrchen sind so gehalten, dass das Ablesefernrohr ungehindert um die Instrumentenaxe an den Fernröhrchen vorbeigehend gedreht werden kann.

Sowohl Spalt- als Beobachtungsfernrohr haben Objective von 2,7 cm (12''') Oeffnung und 24,4 cm (9'') Brennweite und Laufringe, durch deren Mitte die optische Axe geht, und sind mit Oculartrieben (ϑ) versehen. Die Laufringe liegen in Lagern (k), in denen sie durch von oben aufliegende Klammern festgehalten werden. Das Spaltfernrohr, dessen Lager auf dem Fusse B befestigt ist, trägt auf der dem Objective entgegengesetzten Seite einen Krüss'schen Doppelspaltschlitten (N). Auf die Spaltplatte legt sich ein Planparallelglas (λ) an, in dessen aufliegende Fläche zwei parallele Linien eingerissen sind. Die Ebene, in welcher die Parallellinien sich befinden, soll im Brennpunkte des Objectives liegen, und die

Mitte des durch die Parallellinien und die Spaltränder gebildeten Viereckes in der optischen Axe des Fernrohres liegen. Diese Einstellungen können durch den Trieb (ϑ), beziehungsweise durch die Schraube (ν), welche die Glasplatte trägt, ausgeführt werden. Das Beobachtungsfernrohr, dessen Lager auf dem Arme (H) befestigt ist, hat ein Mikrometerocular mit verstellbarem Diaphragma.

Die mit diesem Instrumente auszuführenden Beobachtungen, welche zur Berechnung der Brechungsindices einer Glassorte nothwendig sind, setzen sich zusammen aus der Justirung des Apparates, der Bestimmung des brechenden Winkels, welchen das in eine prismatische Form gebrachte Glas besitzt, ferner aus der Minimal-Ablenkung bestimmter farbiger, das Glas durchlaufender Lichtstrahlen, und endlich der Bestimmung des Verhältnisses der mittleren Zerstreuungsgrössen zweier Glassorten.

a. Justirung des Apparates.

1) Das Beobachtungsfernrohr (O) wird so eingestellt, dass das Auge des Beobachters einen weit entfernten Gegenstand deutlich und ohne Parallaxe gegen das Fadenkreuz wahrnimmt.

Man verschiebt zu diesem Zwecke das Ocular gegen das Fadenkreuz, bis man dasselbe deutlich wahrnimmt, richtet dann das Fernrohr nach einem entfernten Gegenstand, etwa einen Stern, und verstellt den Ocularzug, mit dem das Fadenkreuz verbunden, so lange gegen das Objectiv, bis man das Object ganz scharf sieht. Bei richtiger Einstellung darf sich das Fadenkreuz nicht gegen das eingestellte Object verschieben, wenn man das Auge vor dem Ocular nach rechts oder links bewegt (dann ist das Bild gegen das Fadenkreuz ohne Parallaxe). Gleichzeitig muss bei jeder Drehung des Fernrohres der Kreuzungspunkt der Fäden immer den gleichen Punkt des Objectes decken (es ist dann das Fadenkreuz centrirt).

Die Entfernung des Oculares vom Fadenkreuz ist durch den Bau des beobachtenden Auges bedingt. Sollen verschiedene Beobachter mit demselben Instrumente arbeiten, so ist es am günstigsten, das Ocular für ein normales Auge einzustellen und die Beobachter zu veranlassen, ihre Augen mit einem Brillenglase zu einem normalen zu corrigiren. Für ein kurzsichtiges Auge wählt man das schwächste negative Brillenglas, für ein übersichtiges das stärkste positive, mit welchem das betreffende Auge für entfernte Objecte auf seine volle Sehschärfe kommt.

Genauer noch gelingt die Einstellung des Beobachtungsfernrohres auf unendlich, wenn man zwei weitere Fernröhre zu Hülfe nimmt. Alle drei Instrumente werden zuerst nach der oben geschilderten Methode so gestellt, dass sie einen weit entfernten Gegenstand deutlich und ohne Parallaxe zeigen. Nun sieht man mit dem Beobachtungsfernrohr abwechslungsweise durch das Objectiv des einen und andern Hülfsfernrohres, sodann mit dem ersten Hülfsfernrohr durch das Objectiv des zweiten nach dem jeweiligen Fadenkreuz. Die Einstellung ist richtig, wenn in allen Fällen die Fadenkreuze der Fernröhre scharf nnd ohne Parallaxe erscheinen. Die Correcturen sind für jedes Instrument in einem Viertel des ganzen Fehlerbetrages auszuführen.

2) Der Spalt ist in den Brennpunkt des Objectives am Spaltfernrohr (P) zu stellen.

Während man mit dem Beobachtungsfernrohr durch das Objectiv des Spaltfernrohres die Spalte betrachtet, stellt man das die Spaltplatte tragende Zugtriebrohr so ein, dass der Spalt im Beobachtungsfernrohr vollkommen scharf und ohne Parallaxe sich zeigt.

3) Die Ebene des Theilkreises ist horizontal, und damit die Drehungsaxe des Instrumentes vertical einzustellen.

In einem Aussschnitte des Armes H, welcher das Beobachtungsfernrohr trägt, ist eine Libelle (σ) angebracht. Man stellt diesen Arm in die Richtung einer Fussschraube des Instrumentes, bewirkt mit Hülfe derselben ein Einspielen der Libelle, und dreht den Arm um 180°; wenn nun die Libelle nicht mehr einspielt, so macht man die Correctur zum Theil an der erwähnten Fussschraube, zum Theil an der Correctionsschraube der Libelle. Nach Ausführung dieser Correctur ist die Libelle berichtigt und die Drehungsaxe des Instrumentes liegt in einer auch durch die ersterwähnte Fussschraube gehenden Verticalebene. Hierauf geht man mit dem Arme, der die Libelle trägt, um 90° und corrigirt den Fehler, den die Libelle zeigt, durch die beiden andern Fussschrauben, indem man gleichviel mit der einen hinein-, mit der andern herausgeht. Dadurch ist die Drehungsaxe auch in einer zur ersten senkrechten Ebene vertical gestellt und somit überhaupt vertical. Nun muss die Alhidade und der Theilkreis horizontal liegen, da erstere senkrecht auf die Drehungsaxe befestigt, und der Theilkreis mit der Alhidade in eine Ebene gelegt ist.

4) Die Fernrohraxen werden horizontal gestellt und in eine Ebene gelegt.

Das Ablesefernrohr nivellirt man mit Hülfe einer berichtigten Aufsatzlibelle durch Correctur an dem Lager, in gleicher Weise bewirkt man die Horizontalstellung der Axe des Spaltfernrohres. Man beobachtet ferner, ob die Mitte des Spaltes beim Drehen des Spaltfernrohres um seine Axe an der gleichen Stelle bleibt. Die Correctur hierfür wird durch Verschieben der Glasplatte (λ) ausgeführt. Endlich ist noch nachzusehen, ob dieser fixe Punkt mit dem Mittelpunkte des Fadenkreuzes im Beobachungsfernrohre zusammenfällt. Durch die Zug- und Druckschrauben am Träger des Beobachtungsfernrohres kann die Axe so lange gehoben oder gesenkt werden, bis ein Einstehen erfolgt; dabei ist jedoch die Axe des Beobachtungsfernrohres immer horizontal zu erhalten.

5) Der Prismentisch wird horizontal gestellt.

Die mit drei Fussschrauben versehene kleine Libelle wird auf den Tisch aufgesetzt, mit Hülfe der Schrauben δ die Libelle zum Einspielen gebracht und beobachtet, ob beim Drehen des Tisches die Libelle eingestellt bleibt; man corrigirt den Fehler zum Theil an den Schrauben δ, zum Theil an den Fussschrauben der Libelle.

b. Bestimmung des Prismenwinkels.

1) Man untersucht, ob das Prisma zu den Bestimmungen genügend ist, nämlich ob die Prismenflächen eben sind und ob die brechende Kante des auf den Prismentisch gestellten Prismas vertical ist.

Das Prisma bringt man so auf den Tisch, dass die brechende Kante dem Objective des Spaltfernrohres zugekehrt ist, und dass ferner das Licht dem Augenmaasse nach symmetrisch auf die beiden Prismenflächen einfällt, um nahe gleiche Helligkeit der Reflexbilder zu erhalten. Ob die Prismenflächen eben sind, lässt sich nachweisen, wenn man bei verticaler und horizontaler Stellung des Spaltes ohne Verstellung des Oculars am Beobachtungsfernrohre die Reflexbilder beobachtet; die Bilder müssen scharf und unverzerrt sein.

Noch einfacher ist es, wenn man genaue Planprobegläser besitzt, um die Gestalt der Prismenflächen mit diesen zu untersuchen.

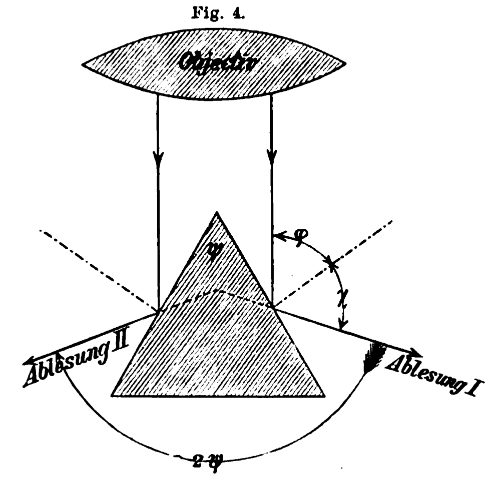
Es muss nun beobachtet werden, ob die Bilder der Spaltmitte, welche von den beiden Prismenflächen reflectirt sind, im Schnittpunkte des Fadenkreuzes im Beobachtungsfernrohre erscheinen, was der Fall sein muss, wenn die Grundfläche des Prismas senkrecht zur brechenden Kante abgeschliffen ist.

Sollte dies nicht der Fall sein, so muss durch Verstellung des Prismentisches mit den Schrauben δ die brechende Kante des Prismas vertical gestellt werden; es ist dann der Tisch nicht mehr horizontal. Damit bei den im Folgenden vorzunehmenden Einstellungen des Tisches die brechende Kante des Prismas immer vertical bleibt, ist das Prisma durch die Feder η an den Tisch festzuklemmen.

2) Man bestimmt an dem Goniometer den Winkel, welchen die Reflexbilder des Spaltes an den Prismenflächen mit einander bilden, und erhält durch Division dieses Winkels mit 2 den Prismenwinkel.

Die brechende Kante des Prismas bleibt dem Objective des Spaltfernrohres zugekehrt, wobei das Licht symmetrisch auf die Prismenflächen einfällt, es wird aber ausserdem das Prisma auf dem Tische so verschoben, dass das Ablesefernrohr, wenn es auf die Spiegelbilder des Spaltes eingestellt ist, auf die Mitte der Prismenflächen zielt. Der Spalt wird ziemlich enge (etwa 0,5 mm) eingestellt und die Klemme ϱ angezogen, π' dagegen gelöst. In dieser Lage werden zwei um 180° von einander abstehende Nonien (etwa I und III) abgelesen, bei I die ganze Theilung, bei III nur die Minuten und Secunden, nun das Beobachtungsfernrohr auf das Spiegelbild des Spaltes an der ersten Prismenfläche gerichtet, wenn dasselbe im Gesichtsfeld erscheint, die Klemme π' angezogen und mit der Mikrometerschraube π genau eingestellt. Zur Messung gegen das Spiegelbild an der zweiten Fläche wird ϱ gelöst, man geht mit Fernrohr und Theilkreis, bis das von der zweiten Prismenfläche gespiegelte Bild im Gesichtsfeld erscheint, notirt, ob die Messung mit oder gegen die Theilung erfolgt, klemmt nun bei ϱ und stellt mit ϱ' genau ein und liest die Nonien I und III wieder wie vorhin ab. Sollte die Stellung des Ablesefernrohres hindern, so kann man vor der Ablesung die Schraube π' lösen und das Fernrohr verstellen. Hat man mit der Theilung gemessen, so ist die erste Ablesung von der zweiten abzuziehen, hat die zweite Zahl einen kleineren Werth, so sind vorher 360° zu addiren. Die Hälfte des Winkels, der sich hierbei ergiebt, ist der Prismenwinkel. Der Nachweis für die Richtigkeit dieser Angaben ist in jedem Lehrbuch der Physik gegeben, z. B. Eisenlohr's Lehrbuch der Physik, XI. Aufl., von P. Zech, p. 209. Bei einer Messung (Fig. 4) gegen die Theilung wird die zweite Ablesung von der ersten abgezogen, und zu dieser eventuell 360° addirt.

Fig. 4.



Um genauere Resultate zu bekommen, kann durch Repetition öfter gemessen werden. Dies geschieht, indem man nach der ersten Messung ohne abzulesen die Klemme π' löst, das Spiegelbild der ersten Prismenfläche wieder ins Gesichtsfeld bringt, π' klemmt, mit π genau einstellt, nun ϱ löst, durch Drehung von Fernrohr mit Kreis das Spiegelbild des Spaltes an der zweiten Fläche ins Gesichtsfeld bringt, ϱ klemmt und mit ϱ' genau einstellt. Begnügt man sich mit zwei Messungen, so liest man nun ab; will man öfter repetiren, so wiederholt man die eben beschriebene Operation, wobei selbstverständlich die Zahl der Messungen notirt und die Messungen alle in dem gleichen Sinne (alle mit der Theilung, oder alle gegen die Theilung) gemacht werden müssen. Die Zahl der Repetitionen ist von dem zu messenden Winkel abhängig und wird am besten so gewählt, dass immer wieder andere Stellen des Theilkreises zur Ablesung kommen, um hierdurch die etwaigen Theilungsfehler möglichst zu eliminiren. Ist z. B. wie gewöhnlich der Prismenwinkel nahe 60°, so würde bei dreimaliger Repetition immer wieder nahe an der gleichen Stelle des Theilkreises abgelesen werden, bei einmaliger Repetition aber, wenn die erste Ablesung bei 0° ist, die zweite Ablesung bei 120°, die dritte bei 240°, und erst die vierte wieder bei 0°. Es wird deshalb bei einem 60° Prisma mit viermaliger Repetition gemessen. Das Resultat wird gewonnen, wenn man die Summe der Messungen, bei welchen genau zu berück-

sichtigen ist, ob und wie oftmal 360° hinzugefügt werden müssen, durch diejenige Zahl dividirt, welche sich ergiebt, wenn man die Anzahl der Messungen mit 2 multiplicirt.

c. Bestimmung des Ablenkungswinkels.

1) Man untersucht, ob das Glas des Prismas homogen ist.

Gegen das Spaltfernrohr lässt man Sonnenlicht einfallen, macht den Spalt ziemlich enge (etwa 0,1 mm) und betrachtet das von dem Prisma entworfene Spectrum, nachdem auf das Minimum der Ablenkung (siehe unten) eingestellt wurde. Ist das Glas homogen, so müssen die Fraunhofer'schen Linien deutlich erscheinen, und die Ablenkungswinkel je zweier Fraunhofer'schen Linien, durch verschiedene Theile des Prismas beobachtet, immer die gleichen Werthe liefern.

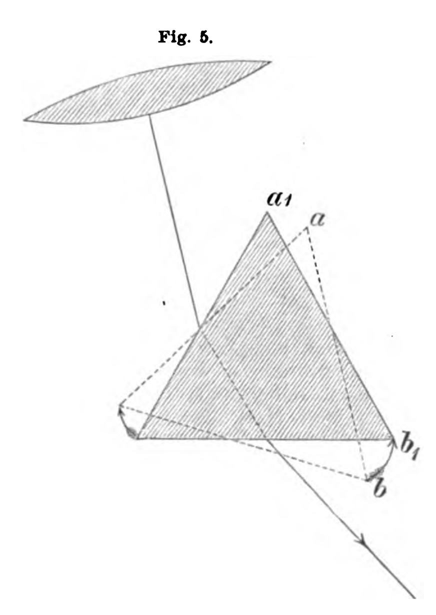
2) Das Prisma wird so auf den Tisch gestellt, dass die Helligkeit des beobachteten Spectrums möglichst grofs wird.

Man stellt für die Fraunhofer'sche Linie F auf das Minimum der Ablenkung (siehe unten) näherungsweise ein und überzeugt sich, ob die Axe des Beobachtungsfernrohres gegen die Mitte der ihm zugekehrten Prismenfläche zielt. Die Correctur ist durch Verschieben des Prismas auf dem Tische auszuführen; nach vorgenommener Einstellung wird das Prisma mit Hilfe der Feder η wieder an den Tisch festgeklemmt und das Senkrechtstehen der Kante controlirt.

3) Vor jeder für irgend eine Farbe auszuführenden Bestimmung des Ablenkungswinkels stellt man den Prismentisch so, dass für die ausgewählte Fraunhofer'sche Linie eine Minimalablenkung stattfindet.

Das Beobachtungsfernrohr wird, damit es nicht hinderlich, dem Spaltfernrohre gegenübergestellt, wobei π' gelöst ist. Anfänglich sei der Prismentisch so gestellt, dass die matte Fläche des Prismas parallel mit der Axe des Spaltfernrohres steht. Nun wird unter Lösung der Schraube ζ durch Drehen des Tisches mit freier Hand die matte Fläche aus der Lage $a\ b$ (Fig. 5) in die neue Lage $a_1\ b_1$ gebracht, in welcher ein hinter der zweiten brechenden Fläche beobachtendes Auge das durch das Prisma gebildete Spectrum wahrnimmt. Während der Drehung des Prismentisches wird sich das Spectrum erst in der gleichen Richtung mitbewegen und dann umkehren. Die Lage, in der es umkehrt, ist die richtige Stellung des Prismentisches, es wird deshalb jetzt die Schraube ζ eingelöst. Da vorerst die Einstellung auf die Minimalablenkung nur mit freiem Auge ausgeführt ist, wird dies mit Hülfe des Beobachtungsfernrohres genau für diejenige Linie gethan, für welche man die Messung machen will. Man dreht mit der Schraube ζ den Prismentisch, bis die betreffende Fraunhofer'sche Linie in dem Umkehrpunkte liegt, und stellt dann das Beobachtungsfernrohr unter Zuhülfenahme der Mikrometerschraube π auf die Linie ein.

Fig. 5.

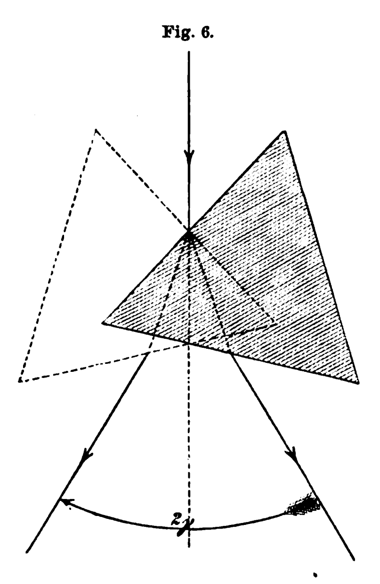


4) Es wird der Winkel gemessen, unter welchem eine Fraunhofer'sche Linie erscheint, wenn man einmal das Licht auf die eine, dann auf die zweite Prismenfläche einfallen lässt, und beidemal die Stellung des Prismas

so gewählt ist, dass für die betreffende Fraunhofersche Linie Minimalablenkung eintritt. Die Hälfte des erwähnten Winkels ist sodann der gesuchte Ablenkungswinkel.

Nachdem auf die gewählte Fraunhofer'sche Linie z. B. die Linie D (Fig. 6) in der unter Nr. 2 geschilderten Weise eingestellt ist, wird abgelesen; der Prismentisch nun ausgelöst und in eine solche Lage gebracht, dass die zweite Prismenfläche gegen das Spaltfernrohr gerichtet ist, die Klemme ϱ gelöst, Fernrohr mit

Fig. 6.



Theilkreis gedreht, bis das Spectrum im Gesichtsfelde des Beobachtungsfernrohres erscheint, ϱ angezogen und nun mit der feinen Bewegung des Tisches und der Mikrometerschraube ϱ' genau auf das Minimum der Linie D eingestellt, sodann zum zweitenmal abgelesen. Die Differenz der beiden Ablesungen durch 2 dividirt giebt den Ablenkungswinkel γ. Die Repetition ist wie oben auszuführen.

5) Berechnung des Verhältnisses der Brechungsindices von Glas und Luft für eine bestimmte Fraunhofer'sche Linie.

Nachdem im Vorausgehenden der Prismenwinkel ψ und der Minimalablenkungswinkel γ für eine bestimmte Fraunhofer'sche Linie gefunden sind, kann man durch die Formel

$$\frac{n_{2r+1}}{n_{2r-1}} = \frac{\sin\frac{\gamma+\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

das Verhältniss der Brechungsindices von Glas und Luft (das Brechungsverhältniss von Luft und Glas) berechnen. Wir setzen bei der Bezeichnung $\frac{n_{2r+1}}{n_{2r-1}}$ die von Seidel eingeführte Bezeichnung, dass alle auf die brechenden Flächen bezüglichen Grössen mit den geraden und alle auf die zwischenliegenden Medien bezüglichen mit den ungeraden Indices versehen werden. Das erste der Medien erhält den Index -1, somit die erste brechende Fläche den Index 0.

Der Nachweis für die Richtigkeit dieser Formel ist in jedem Lehrbuch der Physik gegeben, so dass es genügt, auf eins der bekannten Lehrbücher (Eisenlohr p. 207 u. ff.) zu verweisen.

2. Ausführung der Messungen.

A. Probeprisma aus Flintglas Nr. 818 von Jena.

I. Prismenwinkel.

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II	Achtfacher Prismenwinkel = 8 ψ.	Prismenwinkel = ψ.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	4° 6′ 40″	4° 7′ 5″				
	7 30		479° 31′ 0″	59° 56′ 22″.5	+ 0.12	0.01
		(483)				
4 mal mit der Theilung .	123 38 10	123 38 5				
	8 0		479 30 5	59 56 15.6	− 6.78	45.97
		(603)				
4 mal mit der Theilung .	243 7 40	243 8 10				
	8 40		479 31 20	59 56 25.0	+ 2.62	6.86
		(722)				
4 mal mit der Theilung .	2 39 10	2 39 30				
	9 50		479 30 55	59 56 21.9	− 0.48	0.23
		(482)				
4 mal mit der Theilung .	122 10 20	122 10 25				
	30		479 31 35	59 56 26.9	+ 4.52	20.43
		(601)				
4 mal mit der Theilung .	241 41 50	241 42 0		111.9		73.50
	2 10			$\frac{111.9}{5} = 22.38$		

$$\sqrt{\frac{73.50}{(5-1)\,5}} = \sqrt{3.67} = \pm 1.91$$

$$\psi = 59^\circ\ 56'\ 22''.4 \pm 1''.9.$$

II. Brechung D.[1])

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Sechsfacher Ablenkungswinkel $= 6\gamma$.	Ablenkungswinkel $= \gamma$.	Fehler	Fehlerquadrate.
Einstellung	70° 33′ 50″	70° 33′ 50″	279° 6′ 30″	46° 31′ 5″.0	+ 0.85	0.72
	3 50					
3 mal mit der Theilung .	349 39 50	349 40 20				
	40 50					
Neue Einstellung[2]). . .	268 48 30	268 48 55				
	9 20					
		(547)	279 7 0	46 31 10.0	+ 5.85	34.22
3 mal mit der Theilung .	187 55 50	187 55 55				
	6 0					
Neue Einstellung[3]). . .	175 55 30	175 55 30				
	5 30					
		(455)	279 6 35	46 31 5.8	+ 1.65	2.72
3 mal mit der Theilung .	95 2 0	95 2 5				
	2 10					
		(374)	279 6 5	46 31 0.8	− 3.35	11.22
3 mal mit der Theilung .	14 7 50	14 8 10	279 5 50	46 30 58.3	− 5.85	34.22
	8 30					
3 mal mit der Theilung .	293 13 30	293 14 0				
	4 30					
		(572)	279 6 30	46 31 5.0	+ 0.85	0.72
3 mal mit der Theilung .	212 20 20	212 20 30		$\frac{24.9}{6} = 4.15$		83.82
	0 40					

$$\sqrt{\frac{83.82}{(6-1)6}} = \sqrt{2.79} = \pm 1.67$$

$$_D\gamma = 46^\circ\, 31'\, 4''.15 \pm 1''.7.$$

1) Es ist die gegen die grüne Seite hin liegende der beiden D-Linien gemessen.
2) Die Beobachtung wurde unterbrochen und deshalb neu eingestellt.
3) Eine falsche Mikrometerschraube gedreht, deshalb neu eingestellt.

III. Brechung *F*.

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Sechsfacher Ablenkungswinkel = 6γ.	Ablenkungswinkel $= \gamma$.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	187° 55′ 50″	187° 55′ 55″				
	6 0		285° 35′ 40″	47° 35′ 56″.7	− 2.5	6.25
		(473)				
3 mal mit der Theilung .	113 31 30	113 31 35				
	1 40		285 36 40	47 36 6.7	+ 7.5	56.25
		(399)				
3 mal mit der Theilung .	39 8 0	39 8 15				
	8 30		285 35 55	47 35 59.2	0.0	0.00
3 mal mit der Theilung .	324 43 40	324 44 10				
	4 40		285 35 10	47 35 51.7	− 7.5	56.25
		(610)				
3 mal mit der Theilung .	250 19 0	250 19 20				
	9 40		285 36 10	47 36 1.7	+ 2.5	6.25
		(535)				
3 mal mit der Theilung .	175 55 30	175 55 30		$\frac{296.0}{5} = 59.2$		125.00
	5 30					

$$\sqrt{\frac{125}{(5-1)5}} = \sqrt{6.25} = \pm 2.5$$

$${}_F\gamma = 47^\circ\ 35'\ 59''.2 \pm 2''.5.$$

IV. Brechung G_1.[1]

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Sechsfacher Ablenkungswinkel = 6γ.	Ablenkungswinkel = γ.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	356° 22′ 30″	356° 22′ 45″				
	3 20		292° 44′ 10″	48° 47′ 21″.7	− 7.9	62.41
		(649)				
3 mal mit der Theilung .	289 6 40	289 7 5				
	7 30					
Neue Einstellung . . .	3 49 40	3 50 0				
	50 20		292 45 35	48 47 35.8	+ 6.2	38.44
3 mal mit der Theilung .	296 35 0	296 35 35				
	6 10		292 45 5	48 47 30.8	+ 1.2	1.44
		(589)				
3 mal mit der Theilung .	229 20 20	229 20 40				
	1 0		292 44 25	48 47 24.2	− 5.4	29.16
3 mal mit der Theilung .	162 5 0	162 5 5				
	5 10		292 45 35	48 47 35.8	+ 6.2	38.44
		(454)				
3 mal mit der Theilung .	94 50 40	94 50 40		148.3		169.89
	0 40					

$$\frac{148.3}{5} = 29.6$$

$$\sqrt{\frac{169.89}{(5-1)\,5}} = \sqrt{8.49} = \pm 2.91$$

$$_{G_1}\gamma = 48^0\ 47'\ 29''.6 \pm 2''.9.$$

1) Diese Linie stimmt nicht mit der Fraunhofer'schen Linie G.

V. Brechung H.

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Sechsfacher Ablenkungswinkel $= 6\gamma$.	Ablenkungswinkel $= \gamma$.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	212° 20′ 20″	212° 20′ 30″				
	0 40		297° 0′ 30″	49° 30′ 5″.0	— 0.66	0.44
3 mal mit der Theilung .	149 21 0	(509) 149 21 0				
	1 0		297 1 5	49 30 10.8	+ 5 14	26.42
3 mal mit der Theilung .	86 21 50	(446) 86 22 5				
	2 20					
Neue Einstellung [1]. . .	185 21 40	185 21 40				
	1 40		296 59 50	49 29 58.3	— 7.36	54.17
3 mal mit der Theilung .	122 21 40	(482) 122 21 30				
	1 20		297 0 40	49 30 6.7	+ 1 04	1.08
3 mal mit der Theilung .	59 22 0	(419) 59 22 10				
	2 20		297 0 45	49 30 7.5	+ 1.84	3.38
3 mal mit der Theilung .	356 22 30	356 22 55		$\frac{28.3}{5} = 5.66$		85.49
	3 20					

$$\sqrt{\frac{85.49}{(5-1)\,5}} = \sqrt{4.27} = \pm 2.07$$

$$_{H}\gamma = 49^\circ\ 30'\ 5''.7 \pm 2''.1.$$

1) Die Messung unterbrochen und deshalb neu eingestellt.

B. Probeprisma aus Crownglas Nr. 506 von Jena.

I. Prismenwinkel.

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Achtfacher Prismenwinkel = 8ψ.	Prismenwinkel = ψ.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	49° 7′ 30″	49° 7′ 45″				
	8 0		480° 17′ 30″	60° 2′ 11″.3	+ 0.54	0.29
		(529)				
4mal mit der Theilung .	169 25 20	169 25 15				
	10		480 17 20	60 2 10.0	— 0.76	0.58
		(649)				
4mal mit der Theilung .	289 42 10	289 42 35				
	3 0		480 17 40	60 2 12.5	+ 1.74	3.03
		(410)				
4mal mit der Theilung .	50 0 0	50 0 15				
	0 30		480 17 15	60 2 9.4	— 1.36	1.85
		(530)				
4mal mit der Theilung .	170 17 30	170 17 30				
	7 30		480 17 25	60 2 10.6	+ 0 16	0.03
		(650)				
4mal mit der Theilung .	290 34 30	290 34 55		$\frac{53.8}{5} = 10.76$		5.78
	5 20					

$$\sqrt{\frac{5.78}{(5-1)\,5}} = \sqrt{0.29} = 0.54$$

$$\psi = 60^{\circ}\ 2'\ 10''.8 \pm 0''.5.$$

II. Brechung *D*.

	Ablesungen an Nonius II und VI.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Sechsfacher Ablenkungswinkel = 6γ.	Ablenkungswinkel = γ.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	304° 1′ 10″ 2 20	304° 1′ 45″				
			231° 48′ 30″	38° 38′ 5″.0	− 9.3	86.49
3 mal mit der Theilung .	175 50 10 0 20	(535) 175 50 15				
			231 50 0	38 38 20.0	+ 5.7	32.49
3 mal mit der Theilung .	47 40 0 30	(407) 47 40 15				
			231 49 30	38 38 15.0	+ 0.7	0 49
3 mal mit der Theilung .	279 29 20 30 10	279 29 45				
			231 49 25	38 38 14 2	− 0.1	0.01
3 mal mit der Theilung .	151 19 10 9 10	(511) 151 19 10				
			231 49 45	38 38 17.5	+ 3.2	10.24
3 mal mit der Theilung .	23 8 30 9 20	(383) 23 8 55		$\frac{71.7}{5} = 14.3$		129.72

$$\sqrt{\frac{129.72}{(5-1)\,5}} = \sqrt{6.49} = \pm 2.55$$

$${}_D\gamma = 38^\circ\ 38'\ 14''.3 \pm 2''.5.$$

III. Brechung *F*.

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Sechsfacher Ablenkungswinkel $= 6\gamma$.	Ablenkungswinkel $= \gamma$.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	21° 34′ 30″	21° 34′ 55″				
	5 20					
			235° 4′ 40″	39° 10′ 46″.7	− 5.1	26.01
3mal mit der Theilung .	256 39 10	256 39 35				
	40 0					
			235 5 40	39 10 56.7	+ 4.9	24.01
		(491)				
3mal mit der Theilung .	131 45 10	131 45 15				
	5 20					
			235 5 20	39 10 53.3	+ 1.5	2.25
		(366)				
3mal mit der Theilung .	6 50 10	6 50 35				
	1 0					
			235 5 30	39 10 55.0	+ 3.2	10.24
3mal mit der Theilung .	241 55 40	241 56 5				
	6 30					
			235 4 45	39 10 47.5	− 4.3	18.49
		(477)				
3mal mit der Theilung .	117 0 40	117 0 50		$\frac{259.2}{5} = 51.8$		81.00
	1 0					

$$\sqrt{\frac{81.00}{(5-1)\,5}} = \sqrt{4.05} = \pm 2.01$$

$$_F\gamma = 39^\circ\ 10'\ 51''.8 \pm 2''.0.$$

IV. Brechung G_1.

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Sechsfacher Ablenkungswinkel $= 6\gamma$.	Ablenkungswinkel $= \gamma$.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	117° 0′ 40″ 1 0	117° 0′ 50″				
			238° 27′ 25″	39° 44′ 34″.2	− 6.5	42.25
3 mal mit der Theilung .	355 27 50 8 40	355 28 15				
			238 27 55	39 44 39.2	− 1.5	2.25
3 mal mit der Theilung .	233 55 50 6 30	(593) 233 56 10				
			238 28 25	39 44 44.2	+ 3.5	12.25
3 mal mit der Theilung .	112 24 30 4 40	(472) 112 24 35				
			238 28 30	39 44 45.0	+ 4.3	18.49
3 mal mit der Theilung .	350 52 30 3 40	350 53 5				
			238 28 5	39 44 40.8	+ 0.1	0.01
3 mal mit der Theilung .	229 20 50 1 30	(589) 229 21 10		$\frac{203.4}{5} = 40.7$		75.25

$$\sqrt{\frac{75.25}{(5-1)\,5}} = \sqrt{3.76} = \pm 1.94$$

$$_{G_1}\gamma = 89^\circ\ 44'\ 40''.7 \pm 1''.9.$$

V. Brechung *H*.

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Sechsfacher Ablenkungswinkel $= 6\gamma$.	Ablenkungswinkel $= \gamma$.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	289° 25′ 0″ 5 50	289° 25′ 25″				
			240° 22′ 40″	40° 3′ 46″.7	− 2.7	7.29
3 mal mit der Theilung .	169 48 0 8 10	(529) 169 48 5				
			240 23 5	40 3 50.8	+ 1.4	1.96
3 mal mit der Theilung .	50 10 50 1 30	(410) 50 11 10				
			240 21 55	40 3 39.2	− 10 2	104.04
3 mal mit der Theilung .	290 32 40 3 30	290 33 5				
			240 24 5	40 4 0 8	+ 11.4	129.96
3 mal mit der Theilung .	170 57 10 7 10	(530) 170 57 10				
			240 23 5	40 3 50.8	+ 1.4	1.96
3 mal mit der Theilung .	51 20 0 0 30	(411) 51 20 15				
			240 22 50	40 3 48.3	− 1.1	1.21
3 mal mit der Theilung .	291 42 30 3 40	291 43 5				
				$\frac{296.6}{6} = 49.4$		246.42

$$\sqrt{\frac{246\,42}{(6-1)\,6}} = \sqrt{8.21} = \pm 2.86$$

$$_{H}\gamma = 40^{0}\ 3'\ 49''.4 \pm 2''.9.$$

3. Berechnung.

1. Für Flintglas Nr. 318.

	D	F	G_1	H
γ	46° 31′ 4″15	47° 35′ 59″2	48° 47′ 29″6	49° 30′ 5″7
ψ	59 56 22.4	59 56 22.4	59 56 22.4	59 56 22.4
$\gamma + \psi$	106 27 26.55	107 32 21.6	108 43 52.0	109 26 28.1
$\frac{\gamma + \psi}{2}$	53 13 43.3	53 46 10.8	54 21 56.0	54 43 14.05
$\frac{\psi}{2}$	29 58 11.2	29 58 11.2	29 58 11.2	29 58 11.2
$\log \sin \frac{\gamma + \psi}{2}$	9.903 6495	9.906 6839	9.909 9574	9.911 8737
$(-) \log \sin \frac{\psi}{2}$	9.698 5730	9.698 5730	9.698 5730	9.698 5730
$\log n$	0.205 0765	0.208 1109	0.211 3844	0.213 3007
n	1.603 528	1.614 771	1.626 988	1.634 183

2. Für Crownglas Nr. 506.

	D	F	G_1	H
γ	38° 38′ 14″3	39° 10′ 51″8	39° 44′ 40″7	40° 3′ 49″4
ψ	60 2 10.8	60 2 10.8	60 2 10.8	60 2 10.8
$\gamma + \psi$	98 40 25.1	99 13 2.6	99 46 51.5	100 6 0.2
$\frac{\gamma + \psi}{2}$	49 20 12.55	49 36 31.3	49 53 25.75	50 3 0.1
$\frac{\psi}{2}$	30 1 5.4	30 1 5.4	30 1 5.4	30 1 5.4
$\log \sin \frac{\gamma + \psi}{2}$	9.879 9861	9.881 7478	9.883 5561	9.884 5719
$\log \sin \frac{\psi}{2}$	9.699 2084	9.699 2084	9.699 2084	9.699 2084
$\log n$	0.180 7777	0.182 5394	0.184 3477	0.185 3635
n	1.516 274	1.522 437	1.528 790	1.532 370

Diese eben gefundenen Brechungsindices der beiden Glassorten sollen vor Allem dazu benützt werden, um aus diesen Gläsern ein achromatisches Prisma herzustellen.

§ 3. Achromatisches Prisma und secundäres Spectrum.

Legt man zwei Prismen aus gleichem Glase, und mit gleichem brechenden Winkel so zusammen, dass die Winkel gegen einander stehen, und das Ganze ein Parallelglas bildet, so ist leicht ersichtlich, dass jedes der Prismen das Licht in Brechung und Zerstreuung gleich viel, aber in entgegengesetzter Richtung ablenkt; es tritt demnach parallel einfallendes weisses Licht wieder parallel und als solches aus. Wird das eine der Prismen durch ein stärker brechendes ersetzt, so kann man für dasselbe einen Winkel wählen, bei welchem das Licht einer Farbe z. B. von D

eben so stark und in entgegengesetzter Richtung, wie bei dem ersten Prisma abgelenkt wird. Ist nun die Zerstreuung in demselben Verhältniss grösser wie die Brechung, so werden auch die andern farbigen Strahlen mit D parallel austreten; wenn jedoch die Zerstreuung in einem anderen Maasse als die Brechung sich ändert, so kann man entweder die Brechung beider Prismen gleich machen, wobei ein Theil der Zerstreuung übrig bleibt, oder man kann die Zerstreuung für zwei Farben gleich machen; dann sind aber die entgegengesetzten Brechungen nicht mehr gleich, sondern es überwiegt die des einen Prismas und zwar des schwächer zerstreuenden. Bei den üblichen Crown- und Flintgläsern haben letztere stärkere Brechung und stärkere Zerstreuung; die Zerstreuung ist jedoch nicht in demselben Verhältniss stärker wie die Brechung, sondern bedeutend mehr, so dass, wenn man ein Crownglasprisma von 60^0 brechendem Winkel hergestellt hat, und dessen Zerstreuung aufheben will, man ein Flintglasprisma bedarf, welches ein gleich grosses aber in entgegengesetzter Richtung liegendes Spectrum erzeugt. Der Winkel dieses Prismas wird bedeutend kleiner als der des Crownglasprismas, und es erzielen beide zusammen ein farbloses Bild, welches in diesem Falle in der Richtung abgelenkt erscheint, in welchem das Crownglasprisma bricht. Ein solches aus Crown- und Flintglas gebildetes Doppelprisma nennt man ein achromatisches Prisma.

Aus den Glassorten, für welche oben die Brechungsindices ausgemittelt wurden, soll z. B. ein für die Farben D und F achromatisches Doppelprisma hergestellt werden. Es sei dabei, um einen bestimmten Fall zu erhalten, der brechende Winkel des ersten Prisma (aus Crownglas) der gemessene $= 60^0\ 2'\ 10''.8$, und ausserdem soll das Licht der Farbe D durch dieses Prisma ein Minimum der Ablenkung erfahren. Ferner seien die beiden Prismen zu einem Doppelprisma verkittet.

Wir behandeln diesen speciellen Fall eines achromatischen Prismas da wir denselben später verwerthen können.

Die Brechungsindices der benutzten Gläser sind:

Crownglas: $_Dn = 1.516\,274 \qquad \log {_Dn} = 0.180\,7777$

$_Fn = 1.522\,437 \qquad \log {_Fn} = 0.182\,5394$

Flintglas: $_Dn' = 1.603\,528 \qquad \log {_Dn'} = 0.205\,0765$

$_Fn' = 1.614\,771 \qquad \log {_Fn'} = 0.208\,1109$

Hieraus erhält man:

$$\frac{_Dn}{_Dn'} = 0.945\,586 \qquad \log \frac{_Dn}{_Dn'} = 9.975\,7012$$

$$\frac{_Fn}{_Fn'} = 0.942\,819 \qquad \log \frac{_Fn}{_Fn'} = 9.974\,4285$$

$$\Delta n = {_Fn} - {_Dn} = 0.006\,163 \qquad \log \Delta n = 7.789\,7922$$

$$\Delta n' = {_Fn'} - {_Dn'} = 0.011\,243 \qquad \log \Delta n' = 8.050\,8822$$

und
$$\frac{\Delta n}{\Delta n'} = 0.548\,163 \qquad \log \frac{\Delta n}{\Delta n'} = 9.738\,9100.$$

Man sucht nun zuerst einen Näherungswerth für den Winkel des Flintglasprismas, indem man annimmt, dass die Prismenwinkel sich umgekehrt wie die Zerstreuungen verhalten müssen. Es ist dann

$$\psi_3 = \psi_1 \frac{\varDelta n}{\varDelta n'}.$$

Diese Gleichung liefert dann ein genaues Winkelverhältniss der beiden zu einem achromatischen Doppelprisma zusammengesetzten Einzelprismen, wenn dieselben kleine Winkel haben. Den Beweis hierfür sehe man nach z. B.

Es ist:

$$\log \psi_1 = \log (60^0\ 2'\ 10.8'') = \log 216131'' = 5.334\,72$$

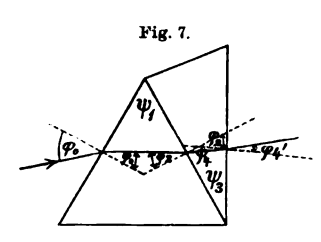
$$\log \frac{\varDelta n}{\varDelta n'} = 9.738\,91$$

$$\log \psi_3' = 5.073\,63$$

$$\psi_3 = 118475'' = 32^0\ 54'\ 35''.$$

Von diesem Näherungswerthe des Flintglas-Prismenwinkels ausgehend rechnet man nun für die beiden gewählten Farben durch das Doppelprisma hindurch. Hierbei muss φ_0 positiv genommen werden, wenn das im Einfallspunkte des Strahles auf die erste brechende Prismenfläche errichtete Loth zwischen dem Strahl und der brechenden Kante des Prismas (siehe Fig. 7) liegt, in welchem Falle für den Prismenwinkel (ψ_1) das obere des dem ψ vorgesetzten Doppelzeichen zu wählen ist, bei conträrer Lage des Prismas das untere. Der Uebergang von φ_{2r} auf φ_{2r}' erfolgt nach dem Brechungsgesetze, also nach der Formel:

Fig. 7.



$\frac{\varphi_{2r}}{\varphi_{2r}'} = \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$. Der Uebergang von φ_{2r}' auf φ_{2r+2} geschieht nach der Formel $\varphi_{2r+2} = \varphi_{2r}' \mp \psi_{2r+1}$, und endlich werden die Ablenkungen bestimmt nach der Formel: $\varphi_{2r} - \varphi_{2r}' = \delta_{2r}$.

Da in dem Crownglasprisma nach der oben schon erwähnten Voraussetzung das Licht der Linie D eine Minimalablenkung erfahren soll, also das Licht der Linie D das Prisma symmetrisch durchläuft, so muss $\varphi_0' = -\varphi_2$ sein, somit auch, da $\psi_1 = \varphi_0' - \varphi_2$ wird, $\psi_1 = 2\varphi_0'$ oder $\varphi_0' = \frac{\psi_1}{2} = 30^0\ 1'\ 5''.4$. Man kann nun den Einfallswinkel φ_0 rechnen.

Es ist

$$\log \sin \varphi_0' = 9.699\,2084$$

$$\log {}_D n = 0.180\,7777$$

$$\log \sin \varphi_0 = 9.879\,9861$$

$$\varphi_0 = 49^0\ 20'\ 12''.5.$$

Mit Hülfe dieses eben gefundenen Einfallswinkels φ_0 rechnet man den Durchgang des Lichtes für die Farben D und F trigonometrisch und zwar vorerst mit dem Näherungswerthe des Prismenwinkels $\psi_3 = 32^0\ 54'\ 35''$ durch das Doppelprisma hindurch. Hierbei ergiebt sich die totale Ablenkung für D zu $14^0\ 41'\ 49''.8$, für F zu $14^0\ 41'\ 47''.7$, also muss der Winkel ψ_3 des Flintglasprismas grösser werden, um die Ablenkungen gleich zu erhalten. Eine probeweise Aenderung des Prismenwinkels ψ_3 führt schliesslich zu dem genauen Werthe dieses Winkels, für welchen die beiden aus dem Doppelprisma austretenden farbigen Sthrahlen einander parallel sind.

	D	F	D	F	D	F
φ_0	49° 20′ 12″5	49° 20′ 12″5				
$\log \sin \varphi_0$	9.879 9861	9.879 9861				
$\log (1:n)$	9.819 2223	9.817 4606				
$\log \sin \varphi_0'$	9.699 2084	9.697 4467				
φ_0'	30 1 5.4	29 53 3.3				
$\mp \psi_1$	— 60 2 10.8	— 60 2 10.8				
φ_2	— 30 1 5.4	— 30 9 7.5				
$\log \sin \varphi_2$	9.699 2084$_n$	9.700 9605$_n$				
$\log (n:n')$	9.975 7012	9.974 4285				
$\log \sin \varphi_2'$	9.674 9096 n	9.675 3890 n				
φ_2'	— 28 13 57.5	— 28 15 59.8				
$\mp \psi_3$	32 54 35	32 54 35	33° 14′ 35″	33° 14′ 35″	33° 6′ 2″5	33° 6′ 2″5
φ_4	4 40 37.5	4 38 35.2	5 0 37.5	4 58 35.2	4 52 5	4 50 2.7
$\log \sin \varphi_4$	8.911 8705	8.908 2110	8.941 1974	8.938 2503	8.928 7103	8.925 6761
$\log n'$	0.205 0765	0.208 1109	0.205 0765	0.208 1109	0.205 0765	0.208 1109
$\log \sin \varphi_4'$	9.116 4470	9.116 3219	9.146 2739	9.146 3612	9.133 7868	9.133 7870
φ_4'	7 30 46.9	7 30 39.0	8 3 2.0	8 3 8.0	7 49 15.4	7 49 15.4
$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$	+ 19 19 7.1	19 27 9.2			+ 19 19 7.1	+ 19 27 9.2
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	— 1 47 7.9	— 1 53 7.7			— 1 47 7.9	— 1 53 7.7
$\delta_4 = \varphi_4 - \varphi_4'$	— 2 50 9.4	— 2 52 3.8	— 3 2 24.5	— 3 4 32.8	— 2 57 10.4	— 2 59 12.7
$\gamma_1 - \gamma_3 = \delta_0 + \delta_2 + \delta_4$	+ 14 41 49.8	+ 14 41 47.7	+ 14 29 34.7	+ 14 29 28.7	+ 14 34 48.8	+ 14 34 48.8

Das so gerechnete Doppelprisma, gebildet aus einem Crownglasprisma von $60^0\ 2'\ 10''.8$ brechenden Winkel, und einem Flintglasprisma von $33^0\ 6'\ 2''.5$ brechenden Winkel lässt die beiden Farben D und F parallel und zwar unter dem Winkel von $7^0\ 49'\ 15''.4$ gegen das Loth der letzten Prismenfläche austreten, und lenkt sie dabei um einen Winkel von $14^0\ 34'\ 48''.8$ ab.

Ebenso wie das Prisma für die beiden Farben D und F keine Farbenzerstreuung liefert, würde es auch für die anderen Farben achromatisch sein, wenn die Zerstreuungsverhältnisse für alle Farben die gleichen wären, wenn also:

$$\frac{{}_An - {}_Bn}{{}_An' - {}_Bn'} = \frac{{}_Bn - {}_Cn}{{}_Bn' - {}_Cn'} = \ldots \frac{{}_Gn - {}_Hn}{{}_Gn' - {}_Hn'},$$

wäre. Im Allgemeinen ist dies bei den jetzt gebräuchlichen Gläsern nicht der Fall, so z. B. ist für die beiden untersuchten Glassorten

$$\frac{{}_Dn - {}_Fn}{{}_Dn' - {}_Fn'} = 0.548\,; \quad \frac{{}_Fn - {}_{G_1}n}{{}_Fn' - {}_{G_1}n'} = 0.520\,; \quad \frac{{}_{G_1}n - {}_Hn}{{}_{G_1}n' - {}_Hn'} = 0.498.$$

Neuerdings werden in der Glasfabrik von Schott u. Gen. in Jena Gläser hergestellt, die zwischen C und F nahezu proportionale Spectra liefern.

Bei nicht proportionalen Spectren der Glassorten, aus denen ein Doppelprisma hergestellt ist, welches beispielsweise für die Farben D und F achromatisch ist, treten die zwischen D und F gelegenen Farben, sowie die ausserhalb dieser Farben befindlichen in verschiedener Richtung aus, es bleibt somit für dieselben eine Farbenzerstreuung übrig. Man nennt die so entstehende Farbenerscheinung das secundäre Spectrum.

§ 4. Bestimmung des Zerstreuungsverhältnisses zweier Glassorten.

Im Vorausgehenden ist angegeben, dass es für zwei Glassorten verschiedene Werthe von $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$ giebt; man muss deshalb ausfindig machen, welchen Werth von $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$ man den Rechnungen zu Grunde legen muss, um für einen bestimmten Fall, z. B. für eine optisch wirksame Combination, den besten Effect zu erhalten.

Fraunhofer hat aus den einzelnen Werthen der Zerstreuungsverhältnisse, welche von je einer fixen Linie zur nächsten gelten, das arithmetische Mittel unter Berücksichtiguug der diesen Lichtstrahlen entsprechenden Lichtintensitäten genommen. Bezeichnet man die Lichtintensitäten der Farben: $A, B, \ldots H, J$ mit ${}_AK, {}_BK, \ldots {}_HK, {}_JK$, und ferner die ganzen zwischen den Linien befindlichen Lichtmengen: ${}_{A,B}K, {}_{B,C}K, \ldots {}_{G,H}K$ und ${}_{H,J}K$, so erhält man nach Fraunhofer:

$$\frac{\Delta n}{\Delta n'} = \frac{\frac{{}_An - {}_Bn}{{}_An' - {}_Bn'}\,{}_{A,B}K + \frac{{}_Bn - {}_Cn}{{}_Bn' - {}_Cn'}\,{}_{B,C}K + \cdots + \frac{{}_Gn - {}_Hn}{{}_Gn' - {}_Hn'}\,{}_{G,H}K + \frac{{}_Hn - {}_Jn}{{}_Hn' - {}_Jn'}\,{}_{H,J}K}{{}_{A,B}K + {}_{B,C}K + \cdots + {}_{G,H}K + {}_{H,J}K}.$$

Unter der Annahme, dass die von Fraunhofer beobachten Lichtintensitäten, nämlich:



$_{A,B}K = 0.000;\quad _{B,C}K = 0.021;\quad _{C,D}K = 0.299;\quad _{D,E}K = 1.000;$

$_{E,F}K = 0.328;\quad _{F,G}K = 0.185;\quad _{G,H}K = 0.035;\quad _{H,J}K = 0.000,$

auch für die von uns untersuchten Glassorten Crown Nr. 506 und Flint Nr. 318 gültig seien, ergiebt sich folgende Berechnung des Quotienten $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$.

Es seien

für Crownglas	für Flintglas
$_Bn = 1.512\,67$;	$_Bn' = 1.597\,26$;
$_Cn = 1.513\,65$;	$_Cn' = 1.598\,93$;
$_Dn = 1.516\,27$;	$_Dn' = 1.603\,53$;
$_En = 1.519\,57$;	$_En' = 1.609\,45$;
$_Fn = 1.522\,44$;	$_Fn' = 1.614\,77$;
$_Gn = 1.527\,77$;	$_Gn' = 1.625\,04$;
$_Hn = 1.532\,37$;	$_Hn' = 1.634\,18$.

Setzt man diese Werthe in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$\frac{\Delta n}{\Delta n'} = \frac{\frac{0.00098}{0.00167}0.021 + \frac{0.00262}{0.00460}0.299 + \frac{0.00330}{0.00592}1.000 + \frac{0.00287}{0.00532}0.328 + \frac{0.00533}{0.01027}0.185 + \frac{0.00460}{0.00914}0.035}{0.021 + 0.299 + 1.000 + 0.328 + 0.185 + 0.035} = 0.5517.$$

C. A. Steinheil und L. Seidel[1]) haben nachgewiesen, dass die Berechnung des Quotienten $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$ richtiger nach der Formel:

$$\frac{\Delta n}{\Delta n'} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{_Bn - _Dn}{_Bn' - _Dn'} + \frac{_Cn - _Dn}{_Cn' - _Dn'}\right)_{B,C}K + \frac{1}{2}\left(\frac{_Cn - _Dn}{_Cn' - _Dn'} + \frac{_En - _Dn}{_En' - _Dn'}\right)_{C,D}K + \frac{1}{2}\left(\frac{_Cn - _Dn}{_Cn' - _Dn'} + \frac{_En - _Dn}{_En' - _Dn'}\right)_{D,E}K + \frac{1}{2}\left(\frac{_En - _Dn}{_En' - _Dn'} + \frac{_Fn - _Dn}{_Fn' - _Dn'}\right)_{E,F}K + \frac{1}{2}\left(\frac{_Fn - _Dn}{_Fn' - _Dn'} + \frac{_Gn - _Dn}{_Gn' - _Dn'}\right)_{F,G}K + \frac{1}{2}\left(\frac{_Gn - _Dn}{_Gn' - _Dn'} + \frac{_Hn - _Dn}{_Hn' - _Dn'}\right)_{G,H}K}{_{B,C}K + _{C,D}K + _{D,E}K + _{E,F}K + _{F,G}K + _{G,H}K}$$

ausgeführt wird.

In diese Formel die obigen Werthe der Brechungsindices, sowie der Lichtmengen eingeführt, erhält man:

$$\frac{\Delta n}{\Delta n'} = 0.5590.$$

In zweckmässiger Weise kann man für eine optisch wirksame Combination den vortheilhaftesten Werth von $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$ durch eine einfache, im Folgenden beschriebene Beobachtung finden. Man berechnet nämlich aus

1) Siehe Beilage II.

den beiden Glassorten ein verkittetes, für die Linien D und F achromatisches Doppelprisma, wie dies im vorausgehenden § 3 beschrieben wurde, und stellt nun ein solches Prisma von gegebenem Werthe annähernd her.

Ist in der Ausführung der Winkel ψ_3 nicht genau getroffen, so wird mit dem wirklich ausgeführten Winkel von ψ_3 die weitere Berechnung vorgenommen.

Für die beiden Glassorten Crown Nr. 506 und Flint Nr. 318 haben wir schon oben ein achromatisches Doppelprisma berechnet, wir fanden, dass für einen Winkel $\psi_1 = 60^0\ 2'\ 10''.8$ des Crownglasprismas ein Flintglasprisma vom Winkel $\psi_3 = 33^0\ 6'\ 2''.5$ genommen werden müsse, wenn das aus beiden zusammengesetzte Doppelprisma für die Farben D und F achromatisch sein soll. Es wurde nun ein Flintglasprisma hergestellt, das näherungsweise den berechneten Winkel besitzt, und dieser Winkel mit dem Goniometer genau gemessen. Die Beobachtungsresultate siehe Tabelle S. 29.

Das Flintglasprisma von $33^0\ 35'\ 47''.3$ brechendem Winkel wird nun mit dem Crownglasprisma von $60^0\ 2'\ 10''.8$ brechendem Winkel durch Ricinusöl zu einem Doppelprisma vereinigt.

Dieses Doppelprisma wird nur dann ein achromatisches Bild des Spaltes geben, wenn es so auf dem Tische des Goniometers aufgestellt ist, dass der Einfallswinkel der parallel vom Spaltfernrohre einfallenden Strahlen mit dem Lothe der ersten Prismenfläche den in der Rechnung vorausgesetzten Winkel (in unserem Beispiele ist $\varphi_0 = 49^0\ 20'\ 12''.5$) bildet. Es steht hierbei das Crownglasprisma auf dem Minimum der Ablenkung, das Gesammtprisma ist aber weit von diesem entfernt. (In unserem Beispiele ist $\varphi_0 = 49^0\ 20'\ 12''.5$, dagegen $\varphi_4' = 7^0\ 49'\ 15''.4$), es wird deshalb die Farbenlage des Spaltbildes bedeutend ändern, wenn dieser Einfallswinkel geändert wird, und zwar in verschiedener Richtung je nachdem man ihn vergrössert oder verkleinert. Es ändert aber nicht nur die Farbenlage, sondern gleichzeitig mit derselben die Ablenkung, welche die Strahlen erleiden; dies bietet ein Mittel, den Quotient $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$ zu finden, der den besten optischen Gesammteffect bei Verwendung der beiden Glassorten ergiebt. Zu diesem Zwecke wird, während man durch das Beobachtungsfernrohr den Spalt betrachtet, das Prisma gedreht, um die Lage zu finden, bei welcher das Bild des Spaltes möglichst scharf und achromatisch erscheint. Für diese Lage wird die Ablenkung der Strahlen durch das Prisma bestimmt, indem man, nachdem in der günstigsten Lage eingestellt war, abliest und nun mit Fernrohr und Kreis nach Entfernung des Prismas direct auf den Spalt einstellt und wieder abliest. Die Differenz der beiden Ablesungen ist die Ablenkung, bei welcher der Farbeneffect der günstigste ist. Man wird im Allgemeinen zweckmässiger die Ablenkung einmal nach der einen, dann nach der andern Seite durch Drehen des Prismas hervorbringen, ähnlich wie dies bei den Brechungsbestimmungen beschrieben, und so den Ablenkungswinkel durch Repetition messen.

Im gegebenen Falle ergab sich der Ablenkungswinkel durch folgende Messungen (S. 30).

Zweites Probeprisma aus Flintglas Nr. 318 von Jena.

Prismenwinkel.

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Sechsfacher Prismenwinkel = 6 ψ.	Prismenwinkel = ψ.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	121° 14′ 0″ 4 10	121° 14′ 5″				
			201° 34′ 25″	33° 35′ 44″.2	− 3.12	9.73
3mal mit der Theilung .	322 48 0 9 0	322 48 30				
			201 34 50	33 35 48.2	+ 0.88	0.77
3mal mit der Theilung .	164 28 30 8 10	(524) 164 23 20				
			201 35 0	33 35 50.0	+ 2.68	7.18
3mal mit der Theilung .	5 58 0 8 40	(365) 5 58 20				
			201 34 55	33 35 49.2	+ 1.88	3.53
3mal mit der Theilung .	207 33 10 3 20	207 38 15				
			201 34 30	33 35 45.0	− 2.32	5.38
3mal mit der Theilung .	49 7 30 8 0	(409) 49 7 45		$\frac{236.6}{5} = 47.32$		26.59

$$\sqrt{\frac{26.59}{(5-1)5}} = \sqrt{1.329} = \pm 1.15$$

$$\psi = 33^{\circ}\ 35'\ 47''.3 \pm 1''.2.$$

Doppelprisma aus Crown Nr. 506 und Flint Nr. 818.

Ablenkung.

	Ablesungen an Nonius II und IV.	Corrigirte Ablesung an Nonius II.	Sechsfacher Ablenkungswinkel $= 6\gamma$.	Ablenkungswinkel $= \gamma$.	Fehler.	Fehlerquadrate.
Einstellung	37° 35′ 10″	37° 35′ 20″				
	5 30		81° 52′ 55″	13° 38′ 49″.2	+ 111.42	12414
3mal mit der Theilung .	119 28 20	119 28 15				
	8 10		81 40 55	13 36 49.2	− 8.58	74
3mal mit der Theilung .	201 9 10	201 9 10				
	9 10		81 52 15	13 38 42.5	+ 104.72	10966
3mal mit der Theilung .	283 1 0	283 1 25				
	1 50					
		(365)	82 1 10	13 40 11.7	+ 193.92	37605
3mal mit der Theilung .	5 2 20	5 2 35				
	2 50		81 48 55	13 38 9.2	+ 71.42	5101
3mal mit der Theilung .	86 51 30	86 51 30				
	1 30		81 46 50	13 37 48.3	+ 50.52	2552
3mal mit der Theilung .	168 38 20	168 38 20				
	8 20		81 42 40	13 37 6.7	+ 8.92	80
3mal mit der Theilung .	250 20 40	250 21 0				
	1 20		81 2 15	13 30 22.5	− 395.28	156246
3mal mit der Theilung .	331 22 40	331 23 15				
	3 50					
		(413)	81 58 15	13 39 42.5	+ 164.72	27133
3mal mit der Theilung .	53 21 20	53 21 30				
	1 40		80 56 15	13 29 22.5	− 455.28	207280
3mal mit der Theilung .	134 17 50	134 17 45				
	7 40		81 44 5	13 37 20.8	+ 23.02	530
3mal mit der Theilung .	216 1 40	216 1 50				
	2 0		81 54 50	13 39 8.3	+ 130.52	17035
3mal mit der Theilung .	297 56 10	297 56 40		443 33.4 / 12	= 36′ 57″.78	477016
	7 10					

$$\sqrt{\frac{477016}{(12-1)12}} = \sqrt{3613} = \pm 60.1.$$

$$\gamma = 13^\circ\ 36'\ 57''.8 \pm 60''.1.$$

Es ist ersichtlich, dass die Einstellung des Doppelprismas auf beste Achromasie nicht mit grosser Genauigkeit erfolgt, indem der mittlere Fehler des Resultates etwa 30 mal grösser ist, als der bei den Bestimmungen des Prismenwinkels; dennoch beeinflusst dies die Genauigkeit der Berechnung von $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$ nicht in hohem Grade.

Nun wird durch Rechnung zuerst der bei der gemessenen Ablenkung statthabende Einfallswinkel, und nachher das einem für das Crownglasprisma beliebig anzunehmenden, stärker brechenden Strahle entsprechende grössere n' fürs Flintglas abgeleitet.

Gegeben sind nämlich $_D n$ für Crownglas, $_D n'$ für Flintglas, der Prismenwinkel ψ_1 für Crown- und der Prismenwinkel ψ_3 für Flintglas. Man beginnt nun die Rechnung, indem man den Einfallswinkel an der ersten Fläche wie bei der Näherungsrechnung (in unserem Beispiel also 49° 20′ 12″.5) annimmt, sodann den der Farbe D entsprechenden Strahl durch die drei Brechungen, die er an den Prismenflächen erleidet, verfolgt, und mit dieser Rechnung seine Gesammtablenkung ableitet (in dem betrachteten Falle gleich 14° 16′ 31″.2). Es ist die Ablenkung somit bedeutend zu gross und müsste man, damit die Ablenkung kleiner würde, das Gesammtprisma dem Minimum der Ablenkung näher bringen, also dem Einfallswinkel einen kleineren Werth geben. Die Durchrechnung für diesen jetzt angenommenen Werth des Einfallswinkels giebt einen anderen Ablenkungswinkel; diese Zahlen für Einfalls- und Ablenkungswinkel, zusammen mit den früheren, gestatten die Einwirkung der Aenderung vom Einfallswinkel auf die Aenderung des Ablenkungswinkels zu bestimmen, so dass nun durch Interpolation sehr nahe der richtige Einfallswinkel erhalten und durch Wiederholung der genaue Werth desselben gefunden werden kann. In dem von uns gewählten Beispiele ist die Rechnung in folgender Weise durchzuführen.

	I	II	III
φ_0	49° 20′ 12″.5	46° 36′ 30″	46° 36′ 35″
$\log \sin \varphi_0$	9.879 99	9.861 34	9.861 35
$\log 1 : n$	9.819 22	9.819 22	9.819 22
$\log \sin \varphi_0'$	9.699 21	9.680 56	9.680 57
φ_0'	30 1 5.4	28 38 11.2	28 38 13.8
$\pm \psi_1$	— 60 2 10.8	— 60 2 10.8	— 60 2 10.8
φ_2	— 30 1 5.4	— 31 23 59.6	— 31 23 57.0
$\log \sin \varphi_2$	9.699 21 *n*	9.716 84 *n*	9.716 84 *n*
$\log (n : n')$	9.975 70	9.975 70	9.975 70
$\log \sin \varphi_2'$	9.674 91 *n*	9.692 55 *n*	9.692 54 *n*
φ_2'	— 28 13 57.5	— 29 30 55.6	— 29 30 53.2
$\mp \psi_3$	33 35 47.3	33 35 47.3	33 35 47.3
φ_4	5 21 49.8	4 4 51.7	4 4 54.1
$\log \sin \varphi_4$	8.970 68	8.852 28	8.852 35
$\log n'$	0.205 08	0.205 08	0.205 08
$\log \sin \varphi_4'$	9.175 75	9.057 36	9.057 43
φ_4'	8 37 17.8	6 33 10.1	6 33 13.9
δ_0	+ 19 19 7.1	+ 17 58 18.8	+ 17 58 21.2
δ_2	— 1 47 7.9	— 1 53 4.0	— 1 53 3.8
δ_4	— 3 15 28.0	— 2 28 18.4	— 2 28 19.8
$\gamma_{1,3}$	+ 14 16 31.2	+ 13 36 56.4	+ 13 36 57.6

Hat man den Einfallswinkel (in unserem Beispiel $\varphi_0 = 46^0\ 36'\ 35''$) durch die vorausgehende Rechnung gefunden, so nimmt man für das Crownglas einen Werth von n an, und zwar am besten einen, der einer von D aus über F gelegenen Farbe entspricht, damit man auch bei wenig Stellen den Farbeneinfluss sicher erhält. Wir nehmen z. B. in unserm speciellen Falle den Brechungsindex des Crownglases, den wir mit ${}_{viol}n$ bezeichnen, an zu 1.52777. Den Unterschied ${}_{viol}n - {}_{D}n = 1.52777 - 1.51627 = 0.01150$ multiplicirt man mit dem Quotient

$$\frac{{}_{F}n' - {}_{D}n'}{{}_{F}n - {}_{D}n} = \frac{1.61477 - 1.60353}{1.52244 - 1.51627} = \frac{0.01124}{0.00617},$$

wodurch man einen Näherungswerth von ${}_{viol}n' - {}_{D}n' = 0.02095$ erhält, und da ${}_{D}n' = 1.60353$, erhält man für ${}_{viol}n$ den Näherungswerth 1.62448. Nun wird mit diesen Werthen durch das Doppelprisma gerechnet unter der Annahme des gefundenen ersten Einfallswinkels ($\varphi_0 = 46^0\ 36'\ 35''$) und man sieht, ob die austretenden Strahlen den gelben parallel sind; ist dies nicht der Fall, so wird ${}_{viol}n'$ so lange geändert, bis der so gerechnete austretende Strahl dem austretenden Strahle der Farbe D parallel ist (also in dem Beispiele einem Austrittswinkel $\varphi_4' = 13^0\ 36'\ 58''.8$ entspricht). Die Berechnung ist im Folgenden wiedergegeben.

	I	II	III
φ_0	46° 36′ 35″		
$\log\sin\varphi_0$	9.86135		
$\log 1 : n$	9.81594		
$\log\sin\varphi_0'$	9.67729		
φ_0'	28 24 7.2		
$\mp\psi_1$	− 60 2 10.8		
φ_2	− 31 38 3.6		
$\log\sin\varphi_2$	9.71974 n	9.71974 n	9.71974 n
$\log n : n'$	9.97334	9.97350	9.97348
$\log\sin\varphi_2'$	9.69308 n	9.69324 n	9.69323 n
φ_2'	− 29 33 29.7	− 29 34 2.8	− 29 33 38.5
$\mp\psi_3$	33 35 47.3	33 35 47.3	33 35 47.3
φ_4	4 2 17.6	4 1 44.5	4 1 48.8
$\log\sin\varphi_4$	8.84771	8.84672	8.84685
$\log n'$	0.21071	0.21056	0.21057
$\log\sin\varphi_4'$	9.05842	9.05728	9.05742
φ_4'	6 34 8.3	6 33 5.8	6 33 13.7
δ_0	+ 18 12 27.8	+ 18 12 27.8	+ 18 12 27.8
δ_2	− 2 4 33.9	− 2 4 0.8	− 2 4 5.1
δ_4	− 2 31 50.7	− 2 31 21.3	− 2 31 24.3
$\gamma_{1,3}$	+ 13 36 3.2	+ 13 37 5.7	+ 13 36 57.8

Der dem Gesammteffect am besten entsprechende Werth von $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$ ist gegeben durch die Gleichung: $\frac{\Delta n}{\Delta n'} = \frac{{}_{viol}n - {}_{D}n}{{}_{viol}n' - {}_{D}n'} = \frac{0.01150}{0.02043} = 0.5628.$

Selbstverständlich ist, dass Farbenblinde diese Bestimmung von $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$ nicht wohl anwenden können, und dass z. B. Rothblinde wesentlich andere Resultate erhalten würden; es verlangen aber auch Leute, die derartige Augen besitzen, eine andere Lage der Farben bei optischen Apparaten, die sie für gut finden sollen; z. B. Rothblinde eine Vernachlässigung der rothen Strahlen.

Zwischen den Instrumenten, die zur Unterstützung des Auges dienen, und solchen, mit denen auch photographirt werden soll, besteht ein principieller Unterschied, dass nämlich bei den ersteren nur die auf das Auge wirkenden Strahlen mit ihrer jeweiligen Intensität, bei den letzteren dagegen hauptsächlich die chemisch wirksamen Strahlen, und die für diese Wirkung intensiveren, berücksichtigt werden müssen. Während für die optisch wirksamen Strahlen das Maximum der Intensität in dem gelben Theile des Spectrums liegt, haben die chemisch wirksamen Strahlen meist ein Maximum in der Nähe der Linie G. Es müssen deshalb beim Photographiren die violetten Strahlen hauptsächlich berücksichtigt werden, und in den meisten Fällen könnten zur Herstellung scharfer Bilder die optisch intensivsten Strahlen ganz ausser Betracht bleiben. Ist letzteres der Fall, so genügt es, die Rechnungen für die Linien G und H auszuführen. Kommen aber Fälle vor, wie bei terrestrischen Aufnahmen in sehr verschiedenen Entfernungen, wobei man sich wegen des richtigen Einstellens optisch orientiren will, oder auch wenn orthochromatische Platten, auf welche das gelbe Licht ebenfalls einwirkt, angewendet werden, so legt man besser diejenigen Strahlen zusammen, welche dem Maximum für optische und chemische Intensität entsprechen.

II. Capitel.

Fundamentaleigenschaften eines dioptrischen Systems.

§ 1. Definition und Eigenschaften der Fundamentalpunkte.

Wir beschränken unsere Betrachtung nur auf solche dioptrische Systeme, welche in der Praxis Verwerthung finden. Vor Allem nehmen wir daher an, dass die Trennungsflächen der Medien Kugelflächen sind, weil nur diese mit genügender Genauigkeit hergestellt werden können, und andere Formen auch keine wesentlichen Vortheile versprechen würden.

Es ist kaum nothwendig zu bemerken, dass ebene Trennungsflächen als Sphären mit unendlich grossem Radius zu betrachten sind.

Ferner machen wir die Voraussetzung, dass die Mittelpunkte aller sphärischen Trennungsflächen auf einer Geraden liegen. Eine andere Anordnung wäre nur schwer mit der erforderlichen Genauigkeit auszuführen, und würde überdies nur Nachtheile bedingen.

Ein System sphärischer brechender Flächen, deren Mittelpunkte alle auf einer Geraden liegen, wird ein centrirtes System genannt; die Gerade, welche alle Centra enthält, heisst die optische Axe, und die Schnittpunkte der brechenden Flächen mit der optischen Axe die Scheitelpunkte, welch letztere mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet werden.

Vollkommen bestimmt ist ein dioptrisches System, wenn die Brechungsindices aller Medien, sowie die Lagen der Scheitel und Mittelpunkte aller Trennungsflächen gegeben sind. Anstatt der Lage aller Scheitel- und Mittelpunkte kann der Ort des ersten Scheitels, die Dicke aller Medien und die Radien der Trennungsflächen gegeben sein.

Eine genaue Bestimmung des Weges, welchen ein Lichtstrahl beim Durchlaufen eines centrirten dioptrischen Systems zurücklegt, kann mit Hülfe von trigonometrischen Formeln, die keine mathematischen Schwierigkeiten bieten, erhalten werden und zwar mit derjenigen Genauigkeit, welche der Stellenzahl der benützten Logarithmen entspricht. Die auf diesem Wege für einen speciellen Fall gewonnenen Resultate könnten nur schwer für einen andern verwerthet werden. Es erscheint zweckmässiger vorerst durch gewisse Beschränkungen einfache Regeln zu gewinnen, welche für das angenommene System in aller Strenge gültig sind, und für die in der Praxis ausgeführten Systeme den Werth von Annäherungen behalten.

Die Voraussetzungen, welche wir zur Gewinnung der Näherungswerthe machen, sind folgende:

1) Die das System brechender Flächen durchlaufenden Lichtstrahlen bilden mit der optischen Axe nur kleine Winkel, so dass für den Sinus und die Tangente dieser Winkel der Bogen und für den Cosinus die Einheit gesetzt werden darf.

2) Die Radien, welche durch die Schnittpunkte der einfallenden und gebrochenen Lichtstrahlen mit den sphärischen Flächen gezogen sind, bilden mit der optischen Axe ebenfalls so kleine Winkel, dass die Sinus und Tangenten durch die Bogen und die Cosinus durch Eins ersetzt werden können.

Die eben ausgesprochene Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass die Einfallshöhen gegen die Radien der brechenden Fläche kleine Grössen sind. Unter Einfallshöhe ist der von der optischen Axe aus gemessene senkrechte Abstand derjenigen Punkte verstanden, in welchen die sphärischen Flächen von den einfallenden und gebrochenen Strahlen getroffen werden.

3) Für den Anfang nehmen wir ferner, um die Betrachtung nicht zu compliciren, an, dass das einfallende Licht homogen (monochromatisch) sei; d. h. dass es nur aus einer Farbe bestehe.

Unter Beibehaltung der eben genannten Bedingungen ist es gelungen, den Weg eines Lichtstrahles durch ein System brechender Flächen einfach zu bestimmen und die davon abhängenden Erscheinungen in klarer Weise darzustellen, was insbesondere den bahnbrechenden Untersuchungen von Gauss[1]) zu danken ist. Wir wollen in dem Folgenden nur die durch die Gauss'sche Theorie gewonnenen Resultate soweit zusammenstellen, als wir dieselben später benützen müssen; die Entwickelung und Begründung zu geben unterlassen wir, und verweisen in dieser Hinsicht auf die einschlägigen Schriften[2]). Es sei ferner noch hervorgehoben, dass wir die

1) Dioptrische Untersuchungen von *C. F. Gauss*, Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. I, 1838—1843. (Ueberreicht den 10. Dec. 1840.) *C. F. Gauss* Werke Bd. V, S. 243. Göttingen 1867. Götting. gelehrte Anz. 1841. 1.

2) In elementarer Weise ist die Entwickelung der Gauss'schen Theorie gegeben von *C. Neumann:* Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems. Leipzig 1866.

Resultate für ein System brechender Flächen geben, dessen erstes und letztes Medium identisch sind, also für den speciellen Fall, der in der ausübenden Optik fast ausschliesslich vorkommt.

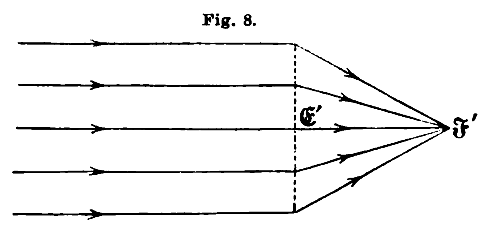
Für den allgemeinen Fall, dass das erste und letzte Medium verschieden ist, müssen einige Resultate in einer andern Fassung ausgesprochen werden, weshalb wir diese in Bemerkungen beifügen wollen.

Jedes Linsensystem hat, obige Beschränkungen vorausgesetzt, die Eigenschaft, dass alle von einem Punkte (dem Objectpunkte) ausgehenden Strahlen beim Durchgange durch das System in solcher Weise abgelenkt werden, dass sie wieder nach einem Punkte (dem Bildpunkte) zielen. Sind ferner die Objectpunkte in einer zur Axe senkrechten Ebene (der Objectebene), so liegen die Bildpunkte ebenfalls in einer zur Axe senkrechten Ebene (der Bildebene). Wir bezeichnen einen in der Axe gelegenen Objectpunkt mit $\mathfrak{O}$, einen in der Axe gelegenen Bildpunkt mit $\mathfrak{B}$, ferner einen seitlich von der Axe gelegenen Objectpunkt mit $\mathfrak{O}^*$ und endlich einen seitlich von der Axe gelegenen Bildpunkt mit $\mathfrak{B}^*$.

Durch Betrachtung der Bildpunkte für einige Grenzfälle von Objectpunkten gewinnen wir die Bedeutung von Punkten, welche die Leistung eines Systems brechender Flächen ausserordentlich einfach darzustellen erlauben.

1) Wählen wir zuerst einen unendlich entfernten, in der optischen Axe vor dem Linsensystem gelegenen Objectpunkt, so wird der von demselben ausgesendete Strahlenbüschel, zur Axe parallele Strahlen bildend, das Linsensystem treffen; von diesen Strahlen wird einer, und zwar der mit der optischen Axe zusammenfallende, ungebrochen durch das System gehen, während alle anderen in der Art

Fig. 8.



abgelenkt werden, dass sie sich in einem in der optischen Axe gelegenen Punkte schneiden. Diesen Punkt, den wir mit $\mathfrak{F}'$ bezeichnen, heisst der zweite Brennpunkt des Linsensystems. — Der zweite Brennpunkt ist somit der Bildpunkt eines unendlich entfernten in der Axe gelegenen Objectpunktes.

Die parallel zur Axe einfallenden Strahlen schneiden sich mit den ihnen zugehörigen austretenden Strahlen — beide entsprechend verlängert — in einer zur optischen Axe senkrechten Ebene, der zweiten Hauptebene; der Durchschnittspunkt $\mathfrak{E}'$ dieser Ebene mit der optischen Axe heisst der zweite Hauptpunkt.

2) Kommt dann von einem unendlich entfernten, in der optischen Axe, jedoch hinter dem Linsensystem gelegenen Objectpunkte ein zur Axe paralleles Strahlenbüschel auf das System, also in einer dem einfallenden Lichte entgegengesetzten Richtung, so geht wieder ein Strahl — mit der optischen

---

Sehr ausführlich ist die Darstellung von *Galileo Ferraris:* Le proprietà cardinali degli strumenti dioptrici, esposizione elementare della teoria di Gauss e delle sue applicazioni. Torrino 1877. Autorisirte deutsche Ausgabe von *F. Lippich,* Leipzig 1879.

Axe zusammenfallend — ungebrochen durch das System, und die anderen Strahlen schneiden sich auf demselben vor dem System in dem Punkte $\mathfrak{F}$ — dem ersten Brennpunkte.

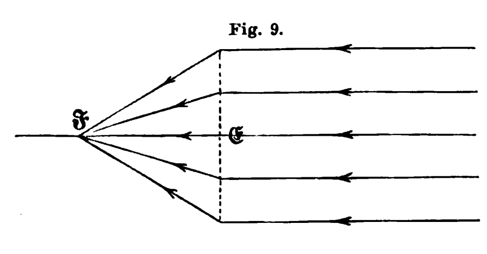


Fig. 9.

Die parallel zur Axe einfallenden Strahlen treten hierbei so aus dem Systeme, als ob sie anfänglich bis zu einer zur Axe senkrechten Ebene, der ersten Hauptebene — die in $\mathfrak{E}$, dem ersten Hauptpunkte, die Axe schneidet — gegangen, und von da nach dem ersten Brennpunkte abgelenkt worden wären.

Die Entfernung vom ersten Hauptpunkte $\mathfrak{E}$ bis zum ersten Brennpunkte $\mathfrak{F}$ heisst die erste Brennweite $= F$; die Entfernung vom zweiten Hauptpunkte $\mathfrak{E}'$ bis zum zweiten Brennpunkte $\mathfrak{F}'$ die zweite Brennweite $= F'$. Die Brennweiten sind positiv, wenn in der Richtung des auf das System auffallenden Lichtes der Hauptpunkt dem Brennpunkte vorausgeht.

Bei einem Linsensystem sind die beiden Brennweiten ihrer absoluten Grösse nach einander gleich, im Zeichen jedoch entgegengesetzt, also $F' = - F$.

3) Nimmt man in der unendlich entfernten, vor dem Systeme liegenden Objectebene einen Objectpunkt seitlich von der Axe an, so wird der von diesem Punkte ausgehende und das System treffende Strahlenbüschel durch unter sich parallele, aber gegen die Axe geneigte Strahlen gebildet. Von diesen Strahlen wird einer, der Hauptstrahl, nach dem Durchgange durch das System seinen Weg unter demselben Winkel gegen die Axe fortsetzen, unter welchem er einfiel, die anderen Strahlen werden sich auf diesem schneiden und zwar in jenem Punkte, in welchem der austretende Hauptstrahl die in $\mathfrak{F}'$ errichtete, zur Axe senkrechte Ebene — die zweite Brennpunktsebene — trifft.

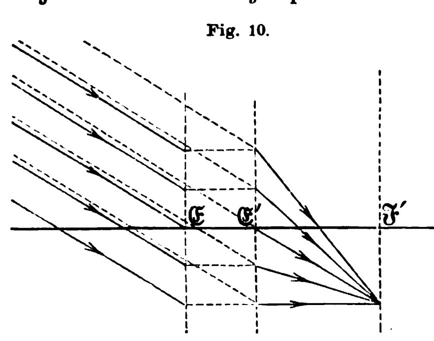
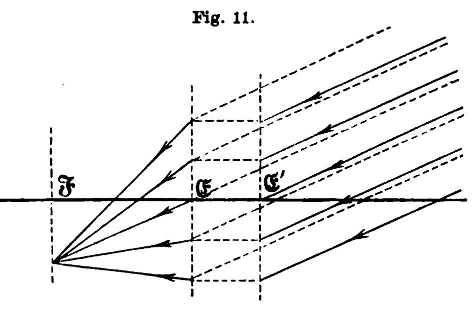


Fig. 10.

Von dem schräg zur Axe einfallenden Strahlenbüschel zielt ein Strahl, der Hauptstrahl, auf den ersten Hauptpunkt $\mathfrak{E}$, und tritt so aus, als käme er aus dem zweiten Hauptpunkte $\mathfrak{E}'$. Der austretende Hauptstrahl ist somit gegen den eintretenden um die Entfernung der beiden Hauptpunkte in der Richtung parallel zur Axe verschoben. Die übrigen Strahlen des einfallenden Büschels durchlaufen das System so, als ob sie anfänglich bis zur ersten Hauptebene gegangen, sodann unter Beibehaltung ihrer Lage in einer zur Axe parallelen Richtung bis zur zweiten Hauptebene verschoben worden, und nun von dieser Ebene so abgelenkt werden, dass sie den Punkt in der zweiten Brennpunktsebene treffen, in welchem der austretende Hauptstrahl schneidet.

4) Wenn wir endlich einen seitlich von der Axe gelegenen unendlich entfernten, aber **hinter** dem System liegenden Objectpunkt annehmen, so wird von den unter sich parallelen, gegen die Axe geneigten Strahlen einer, der Hauptstrahl, das System unter gleichem Winkel verlassen, während die übrigen so gebrochen werden, dass sie den austretenden Hauptstrahl in dem Punkte treffen, in welchem derselbe die in dem ersten Brennpunkte 𝔉 zur Axe senkrechte Ebene, die **erste Brennpunktsebene**, trifft.

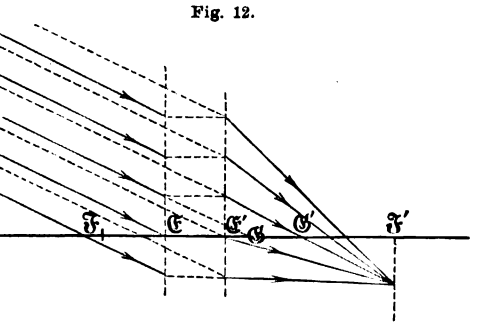
Fig. 11.



Ein Strahl dieses Büschels, der Hauptstrahl, zielt auf den zweiten Hauptpunkt 𝔈′, und tritt so aus, als ob er parallel zu seiner anfänglichen Lage in der Richtung der Axe um die Entfernung der beiden Hauptpunkte verschoben würde, so dass er von dem ersten Hauptpunkte 𝔈 zu kommen scheint. Die übrigen Strahlen gehen so, als ob sie bis zur zweiten Hauptebene ungebrochen verlaufen, nun parallel zu ihrer Lage in der Richtung der Axe bis zur ersten Hauptebene verschoben werden, und in dieser Ebene eine Ablenkung erfahren, so dass sie sich in dem Punkte der ersten Brennpunktsebene treffen, in welchem auch der austretende Hauptstrahl schneidet.

Für den zur Axe geneigten Strahlenbüschel haben die Hauptpunkte die Bedeutung der Richtungspunkte für die Hauptstrahlen, und es erscheint ein Object von dem einen Hauptpunkte aus betrachtet unter demselben Winkel, unter welchem dessen Bild von dem andern Hauptpunkte aus gesehen erscheint. Es lässt sich aus den vorausgehenden Betrachtungen noch der allgemeine Satz folgern, dass irgend welche auf ein Linsensystem einfallende Strahlen dasselbe so durchlaufen, als ob sie bis zur ersten Hauptebene ungebrochen gingen, sodann parallel ihrer Richtung bis zur anderen Hauptebene verschoben und an dieser nach dem Bildpunkte abgelenkt würden.

Fig. 12.



Wenn das erste und letzte Medium verschieden sind, wie z. B. bei dem Auge, ändern sich einige der unter 3) und 4) ausgesprochenen Sätze. Bei einem geneigt gegen die Axe einfallenden, unter sich parallelen Strahlenbüschel zielt nämlich der Hauptstrahl auf den **ersten Knotenpunkt** 𝔊, und tritt so aus, als käme er aus dem **zweiten Knotenpunkte** 𝔊′. Ebenso zielt von dem Strahlenbüschel, der von einem seitlich von der Axe und in unendlicher Entfernung **hinter** dem Systeme gelegenen Punkte ausgeht, **ein** Strahl, der Hauptstrahl, gegen den zweiten Knotenpunkt 𝔊′, und tritt dann so aus, als käme er aus dem ersten Knotenpunkte 𝔊. Es bilden also in diesem Falle nicht die

Hauptpunkte, sondern zwei neu auftretende, die beiden Knotenpunkte, die Richtungspunkte für die Hauptstrahlen, so dass Object und Bild von den Knotenpunkten aus betrachtet unter gleichem Winkel erscheinen.

Fig. 13.

Die Lage der Knotenpunkte ist immer zu finden, wenn die Brennpunkte und Hauptpunkte gegeben sind. Die Entfernung des ersten Knotenpunktes vom ersten Brennpunkte ist nämlich gleich der zweiten Brennweite (also $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \mathfrak{E}'\mathfrak{F}'$) und die Entfernung des zweiten Knotenpunktes gleich der ersten Brennweite (also $\mathfrak{F}'\mathfrak{G}' = \mathfrak{E}\mathfrak{F}$).

Ein Linsensystem ist vollkommen bestimmt, d. h. man kann für jeden beliebigen Objectpunkt den durch das System entworfenen Bildpunkt finden, wenn die Brennpunkte und Hauptpunkte gegeben sind; diese vier Punkte nennt man die Fundamentalpunkte des Systems.

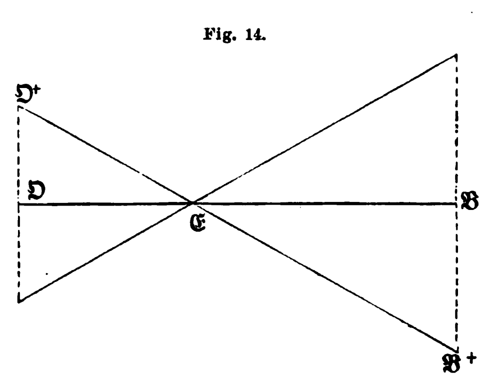
§ 2. Bilder einer Camera mit unendlich kleiner Oeffnung.

Bevor wir mit Hülfe der Fundamentalpunkte für verschiedene Linsensysteme die den Objecten zugehörigen Bilder aufsuchen, betrachten wir noch den Fall, dass Bilder erzeugt werden, ohne dazu ein Linsensystem zu benützen. Wir gewinnen dadurch eine Orientirung über den Zusammenhang von Bild und Object, welche wir dann bei der Betrachtung der von Linsensystemen erzeugten Bilder verwerthen können.

Wir nehmen an, dass an irgend einer Stelle eine Blendung aufgestellt sei, welche eine unendlich kleine Oeffnung besitze. Die zur Blendung senkrechte Linie wollen wir als Axe bezeichnen. Der Schnittpunkt der Axe mit der Blendung hat die Eigenschaft, dass alle von irgend welchen Objectpunkten ausgehenden und ihn durchlaufenden Strahlen nur Hauptstrahlen sind, welche also ungebrochen weitergehen. Dieser Punkt ist demnach der Kreuzungspunkt aller durch das System gehenden Strahlen, die alle Hauptstrahlen sind. Unser einfacher, aus Blendung mit unendlich kleiner Oeffnung bestehender Apparat kann als eine Camera obscura betrachtet werden, welche jedoch ohne Linse und mit so kleiner Oeffnung ausgeführt ist, dass in jeder Richtung nur ein Strahl die Blendungsöffnung durchdringt. Diese Camera besitzt geringste Helligkeit und hat die merkwürdige Eigenthümlichkeit, dass für irgend ein zur Axe senkrechtes Object in jeder beliebigen hinter der Blendung gelegenen und zur Axe senkrechten Ebene ein scharfes und vollkommen richtiges Bild entworfen wird. Es ist klar, dass alle vor der Blendung gelegenen Objecte gleichzeitig in jeder hinter der Blendung befindlichen senkrechten Ebene Bilder erzeugen. Bezeichnen wir als Tiefe des Bildes die Eigenschaft, Objecte, die in verschiedenen Ebenen liegen, in einer Ebene scharf abzubilden, so können wir von unserer Camera aussagen, dass sie Bilder von unendlicher Tiefe besitze. Die Grösse der Bilder ist direct hinter der Blendung unendlich gering, und wächst proportional mit der Entfernung der Bildebene von der

Blendung. Von einem Vereinigungspunkte der Strahlen kann man bei dieser Camera nicht sprechen, da zu jedem Bildpunkte nur ein Strahl gehört; man kann aus dem gleichen Grunde auch nicht von einem Brennpunkte oder einer Brennweite reden.

Fig. 14.



Die Vergrösserung, d. h. das Grössenverhältniss von Bild zu Object ist wie aus Fig. 14 zu entnehmen, bedingt durch die gewählten Entfernungen der Object- und Bildebene von der Blendung. Wir bezeichnen die Entfernung der Blendung von dem Objecte, in der Richtung der Axe gemessen, — die Objectweite — mit $O (\mathfrak{O}\mathfrak{C})$, die Bildweite mit B $(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$, und zählen diese Grössen von der Blendung aus in der Richtung des einfallenden Lichtes positiv. Ferner bezeichnen wir die Entfernungen der zusammengehörigen Object- und Bildpunkte von der Axe aus, die Object- und Bildgrössen, mit O^* $(\mathfrak{O}\mathfrak{O}^*)$ und B^* $(\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*)$, es sind dieselben von der Axe aus in der Richtung nach oben positiv, und nach unten negativ zu nehmen. Nach der Figur 14 ist sodann:

$$\frac{B^*}{O^*} = \frac{B}{O} = v,$$

wobei wir mit v das Verhältniss von Bild- zu Objectgrösse bezeichnen. Aus der Gleichung folgt, dass so lange B grösser als O bleibt, das Bild grösser als das Object, also v grösser als 1 ist; dass ferner, wenn B gleich O wird, das Bild die gleiche Grösse wie das Object hat und v gleich 1 ist, (natürliche Grösse des Bildes); und dass endlich, wenn B kleiner als O wird, das Bild kleiner als das Object und v daher kleiner als 1 wird.

§ 3. Bilder eines Linsensystems mit Kernpunkt.

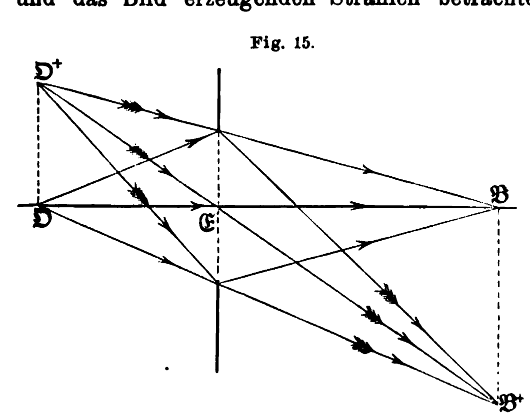
Eine Camera, wie wir sie im Vorausgehenden angenommen haben, würde die Forderungen der Praxis an das zu entwerfende Bild vollkommen erfüllen, wenn nicht die Helligkeit der Bilder eine zu geringe wäre, da ja die einzelnen Bildpunkte nur durch einen Strahl gebildet sind. Wollen wir hellere Bilder hervorrufen, so müssen wir die Bedingung, dass die Blendungsöffnung nur einen Strahl durchlässt, fallen lassen. Es verlieren aber dann die Bilder ihre Schärfe, weil die von einem unendlich entfernten Objectpunkte ausgehenden und die Blendungsöffnung durchdringenden Strahlen parallel bleiben, und deshalb keine Bilder erzeugen können. Diese anfänglich parallelen Strahlen können wir jedoch durch Brechung convergirend machen, was wir durch Benützung eines Linsensystems erreichen.

Wir wählen nun zuerst ein Linsensystem, bei welchem die beiden Hauptpunkte zusammenfallen, was z. B. bei einem unendlich dünnen

Linsensystem oder auch einer Kugel der Fall ist. Den gemeinschaftlichen Hauptpunkt bezeichnen wir als **Kernpunkt** und die zur Axe senkrechte und durch den Kernpunkt gehende Ebene als **Kernpunktsebene**. Gleichzeitig nehmen wir an, dass um helle Bilder zu gewinnen, die mit der Kernpunktsebene zusammenfallende Blendung eine wenn auch immerhin noch kleine, doch so grosse Oeffnung besitze, dass sie von einem Strahlenbüschel durchsetzt werden kann. Bei diesem Linsensysteme fallen von den vier Fundamentalpunkten die beiden Hauptpunkte zusammen in einen Punkt, nämlich in den Kernpunkt, es werden also, um das System zu bestimmen, noch die beiden Brennpunkte gegeben sein müssen, oder da wir ein Linsensystem voraussetzen, für welches das erste und letzte Medium identisch, so ist nur die für beide Brennpunkte gleiche Entfernung von dem Kernpunkte zu kennen. Das Linsensystem ist somit vollkommen bestimmt, wenn der Kernpunkt und die Brennweite des Systems gegeben ist. Durch den Kernpunkt ist die Lage, durch die Brennweite der **Maassstab** des Systems gegeben.

Es ist sofort klar, dass bei unserem Linsensysteme die Hauptstrahlen den gleichen Verlauf wie bei der oben angenommenen Camera haben; denn es werden die durch den Kernpunkt einfallenden Strahlen ungebrochen durch das System gehen, und so den Objectpunkt mit seinem zugehörigen Bildpunkte geradlinig verbinden. Alle übrigen gleichzeitig mit einem Hauptstrahle von einem Objectpunkte ausgehenden Strahlen schneiden sich, nachdem sie das System durchlaufen, wieder auf dem Hauptstrahle. Man kann somit die austretenden Hauptstrahlen als das Gerippe der austretenden und das Bild erzeugenden Strahlen betrachten; es legen sich dann um jeden der Hauptstrahlen die anderen von dem gleichen Objectpunkte kommenden Strahlen, und erzeugen, indem sie den Hauptstrahl in der Bildebene schneiden, dort den Bildpunkt. In der Fig. 15 sind für einen Objectpunkt $\mathfrak{O}$ in der Axe und einen seitlich von derselben gelegenen $\mathfrak{O}^*$ je drei einfallende und die zugehörigen austretenden Strahlen gezeichnet. Während bei der früher betrachteten Camera weder Vereinigungspunkte noch Brennpunkte und Brennweiten vorkommen, treten diese bei dem nun betrachteten Linsensysteme auf; denn wir haben eben gesehen, dass alle von einem Objectpunkte ausgehenden Strahlen nach dem Durchlaufen des Systems in einem Punkte sich vereinigen. Ist hierbei der Objectpunkt in der Axe, jedoch in unendlicher Entfernung vor dem Kernpunkte, so vereinigen sich die austretenden Strahlen in dem Brennpunkte und die Entfernung derselben von dem Kernpunkte ist die Brennweite. Der Kernpunkt hat deshalb für das angenommene Linsensystem nicht nur die Bedeutung des Kreuzungspunktes

Fig. 15.

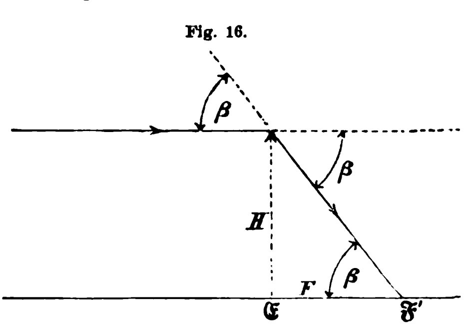


aller Hauptstrahlen, sondern auch die des Anfangspunktes der Brennweiten.

Das von uns im Vorausgehenden charakterisirte Linsensystem kann hinsichtlich der Ablenkung der einfallenden Strahlen verschieden wirken, weshalb wir die Ablenkung durch dasselbe eingehender betrachten wollen.

Es sei in Fig. 16 $\mathfrak{C}\mathfrak{F}'$ die Brennweite eines Linsensystems, so wird, wie wir früher gesehen, ein zur Axe parallel einfallender Strahl seinen Weg scheinbar bis zur Kernpunktsebene fortsetzen und hier so abgelenkt werden, dass er den zweiten Brennpunkt $\mathfrak{F}'$ trifft. Den Winkel, welchen der in das System parallel zur Axe an dem Rande der Oeffnung einfallende Strahl mit dem entsprechenden aus dem System austretenden Strahle bildet, also β, nennen wir den Oeffnungswinkel des Systems.

Fig. 16.



Dieser Oeffnungswinkel zählt vom einfallenden Strahle aus nach dem rückwärts verlängerten gebrochenen Strahle hin, und ist nach oben positiv, nach unten negativ zu nehmen, wobei vorausgesetzt ist, dass das Auge aus dem Schnittpunkte beider Strahlen gegen das einfallende Licht sieht. Einerseits ist der Oeffnungswinkel gleich dem Ablenkungswinkel β des parallel einfallenden Strahles; dieser ist wie alle Ablenkungswinkel von dem einfallenden Strahle nach dem gebrochenen Strahle zu zählen und gegen die Axe hin positiv, von der Axe weg negativ. Andrerseits ist der Oeffnungswinkel auch gleich dem Winkel β, welchen der ursprünglich parallel zur Axe einfallende Strahl nach seinem Austritt im Brennpunkte mit der Axe bildet. Bezüglich des Vorzeichens dieses Winkels ist zu beachten, dass wenn das Auge aus dem Schnittpunkte des Strahles mit der Axe in der Richtung gegen das einfallende Licht sieht, der Winkel des Strahles von der Axe aus nach oben positiv, nach unten negativ zu nehmen ist. Nach Fig. 16 genügt dann der Winkel β der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{F},$$

wobei H die Höhe des von dem einfallenden Strahle getroffenen Punktes über der Axe bedeutet, und von der Axe aus nach oben positiv, nach unten negativ ist. Nach unserer Voraussetzung muss der Winkel β so klein sein, dass für seine Tangente der Winkel gesetzt werden darf, es wird deshalb:

$$\beta = \frac{H}{F};$$

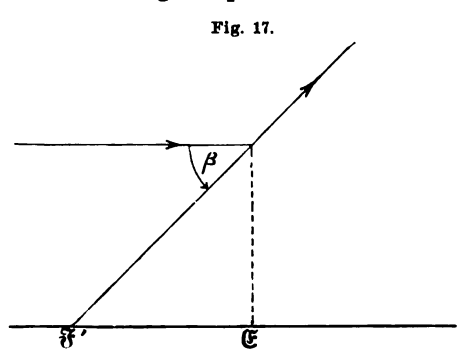
woraus auch folgt, dass H eine gegen F kleine Grösse sein muss.

Nehmen wir für verschiedene Linsensysteme immer den gleichen Durchmesser des einfallenden Strahlenbüschels, also auch die gleiche aber gegen F kleine Einfallshöhe H, so ist β eine zu F umgekehrt proportionale Grösse. Der Winkel β misst die Helligkeit des Systemes; diese kann wie auch das Gesichtsfeld nur klein sein, wegen der eingeführten Be-

schränkungen. Ist der Winkel β bekannt, so muss noch H oder F gegeben sein, damit das System in Bezug auf Maassstab und Helligkeit präcisirt und hierdurch vollkommen bestimmt sei.

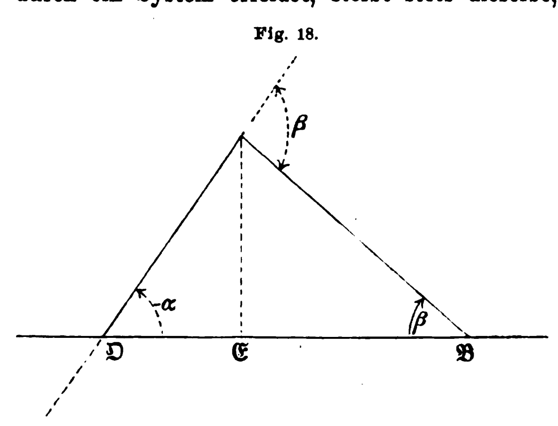
Die Ablenkung eines parallel zur Axe einfallenden Strahles kann zur Axe erfolgen wie in Fig. 16, dann heisst das System ein positives. Die Ablenkung der parallel zur Axe einfallenden Strahlen kann aber auch wie in Fig. 17 von der Axe erfolgen, dann heisst das System ein negatives. Im letzteren Falle geht der an der gemeinschaftlichen Hauptebene abgelenkte Strahl so weiter, als ob er von einem Punkte $\mathfrak{F}'$ käme, welcher vor der Kernpunktsebene gelegen ist. Zwei gleich starke Systeme, für welche also die absoluten Werthe der Winkel β einander gleich sind, können jedoch hinsichtlich des Vorzeichens von β sich unterscheiden; das eine der Systeme ist dann positiv, das andere negativ. Bei dem positiven Systeme wird ein in der Höhe H einfallender, zur Axe paralleler Strahl um den Winkel $+\beta$ (zur Axe), bei dem negativen Systeme ein gleich einfallender Strahl um den Winkel $-\beta$ (von der Axe) abgelenkt, und es ist nach der früher angenommenen Bezeichnung für das positive System die Brennweite gleich $+F$ und für das negative System gleich $-F$.

Fig. 17.



Die Ablenkung β, welche ein in beliebiger Höhe H einfallender Strahl durch ein System erleidet, bleibt stets dieselbe, gleich β, auch wenn der Strahl nicht parallel zur Axe einfällt, wenn er also von irgend einem in der Axe und in endlicher Entfernung vor dem Kernpunkte gelegenen Objectpunkte ausgeht. Es wird z. B. ein Strahl, welcher von einem beliebigen in der Axe gelegenen Objectpunkte $\mathfrak{O}$ (Fig. 18) ausgeht, und die Kernpunktsebene in der Höhe H trifft, an dieser Ebene scheinbar so abgelenkt, dass er die Axe in dem Bildpunkte $\mathfrak{B}$ schneidet. Die totale Ablenkung ist ebenso gross wie die Ablenkung, welche der parallel zur Axe in gleicher Höhe einfallende Strahl erfährt, also gleich β. Es bestimmt somit bei einem Systeme mit Kernpunkt der Winkel β, der für eine Höhe H gegeben ist, die Leistung dieses Systems vollkommen; denn β ist für irgend einen in der angenommenen Höhe einfallenden Strahl das Maass der Ablenkung

Fig. 18.



durch das System, und er bestimmt deshalb die Richtung des dem einfallenden Strahle entsprechenden austretenden Strahles.

Endlich wollen wir noch zeigen, dass wenn für unser System der Oeffnungswinkel und die Oeffnung, oder wenn die Brennweite gegeben sind, für jedes Object das von dem System entworfene Bild gefunden werden kann.

Wir bezeichnen mit α den Winkel des einfallenden Strahles mit der Axe, und mit α' den Winkel des austretenden Strahles mit der Axe. Bezüglich des Vorzeichens dieser Winkel ist zu beachten, dass wenn das Auge aus dem Schnittpunkte des Strahles mit der Axe in der Richtung gegen das einfallende Licht sieht, der Winkel des Strahles von der Axe aus nach oben positiv und nach unten negativ zu nehmen ist. In unserer Zeichnung ist deshalb α negativ und ebenso nach unserer früheren Annahme auch die Objectweite O ($\mathfrak{C}\mathfrak{A}$) negativ, dagegen α' und die Bildweite B ($\mathfrak{C}\mathfrak{B}$) positiv.

Aus der Figur 18 ergiebt sich sofort:

$$\beta = -\alpha + \alpha'.$$

Da nach unserer Voraussetzung die Winkel α, α' und β so klein sind, dass man für die Tangenten die Winkel setzen darf, so ist:

$$\beta = \frac{H}{F}; \quad -\alpha = \frac{H}{-O}; \quad \alpha' = \frac{H}{B},$$

also, wenn diese Werthe in die obige Gleichung eingesetzt werden:

$$\frac{H}{F} = \frac{H}{B} - \frac{H}{O},$$

und wenn man die beiden Seiten der Gleichung mit H dividirt:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{B} - \frac{1}{O}.$$

Diese Gleichung kann dazu benützt werden, eine der drei Grössen zu berechnen, wenn die beiden anderen bekannt sind. Es ist nämlich:

$$F = \frac{OB}{O - B},$$

$$O = \frac{FB}{F - B},$$

und

$$B = \frac{FO}{F + O}.$$

Wir können aber ferner aus dieser Gleichung noch einige wichtige Sätze ableiten.

1) Bild und Object können mit einander vertauscht werden; denn wenn wir das Licht in entgegengesetzter Richtung auf das Linsensystem einfallen lassen, geht die Gleichung über in: $\frac{1}{F} = \frac{1}{O} - \frac{1}{B}$; es ersetzt somit dann die Objectweite O die frühere Bildweite B, und umgekehrt.

2) Object und Bild können auf verschiedenen Seiten der Kernpunktsebene sein, z. B. der Objectpunkt vor und der Bildpunkt hinter dem Kernpunkte, oder sie können auf gleicher Seite desselben liegen. Im ersten

Falle sind die Bilder **reell**, d. h. die austretenden Strahlen schneiden sich wirklich in dem Bildpunkte; im zweiten Falle sind die Bilder **virtuell**, d. h. die austretenden Strahlen schneiden sich nicht, sondern gehen so weiter, als ob sie von dem Bildpunkte herkämen. Ob das Bild reell oder virtuell ist, können wir auch daran erkennen, ob die beiden Winkel α und α' verschiedenes oder ob sie gleiches Vorzeichen haben; denn ersteres entspricht dem Falle, dass Object und Bild auf verschiedener Seite, und letzteres, dass sie auf gleicher Seite der Kernpunktsebene liegen.

3) Die gegenseitige Lage von Bild und Object ist durch die erwähnte Gleichung vollkommen gegeben. Betrachten wir hier nur einige specielle Fälle.

Das Linsensystem sei ein positives und das Object vor der Kernpunktsebene, so ist F positiv und O negativ, dann wird

$$B = -\frac{FO}{F-O};$$

es bleibt danach B positiv, d. h. das Bild reell, so lange O grösser als F; dagegen wird B negativ, das Bild also virtuell, wenn O kleiner als F. In dem speciellen Falle, wenn $B = -O$ wird, findet man $-O = B = 2F$. Bild und Object haben also gleiche Entfernung von der Kernpunktsebene, von der sie um die doppelte Brennweite abstehen.

Ist das Linsensystem ein negatives und das Object wieder **vor** der Kernpunktsebene angenommen, so sind F und O negativ, und es wird: $B = -\frac{FO}{F+O}$, also ist B immer negativ, die Bilder sind immer virtuell.

4) Da das Object von dem Kernpunkte aus stets unter gleichem Winkel erscheint wie das Bild, so ist das Grössenverhältniss zwischen Object und Bild durch das Verhältniss von Objectweite O und Bildweite B bestimmt; es ist nämlich, wie aus Fig. 15 ersichtlich:

$$\frac{-O}{O^*} = \frac{B}{-B^*}$$

oder:

$$\frac{-B^*}{O^*} = \frac{B}{O},$$

und das Bildgrössenverhältniss: $v = \frac{B^*}{O^*} = \frac{B}{O}$.

Diese Gleichung kann man auch in der Form $v = \frac{B^*}{O^*} = \frac{\alpha'}{\alpha}$ schreiben, weil nach dem Früheren $\frac{B}{O} = \frac{\alpha'}{\alpha}$ ist.

So lange B dem absoluten Werthe nach grösser als O, können wir von einer Vergrösserung des Bildes gegen das Object reden; wenn dagegen B kleiner als O ist, so wird das Bild kleiner als das Object; endlich wenn B gleich O (also nach Früherem gleich $2F$) wird, hat das Bild die gleiche Grösse mit dem Object (natürliche Grösse des Bildes).

Die vorausgehenden Sätze über Object und Bild zusammenfassend erhalten wir:

a. Für ein positives System.

1) Das Object ist in unendlicher Entfernung vor dem Kernpunkte, sein reelles unendlich verkleinertes Bild liegt im zweiten Brennpunkte.

2) Das Object rückt aus unendlicher Entfernung gegen den Kernpunkt bis zu einem Abstande von demselben, der noch etwas grösser als zwei Brennweiten ist, dann rückt sein reelles verkleinertes Bild aus dem zweiten Brennpunkte von dem Kernpunkte weg bis zu einer Entfernung, die noch etwas kleiner als zwei Brennweiten bleibt.

3) Das Object gelangt in die Entfernung gleich der doppelten Brennweite, sein reelles gleich grosses Bild liegt ebenfalls in der doppelten Brennweite, aber hinter dem Kernpunkte.

4) Das Object liegt vor dem Kernpunkte in einer Entfernung, welche kleiner als die doppelte und grösser als die einfache Brennweite ist, sein reelles vergrössertes Bild liegt ausserhalb der doppelten Brennweite hinter dem Kernpunkte.

5) Das Object kommt in den ersten Brennpunkt, sein reelles unendlich grosses Bild ist in unendlicher Entfernung hinter dem Kernpunkte.

6) Das Object liegt zwischen dem ersten Brennpunkte und dem Kernpunkte, sein virtuelles vergrössertes Bild liegt vor dem Kernpunkte zwischen Unendlich und dem Objecte.

7) Rückt das Object von dem ersten Brennpunkte immer mehr gegen die Kernpunktsebene, so rückt auch sein Bild aus Unendlich vor dem Kernpunkte immer näher an das Object und erreicht dasselbe, wenn beide mit der Kernpunktsebene zusammenfallen; das Bild wird an Grösse immer mehr dem Objecte gleich.

b. Für ein negatives System.

1) Das Object ist in unendlicher Entfernung vor dem Kernpunkte, sein virtuelles unendlich kleines Bild liegt vor dem Kernpunkte in einer Entfernung gleich der Brennweite.

2) Das Object liegt vor dem Kernpunkte in einer Entfernung gleich der Brennweite, sein virtuelles Bild von halber Grösse des Objectes liegt in einer Entfernung gleich der halben Brennweite vor dem Kernpunkte.

3) Das Objekt rückt immer mehr in die Kernpunktsebene, sein virtuelles Bild rückt von der gleichen Seite ebenfalls in diese Ebene, sein virtuelles Bild wird dabei an Grösse immer mehr dem Objecte gleich.

Setzt man in der Gleichung: $\frac{1}{F} = \frac{1}{B} - \frac{1}{O}$ die Brennweite gleich Eins, oder was das Gleiche ist, nimmt man die Länge der Brennweite als Einheit für die Object- und Bildweite, so wird die Gleichung die einfachere Form

$$1 = \frac{1}{B} - \frac{1}{O}$$

annehmen. Ist nun ausserdem noch die Vergrösserung, also das Verhältniss $\frac{B}{O} = v$ bekannt, so lassen sich immer der Object- und Bildabstand, vom Kernpunkte aus, also die Grössen O und B bestimmen; denn es ist:

$$B = \frac{1-v}{1}, \quad \text{und} \quad O = \frac{1-v}{v}.$$

Die Beilage III ist eine Tabelle, welche für die Brennweite = 1 und verschiedene Grössenverhältnisse von Object und Bild, die Object- und Bildabstände

giebt. Sie wurde gerechnet, um bei photographischen Objectiven Abstand des Objectes und Auszuglänge der Camera bestimmen zu können, sobald man die Brennweite des zur Verwendung kommenden Apparates und das für das Bild geforderte Grössenverhältniss (gegen das Object) kennt. Die in der Tafel für Object und Bildabstand gegebenen Zahlen sind, wie schon erwähnt, in der Einheit gleich der Brennweite ausgedrückt. Wenn wir daher diese Zahlen mit der in der gewünschten Einheit (z. B. Millimeter) ausgedrückten Brennweite des Apparates multipliciren, so erhalten wir die Object- und Bildweite in der gleichen Einheit wie die Brennweite.

Bei den vorausgehenden Betrachtungen haben wir zweierlei Formeln benützt, die einen enthielten Winkel, die andern Entfernungen. Es waren dies einerseits die Formeln:

$$\beta = -\alpha + \alpha', \quad \text{und} \quad v = \frac{\alpha'}{\alpha};$$

wobei zu beachten ist, dass sie für eine gegebene Höhe gültig sind. Andererseits haben wir die Formeln abgeleitet:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{B} - \frac{1}{O}, \quad \text{und} \quad v = \frac{B}{O}, \quad \text{oder} \quad v = \frac{F}{O + F}.$$

Es ist klar, dass bei den Berechnungen die Formeln, welche die Winkel enthalten, im Allgemeinen zweckmässiger sind, als diejenigen mit den Entfernungen. In diesen sind ja die reciproken Werthe der gegebenen und gesuchten Grössen, während in jenen diese Grössen selbst enthalten sind.

Wir heben, nochmals zusammenfassend, hervor, dass zur Feststellung eines Linsensystems dreierlei erforderlich ist: 1) die Brennweite (Maassstab), 2) die Oeffnung (Helligkeit) und 3) der Bilddurchmesser (Gesichtsfeld); diese drei Werthe zusammen bilden die Leistung eines Linsensystems.

§ 4. Bilder eines Doppelsystems, dessen einzelne Theile Systeme mit Kernpunkten sind.

Es kann der Fall vorkommen, dass man aus zwei Linsensystemen ein neues combinirtes System bildet; wenn nun der Maasstab der einzelnen Systeme bekannt ist, soll man den Maasstab des Gesammtsystems finden. Hierbei können zwei Fälle auftreten: es können nämlich die Kernpunktsebenen in eine Ebene zusammenfallen, oder sie befinden sich in einem bestimmten Abstande, den wir mit C_1 bezeichnen wollen, und der in der Richtung des einfallenden Lichtes positiv sein soll.

1) Die Kernpunktsebenen der Einzelsysteme fallen in eine Ebene; es wäre dies z. B. dann der Fall, wenn sowohl die Einzelsysteme, wie das Gesammtsystem unendlich dünn sind.

Bezeichnet man den Oeffnungswinkel des ersten Einzelsystems für die Einfallhöhe H_0 (Fig. 19) mit β_0, den des zweiten Systems bei der Einfallshöhe $H_2 = H_0$ mit β_2, und endlich den für das Gesammtsystem bei der Einfallshöhe $H_{0,2} = H_0$ mit $\beta_{0,2}$. Die Einfallshöhen H_0, H_2 und $H_{0,2}$ sind einander gleich, weil dieselben in der gleichen Ebene sich be-



finden. Man erkennt sofort, dass die totale Ablenkung des Gesammtsystems sich aus der Ablenkung der Einzelsysteme zusammensetzt, dass also

$$\beta_{0,2} = \beta_0 + \beta_2;$$

oder wenn man beachtet, dass

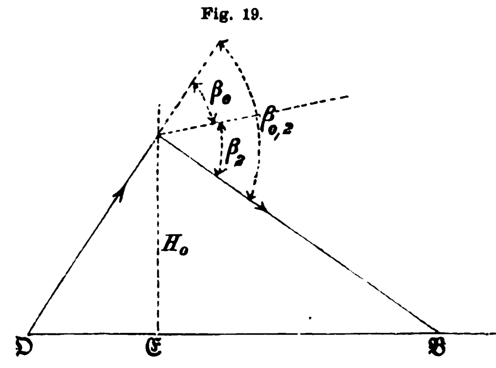
$$\beta_{0,2} = \frac{H_{0,2}}{F_{0,2}}, \quad \beta_0 = \frac{H_0}{F_0} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{H_2}{F_2},$$

so ist:

$$\frac{1}{F_{0,2}} = \frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_2}.$$

Die zuerst aufgestellte Winkelgleichung, sowie die zweite für die Brennweiten gültige Gleichung, gestatten den Maasstab des Gesammtsystems aus dem der Einzelsysteme zu bestimmen.

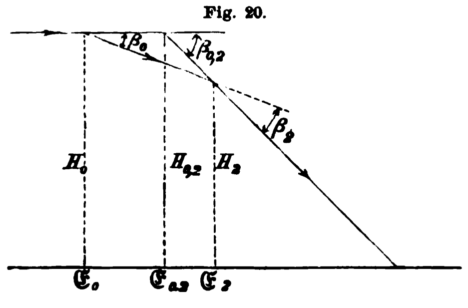
Fig. 19.



Es sei hier bemerkt, dass die den Grössen β, H, F und C beigesetzten Indices übereinstimmend mit den später bei den Berechnungen benutzten und dann näher begründeten Indices sind.

2) Die Kernpunktsebenen der Einzelsysteme befinden sich in der Entfernung C_1 von einander. Die totale Ablenkung des Gesammtsystems ist auch hier gleich der Summe der Ablenkungen der Einzelsysteme; es sind jedoch die Höhen, in welchen die Ablenkungen der Einzelsysteme eintreten, verschieden, was wir dann bei den Formeln zu berücksichtigen haben. Es ist:

Fig. 20.



$$\beta_{0,2} = \beta_0 + \beta_2.$$

Ferner ist:

$$\beta_{0,2} = \frac{H_{0,2}}{F_{0,2}}; \quad \beta_0 = \frac{H_0}{F_0};$$

$$\beta_2 = \frac{H_2}{F_2}; \quad \text{und}$$

$H_{0,2} = H_0$; dagegen nach der Fig. 20

$$\frac{H_0 - H_2}{C_1} = \beta_0,$$

oder

$$H_2 = H_0 - \beta_0 C_1.$$

Setzen wir diesen Werth von H_2 ein, so erhalten wir:

$$\beta_2 = \frac{H_0 - \beta_0 C_1}{F_2} = \frac{H_0}{F_2} - \frac{H_0 C_1}{F_0 F_2},$$

somit

$$\frac{H_0}{F_{0,2}} = \frac{H_0}{F_0} + \frac{H_0}{F_2} - \frac{H_0 C_1}{F_0 F_2},$$

und nach Division mit H_0

$$\frac{1}{F_{0,2}} = \frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_2} - \frac{C_1}{F_0 F_2}.$$

Hierdurch ist der Maasstab des Gesammtsystems durch denjenigen der Einzelsysteme und ihren Abstand gegeben.

Die Zusammensetzung von drei oder mehreren Systemen zu einem Gesammtsysteme wird nur selten vorkommen. Die Bestimmung des Maasstabes eines Gesammtsystems aus denen der Einzelsysteme bietet aber keine Schwierigkeiten, indem wir immer je zwei Einzelsysteme zu einem Gesammtsysteme zusammensetzen können. Es wird dann, wie leicht zu entwickeln ist, für die beiden eben betrachteten Fälle und drei Einzelsysteme:

$$\frac{1}{F_{0,4}} = \frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} \tag{1}$$

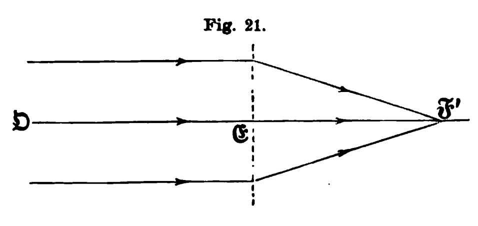
und

$$\frac{1}{F_{0,4}} = \frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} - \frac{C_1}{F_0 F_2} - \frac{C_2}{F_0 F_4} - \frac{C_2}{F_2 F_4} + \frac{C_1 C_2}{F_0 F_2 F_4}. \tag{2}$$

§ 5. Construction der Bilder eines Linsensystems mit Kernpunkt.

Wie wir im Vorhergehenden für jeden Objectpunkt den durch ein Linsensystem entworfenen Bildpunkt durch Rechnung erhalten haben, können wir dies auch durch Construction finden, und betrachten wir folgende Fälle: Es sei der Kernpunkt 𝔈, sowie die beiden Brennpunkte 𝔉 und 𝔉′ gegeben und es sollen sowohl für einen unendlich, als auch für einen endlich entfernten Objectpunkt, wenn derselbe entweder in der Axe, oder wenn er seitlich von der Axe gelegen ist, durch Construction die durch ein Linsensystem entworfenen Bildpunkte gefunden werden. Wir wenden zur Lösung dieser Aufgabe die schon entwickelten Sätze an.

Fig. 21.

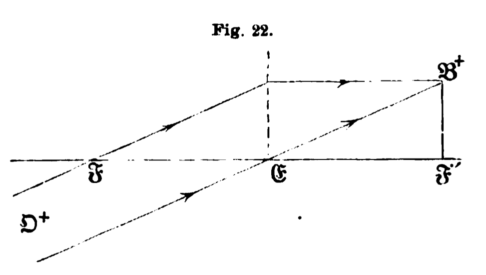


Der Bildpunkt eines unendlich entfernten in der Axe gelegenen Objectpunktes bedarf einer Construction nicht; denn alle von jenem Punkte ausgehenden Strahlen setzen, wie in Fig. 21 angegeben, ihren Weg scheinbar bis zur Kernpunktsebene fort, wo sie dann gegen den zweiten Brennpunkt hin abgelenkt werden. Der Brennpunkt 𝔉′ ist somit das gesuchte Bild des unendlich entfernten, in der Axe gelegenen Objectpunktes.

Liegt der Objectpunkt 𝔇* (Fig. 22) seitlich von der Axe, aber noch immer in unendlicher Entfernung, so setzen die von demselben ausgehenden Strahlen ihren Weg bis zur Kernpunktsebene fort und werden dann gegen einen Punkt der Brennpunktsebene abgelenkt, welchen auch der austretende Hauptstrahl trifft und welchen gleichzeitig ein durch den ersten Brennpunkt einfallender, also parallel zur Axe austretender Strahl schneidet. Der Bildpunkt wird somit gefunden, indem man die von dem Objectpunkte aus durch den Punkt 𝔈 gehende Gerade bis zu der durch den Punkt 𝔉′ auf die Axe errichteten Senkrechten verlängert; der Schnittpunkt

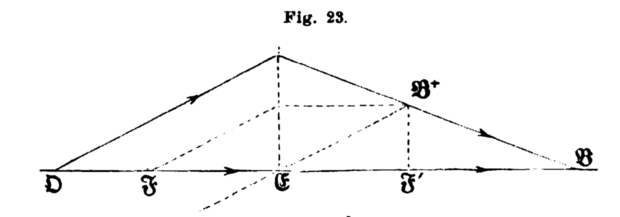
ist der Bildpunkt. Oder man zieht die von dem Objectpunkte durch 𝔉 gehende Gerade bis zur Kernpunktsebene und von hier eine zur Axe parallele Gerade; der Schnittpunkt mit der zweiten Brennpunktsebene ist ebenfalls der gesuchte Bildpunkt.

Fig. 22.



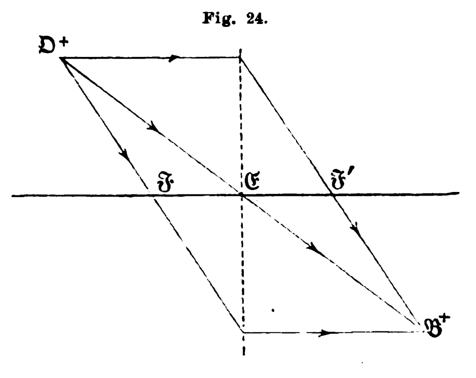
Der Objectpunkt 𝔒 Fig. 23 soll in der Axe, nun aber in endlicher Entfernung sich befinden. Die von diesem Objectpunkte ausgehenden Strahlen setzen ihren Weg bis zur Kernpunktsebene fort und werden nun gegen den Bildpunkt hin abgelenkt. Die Lage zweier austretender Strahlen liefert durch ihren Schnittpunkt den gesuchten Bildpunkt. Da der Axenstrahl ungebrochen weiter geht,

Fig. 23.



ist nur noch für einen zweiten einfallenden Strahl sein entsprechender austretender Strahl zu finden. Zu diesem Zwecke können wir einen beliebigen, durch 𝔒 gehenden Strahl auswählen und denselben vorerst als einen von einem unendlich entfernten, seitlich von der Axe gelegenen Objectpunkte ausgehenden Strahl ansehen, so muss er mit den parallelen durch 𝔉 und 𝔈 gehenden Strahlen nach der Ablenkung den gleichen Bildpunkt 𝔅* treffen; damit ist nun die Lage des austretenden Strahles gefunden, welcher dem ausgewählten, durch 𝔒 gehenden Strahle entspricht; dieser austretende Strahl bis zur Axe verlängert, liefert den gesuchten Bildpunkt 𝔅.

Fig. 24.



Wenn endlich der Objectpunkt 𝔒* (Fig. 24) **seitlich** von der Axe und gleichzeitig in endlicher Entfernung sich befindet, so können drei von demselben ausgehende Strahlen zur Construction benutzt werden. Der parallel zur Axe einfallende Strahl wird an der Kernpunktsebene so abgelenkt, dass er durch den zweiten Brennpunkt geht; der durch den Kernpunkt einfallende geht ungebrochen weiter; und endlich der durch den ersten Brennpunkt einfallende wird an der Kernpunktsebene so abgelenkt, dass er parallel zur Axe austritt. Der

Schnitttpunkt der drei austretenden Strahlen ist der Bildpunkt 𝔅*. Da der Schnittpunkt von zwei Strahlen schon den Bildpunkt liefert, dient der dritte Strahl als Controle.

§ 6. Linsensystem mit getrennten Hauptpunkten.

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Falle über, dass bei dem zu betrachtenden Linsensysteme die beiden Hauptebenen nicht zusammenfallen, wobei also die vier Fundamentalpunkte getrennt auftreten und die Kernpunktsebene durch zwei Hauptebenen ersetzt wird, die eine durch den ersten Hauptpunkt senkrecht zur Axe gelegte Ebene ist die erste Hauptebene, die andere, in welcher der zweite Hauptpunkt sich befindet, ist die zweite Hauptebene. Dadurch, dass die Hauptebenen auseinander rücken, wird die Richtungsänderung der austretenden Strahlen gegen die eintretenden in keiner Weise verschieden, wie wenn das System eine Kernpunktsebene hätte; es bleibt somit das, was wir Leistung des Systemes nennen, vollkommen gleich. Dagegen werden dadurch, dass wir die beiden Hauptebenen auseinander rücken, die austretenden Strahlen in der Richtung der Axe parallel zu ihrer anfänglichen Lage verschoben, und es wird deshalb die in der Richtung der Axe gemessene Entfernung der Bilder von ihren Objecten entsprechend dem Abstande der beiden Hauptebenen grösser oder kleiner.

Bei der Berechnung eines Systems wird man im Allgemeinen nur die Leistung desselben in bestimmter Weise zu erzielen suchen, während der Abstand der beiden Hauptebenen von geringerer Bedeutung ist. Dieser Abstand der Hauptebenen wird hauptsächlich durch die Dicken der Linsen, sowie durch die Entfernung der das System bildenden Linsen bedingt und ergiebt sich demnach durch die Annahme der eben erwähnten Grössen.

§ 7. Bilder eines Linsensystems mit getrennten Hauptpunkten.

Für das Linsensystem mit getrennten Hauptpunkten werden eine Reihe von Betrachtungen, welche wir für das System mit Kernpunkt entwickelt haben, ihre volle Gültigkeit behalten; die andern dagegen müssen, da hier statt der Kernpunktsebene die beiden Hauptebenen auftreten, in einer verschiedenen Form ausgesprochen werden. Wir wollen nun nicht alle Sätze, die wir für das System mit Kernpunkt aufgestellt haben, in der für das System mit getrennten Hauptpunkten gültigen Form wiederholen, sondern uns damit begnügen, auf die Unterschiede und auf die Uebereinstimmung aufmerksam zu machen.

Bei dem Systeme mit getrennten Hauptpunkten bilden die Hauptstrahlen ebenfalls gleichsam das Gerippe für die übrigen austretenden Strahlen, es ist nur zu beachten, dass wie in Fig. 25 dargestellt, alle austretenden Strahlen um die Entfernung der beiden Hauptpunkte in der Richtung der Axe parallel zu ihrer anfänglichen Lage verschoben sind. Der Oeffnungswinkel des nun betrachteten Systems ist in gleicher Weise wie der des früheren zu definiren. Es wird nämlich der parallel zur Axe einfallende Strahl, welcher bei dem früher angenommenen Linsensysteme an der Kernpunktsebene abgelenkt wurde, jetzt ungebrochen die

erste Hauptebene kreuzen, und an der zweiten Hauptebene die Ablenkung erleiden. Dabei bleibt, wie sofort aus der Fig. 26 zu ersehen, die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{F}$$

und bei kleinem Winkel β:

$$\beta = \frac{H}{F}$$

ungeändert. In gleicher Weise, wie bei dem Systeme mit Kernpunktsebene wird auch bei Systemen mit getrennten Hauptebenen zwischen positiven und negativen Systemen zu unterscheiden sein, indem erstere der Axe parallele Strahlen zur Axe, letztere von derselben ablenken.

Es sind diese Systeme durch nebenstehende Zeichnungen Fig. 26 und 27 charakterisirt.

Die Gleichungen, welche wir bei einem Systeme mit Kernpunkt aufstellen konnten, bleiben in dem Falle, wenn die Hauptebenen getrennt auftreten, vollkommen die gleichen. Es ist nur dabei zu beachten, dass die Objectweite und die erste Brennweite von dem ersten Hauptpunkte, und die Bildweite, sowie die zweite Brennweite von dem zweiten Hauptpunkte aus zu rechnen sind. Es gelten somit auch bei dem nun betrachteten Systeme insbesondere die Gleichungen:

Fig. 25.

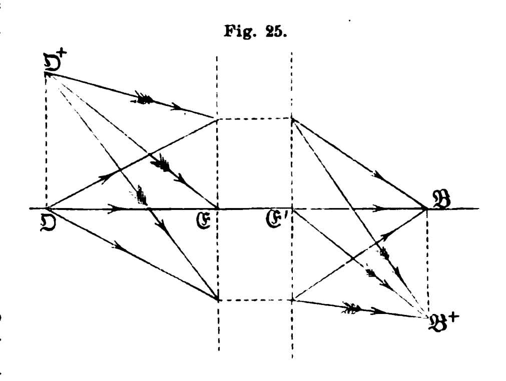


Fig. 26.

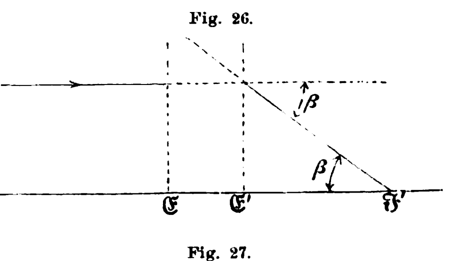


Fig. 27.

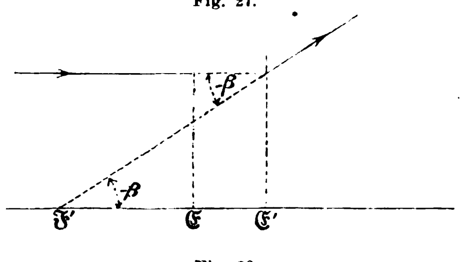
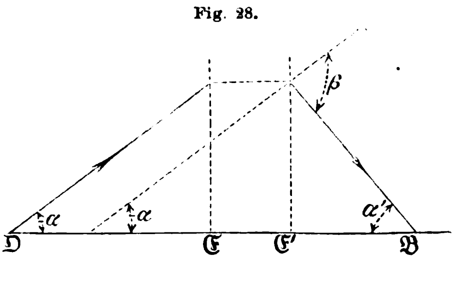


Fig. 28.



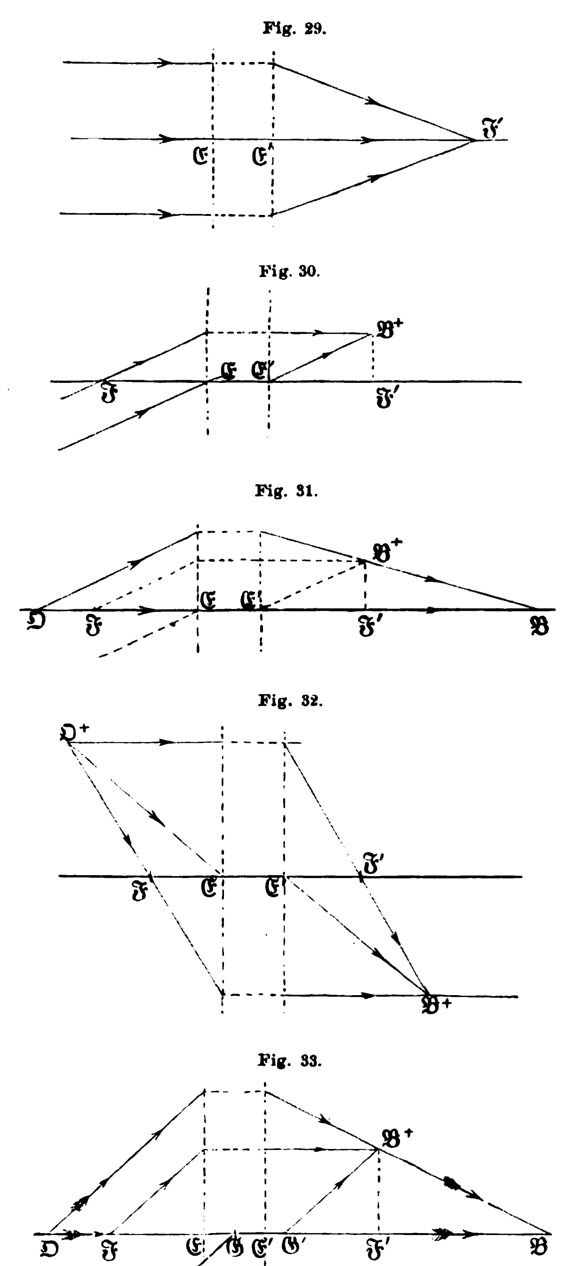
$$\beta = -\alpha + \alpha'; \quad v = \frac{\alpha'}{\alpha};$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{B} - \frac{1}{O}; \quad v = \frac{B}{O}.$$

Die Betrachtung über die Lage von Object und Bild bleibt daher, wenn man die vorher angegebenen Bedingungen berücksichtigt, auch für das neue System dieselbe. Die Zusammensetzung eines Gesammtsystems aus zwei Einzelsystemen kann ebenfalls durch die Gleichung:

$$\frac{1}{F_{0,2}} = \frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_2} - \frac{C_1}{F_0 F_2}$$

gewonnen werden; es ist nur zu beachten, dass C_1 den Abstand der zweiten Hauptebene des ersten Einzelsystems von der ersten Hauptebene des zweiten Einzelsystems bedeutet.



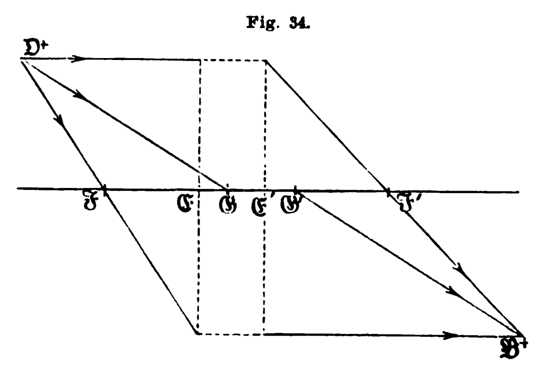
Ohne weitere Erklärung wird auch die Construction des Bildpunktes von einem unendlich entfernten, in der Axe (Fig. 29), sowie seitlich von der Axe (Fig. 30), ferner von einem endlich entfernten, in der Axe (Fig. 31) und seitlich von der Axe (Fig. 32) gelegenen Objectpunkte, für ein Linsensystem mit getrennten Hauptpunkten aus den angeführten Zeichnungen klar.

Würde das erste und letzte Medium des betrachteten Systems nicht identisch sein, so würden, wie schon früher angegeben, neben den Haupt- und Brennpunkten noch zwei Fundamentalpunkte, die beiden Knotenpunkte, auftreten.

Durch die Knotenpunkte, und nicht mehr durch die Hauptpunkte gehen bei diesem Systeme die Hauptstrahlen, während

die letzteren alle übrigen Eigenschaften, welche sie bei den früher betrachteten Systemen mit identischem ersten und letzten Medium besassen, in gleicher Weise beibehalten. Da ein System mit sechs Fundamentalpunkten für uns von geringer Wichtigkeit ist, so unterlassen wir es, die durch das Vorhandensein der Knotenpunkte bedingten Abänderungen der oben ausgesprochenen Sätze aufzuführen; es mag genügen, die Constructionen anzugeben, welche für einen in der Axe, sowie für einen seitlich von der Axe gelegenen, endlich entfernten Objectpunkt seinen zugehörigen Bildpunkt zu finden gestatten. Es sind dieselben in den Zeichnungen Fig. 33 und 34 angegeben.

Fig. 34.

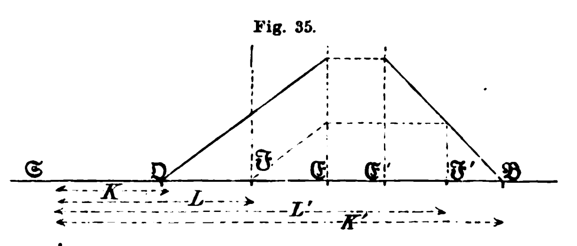


§ 8. Bestimmung der Fundamentalpunkte an bestehenden Linsensystemen.

Bei der Prüfung von Instrumenten ist es von Interesse, die Fundamentalpunkte derselben bestimmen zu können, weshalb wir die Methoden angeben wollen, welche gestatten, für irgend ein ausgeführtes System durch einfache Beobachtungen die vier, beziehungsweise sechs Fundamentalpunkte ausfindig zu machen. In dem einen Falle hat man die Lage der beiden Brennpunkte und die Brennweite zu bestimmen, die Lage der beiden Hauptpunkte ist damit gegeben; im zweiten Falle ist die Lage der beiden Brennpunkte und der beiden Hauptpunkte zu ermitteln, die Lage der Knotenpunkte ist dann gegeben.

Gauss[1]) hat folgende Beobachtungsmethode vorgeschlagen: Man misst von einem beliebigen vor dem Systeme und in der Axe desselben befindlichen Punkte 𝔖 aus die Entfernungen eines in der Axe gelegenen Objectpunktes, sowie seines zugehörigen Bildpunktes, und zwar für drei verschiedene Stellungen des Objectes. Alle Entfernungen sind in der Richtung des einfallenden Lichtes positiv zu nehmen; die Entfernungen der Objectpunkte von dem Ausgangspunkte unserer Messungen K_1, K_2 und K_3; die Entfernungen der entsprechenden Bildpunkte K_1', K_2' und K'_3 und die Entfernungen des ersten und zweiten Brennpunktes von 𝔖 aus L und L'. Die nebenstehende Construction (Fig. 35), welche für einen endlich entfernten Objectpunkt in der Axe 𝔒 seinen Bildpunkt 𝔅 giebt lässt aus den ähnlichen Dreiecken folgern, dass:

Fig. 35.



1) *Gauss* a. a. O. p. 23.

$$-\frac{O+F}{F} = \frac{F}{B-F},$$

oder

$$-(O+F)(B-F) = F^2 \quad \text{ist.}$$

Nun ist $-(O+F) = (L-K)$ und $(B-F) = (K'-L')$.

Macht man nun für drei verschiedene Entfernungen des Objectpunktes, ohne das System zu verrücken, die Beobachtungen für Object- und Bildentfernungen, so gewinnt man drei Gleichungen:

$$(L-K_1)(K_1'-L') = F^2,$$
$$(L-K_2)(K_2'-L') = F^2,$$

und

$$(L-K_3)(K_3'-L') = F^2.$$

Da die Grössen K_1, K_2, K_3, K_1', K_2' und K'_3 gemessen sind, können aus den Gleichungen die drei Unbekannten L, L' und F gerechnet werden. Man erhält:

$$L = K_1 - \frac{(K_2-K_1)(K_3-K_1)(K_2'-K'_3)}{K_0},$$

$$L' = K_1' - \frac{(K_2'-K_1')(K_3'-K_1')(K_2-K_3)}{K_0},$$

$$F^2 = \frac{(K_2-K_1)(K_3-K_1)(K_3-K_2)(K_1'-K_2')(K_1'-K_3')(K_2'-K_3')}{K_0^2}$$

wobei $K_0 = (K_3-K_2)(K_1'-K_2') - (K_2-K_1)(K'_2-K_3')$ ist.

Die Ausführung dieser Beobachtungen ist nur dann möglich, wenn das Linsensystem ein scharfes Axenbild besitzt, weil man nur dann genau die Entfernung des Bildpunktes von $\mathfrak{S}$ aus messen kann. Da nur ein positives System ein reelles Bild liefert, so ist auch nur bei diesem die angegebene Methode direct anwendbar; es lässt sich jedoch zeigen, dass auch für ein negatives System die Bestimmung der Fundamentalpunkte möglich ist. Man setze ein positives System mit dem zu bestimmenden negativen zusammen, so dass das Gesammtsystem ein reelles Bild liefert, bestimme dann die Fundamentalpunkte des Gesammtsystems und ebenso die des benützten positiven Systems, und berechne hieraus die Fundamentalpunkte des negativen Systems.

Ist bei dem Systeme, für welches wir die Fundamentalpunkte finden wollen, das erste und letzte Medium verschieden, so treten, wie wir schon angegeben, sechs Fundamentalpunkte auf, und wir können dieselben am einfachsten durch vier von Helmholtz [1]) vorgeschlagene Beobachtungen ausmitteln.

Es werden nämlich für zwei Stellungen eines Objectes sowohl die Object- und Bildentfernungen von einem beliebigen Axenpunkte aus gemessen, als auch die zugehörigen Object- und Bildgrössen beobachtet.

Da die Gleichungen gelten:

$$-\frac{F}{O} + \frac{F'}{B} = 1,$$

und

$$\frac{F}{O}\,O^* = \frac{F'}{B}\,B^*,$$

so erhält man, wenn die Entfernung des ersten und zweiten Hauptpunktes von $\mathfrak{S}$ aus mit J und J' bezeichnet wird:

---

1) *Helmholtz,* Physiol. Optik § 10, S. 78 u. ff.

$$F = J - L \quad \text{und} \quad F' = L' - J',$$

ferner

$$-O = J - K \quad \text{und} \quad B = K' - J'.$$

Die vier Gleichungen, welche man aus den Beobachtungen folgern kann, sind dann:

$$\frac{J-L}{J-K_1} + \frac{L'-J'}{K_1'-J'} = 1,$$

$$\frac{J-L}{J-K_1} O_1{}^* = \frac{J'-L'}{K_1'-J'} B_1{}^*,$$

$$\frac{J-L}{J-K_2} + \frac{L'-J'}{K_2'-J'} = 1,$$

$$\frac{J-L}{J-K_2} O_2{}^* = \frac{J'-L'}{K_2'-J'} B_2{}^*.$$

Aus diesen vier Gleichungen können die Grössen L, L', J und J' ausgemittelt werden. Man erhält

$$L = \frac{K_2 O_1{}^* B_2{}^* - K_1 O_2{}^* B_1{}^*}{O_1{}^* B_2{}^* - O_2{}^* B_1{}^*},$$

$$L' = \frac{K_1' O_1{}^* B_2{}^* - K_2' O_2{}^* B_1{}^*}{O_1{}^* B_2{}^* - O_2{}^* B_1{}^*},$$

$$J = \frac{K_1 B_1{}^*(B_2{}^* - O_2{}^*) - K_2 B_2{}^*(B_1{}^* - O_1{}^*)}{O_1{}^* B_2{}^* - O_2{}^* B_1{}^*},$$

$$J' = \frac{K_2' O_2{}^*(O_1{}^* - B_1{}^*) - K_1' O_1{}^*(O_2{}^* - B_2{}^*)}{O_1{}^* B_2{}^* - O_2{}^* B_1{}^*}.$$

Es ist klar, dass die Beobachtungen über Bildentfernung und Bildgrösse nur dann mit Genauigkeit ausgeführt werden können, wenn das System nicht allein scharfe Axenbilder, sondern auch richtige Bilder ausser der Axe liefert, da man nur in diesem Falle genau einstellen kann. Selbstverständlich kann diese Methode auch für ein Linsensystem, bei welchem das erste und letzte Medium identisch sind, benutzt werden. Es dient dann als Controle die Gleichung:

$$J - L = J' - L' = \frac{K_1 B_1{}^* B_2{}^* - K_2 B_1{}^* B_2{}^*}{O_1{}^* B_2{}^* - O_2{}^* B_1{}^*} = \frac{K_2' O_1{}^* O_2{}^* - K_1' O_1{}^* O_2{}^*}{O_1{}^* B_2{}^* - O_2{}^* B_1{}^*},$$

oder

$$F = \frac{K_1 - K_2}{\frac{O_1{}^*}{B_1{}^*} - \frac{O_2{}^*}{B_2{}^*}} = \frac{K_1' - K_2'}{\frac{B_1{}^*}{O_1{}^*} - \frac{B_2{}^*}{O_2{}^*}}.$$

III. Capitel.

Anforderungen an ein wirkliches Linsensystem und Aufzählung der zu hebenden Fehler.

§ 1. Anforderungen an ein wirkliches Linsensystem.

Wir haben bei den Betrachtungen im vorausgehenden Capitel drei Beschränkungen gemacht:

1) Dass das einfallende Licht nur von einer Farbe (monochromatisch) sei;

2) dass die durch das System gehenden Strahlen mit der optischen Axe nur so kleine Winkel bilden, dass für die Sinus und Tangenten derselben die Bogen und für die Cosinus die Einheit gesetzt werden darf;

3) dass die Radien, welche durch die Schnittpunkte der Strahlen mit den brechenden Flächen gezogen sind, mit der optischen Axe ebenfalls so kleine Winkel bilden, dass die Sinus und Tangenten durch die Bogen und die Cosinus durch Eins ersetzt werden können.

Die beiden letzten Beschränkungen sind gleichbedeutend mit der Annahme, dass der Durchmesser des zur Axe des Linsensystems parallel einfallenden cylindrischen Strahlenbüschels klein sei, und dass der von einem seitlich von der Axe gelegenen Objectpunkte ausgehende und das System durchlaufende Hauptstrahl mit der Axe einen kleinen Winkel bildet, oder das System nur sehr kleine Helligkeit und sehr kleines Gesichtsfeld besitzt.

Bei einem wirklichen Linsensysteme sind die angeführten drei Beschränkungen nicht mehr zulässig; denn wir werden im Allgemeinen nicht monochromatisches, sondern weisses Licht auf das Linsensystem einfallen lassen, sodann zur Erlangung von hellen Bildern dem vom unendlich entfernten, in der Axe gelegenen Objectpunkte kommenden cylindrischen Strahlenbüschel einen im Verhältniss zur Brennweite grossen Durchmesser geben, wodurch das Linsensystem einen grossen Oeffnungswinkel erhält, und endlich, um einen bedeutenden Theil des Objectes zu überblicken, dem Systeme ein grosses Gesichtsfeld geben. Es sei noch bemerkt, dass der Durchmesser des cylindrischen Büschels, der von einem in der Axe gelegenen unendlich entfernten Punkte ausgehend auf ein Linsensystem trifft, die wirksame Oeffnung des Systemes und zugleich die Helligkeit des Bildpunktes in der Axe bestimmt; damit nun die seitlich gelegenen Bildpunkte gleiche Helligkeit erhalten, muss gefordert werden, dass der von einem seitlich von der Axe gelegenen Objectpunkte einfallende cylindrische Büschel gleichen Durchmesser mit dem parallel zur Axe einfallenden erhalten soll.

Obwohl wir bei einem wirklichen Linsensystem die nun mehrmals angeführten Beschränkungen nicht mehr zulassen, soll dasselbe dennoch möglichst übereinstimmende Bilder mit dem idealen Systeme liefern; es sollen dieselben von gleicher Grösse, und wenn auch heller und ausgedehnter, doch ebenso correct wie die des idealen Systemes gezeichnet sein. Correct nennen wir ein Bild:

1) wenn es scharf ist, d. h. wenn alle von einem Objectpunkte ausgehenden (auch verschiedenfarbigen) Strahlen sich in e i n e m Punkte, dem zugehörigen Bildpunkte, treffen;

2) wenn es unverzerrt ist, d. h. wenn das Verhältniss der Entfernung zweier Bildpunkte zu der Entfernung ihrer entsprechenden Objectpunkte über die ganze Ausdehnung des Bildes das gleiche bleibt; es muss diese Bedingung auch für verschiedenfarbige Strahlen gefordert werden.

Die Grösse, Helligkeit und Ausdehnung der Bilder eines Linsensystems haben wir schon (auf S. 46) als die drei die Leistung eines Systems bestimmenden Grössen bezeichnet; wir wiederholen, dass zur Feststellung der Leistung eines Systems erforderlich, die Angabe: 1) der Brennweite (F),

2) der Helligkeit, welche gemessen wird durch den Quotient $\left(\frac{H}{F}\right)$, den Halbmesser des parallel zur Axe einfallenden Strahlenbüschels dividirt durch die Brennweite, und 3) den Gesichtsfeldwinkel (τ). Vollständig in Uebereinstimmung können wir bei dem wirklichen System nur die wahre Brennweite mit der Brennweite des idealen Systems bringen, wobei wir den Abstand des Hauptpunktes vom Brennpunkte für einen nahe an der Axe parallel einfallenden Strahl von mittlerer Brechbarkeit als wahre Brennweite des wirklichen Systems bezeichnen. Durch diese Annahme erhalten die Axenbilder der beiden Systeme gleiche Grösse. Wir verlangen aber ausserdem, dass trotz grosser Helligkeit und Ausdehnung der Bilder, also grosser Werthe von $\frac{H}{F}$ und τ, diese immer noch correct gezeichnet bleiben. Wenn nun das wirkliche System eine gegen die Brennweite grosse Oeffnung erhalten soll, und dennoch scharfe Bilder von demselben gefordert werden, so muss einerseits die Vereinigung der in grossem Abstande von der Axe einfallenden Strahlen im Brennpunkte erfolgen, und da wir ferner verlangen müssen, dass das System nur eine Brennweite (F) hat, so muss für die höher einfallenden Strahlen der Beginn der Ablenkung in gleichem Abstande vom Brennpunkte wie bei den Axenstrahlen stattfinden, d. h. die Anfangspunkte der Brennweiten müssen auf einer Sphäre liegen, die mit der wahren Brennweite als Radius aus dem Brennpunkte durch den Hauptpunkt beschrieben ist. Es ergiebt sich hierbei der Oeffnungswinkel durch die Gleichung: $\sin\beta = \frac{H}{F}$. Wird die Brennweite sehr lang oder die Oeffnung relativ klein, so wird die sphärische Fläche immer mehr mit einer zur Axe senkrechten Ebene zusammenfallen, und es wird: $\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{F}$. Hat das System sehr grosses Gesichtsfeld, so wird verlangt, dass sich die Hauptstrahlen im zweiten Hauptpunkte kreuzen und die um jeden Büschel gelagerten Randstrahlen auf diesem in einer Entfernung vom Hauptpunkte, die der wahren Brennweite des Systems entspricht, einander schneiden. Es liegt somit das Bild auf einer sphärischen Fläche, die mit der wahren Brennweite als Radius vom zweiten Hauptpunkte aus beschrieben wird. Der Gesichtsfeldwinkel ist demnach durch die Gleichung: $\sin\tau = \frac{H^*}{F}$ gegeben. Auch die sphärische Bildfläche nähert sich der zur Axe senkrechten Ebene mit Zunahme der wahren Brennweite und Abnahme des Winkels τ, und es wird, wenn sie mit dieser Ebene zusammenfällt: $\operatorname{tg}\tau = \frac{H^*}{F}$.

Zum Nachweise, ob ein wirkliches Linsensystem den eben ausgesprochenen Anforderungen entspricht, ist es nicht nothwendig, für alle aus dem Systeme austretenden Strahlen zu zeigen, ob sie richtig liegen; bei einer günstigen Auswahl der Strahlen werden wir nur eine geringe Zahl derselben zu betrachten haben.

Wir suchen die Bilder von zwei Objectpunkten, welche in unendlicher Entfernung vor dem Linsensysteme sich befinden, nämlich 1) für einen in der optischen Axe, und 2) für einen zweiten seitlich von der Axe gelegenen. Für den ersten genügt es, zwei einfallende weisse Strahlen, und für den

zweiten vier weisse Strahlen auszuwählen. Entsprechen diese Strahlen den an sie gestellten Anforderungen, so ist dies auch, wenigstens sehr nahe, für alle übrigen Strahlen der Fall.

1) Für den Bildpunkt in der Axe müssen wir zwei als weisses Licht eintretende Strahlen verfolgen, die parallel zur Axe, (a) der eine nahe an der Axe (Axenstrahl), (b) der andere nahe am Rande (Randstrahl) die erste Linsenfläche treffen. Bei der ersten Brechung im Linsensysteme wird das weisse Licht zerlegt, und nun müssen zwei Farben, also im Ganzen vier Strahlen, durch das System verfolgt werden. Die beiden Farben, welche wir der Betrachtung zu Grunde legen, können beliebig gewählt werden, es ist nur zu beachten, dass bei einem Systeme die gleichen Farben für die ganze Durchrechnung beibehalten werden. Wir rechnen die einzelnen Strahlen trigonometrisch durch das Linsensystem, angenommen ist hierbei die Einfallshöhe H, und gefunden wird der Winkel β, den der austretende Strahl mit der Axe bildet, sowie die Entfernung B des Schnittpunktes mit der Axe von dem Scheitel der letzten Fläche des Systems aus, und ebenso die Entfernung der Hauptpunkte E' von dem Scheitel.

a) Für den Axenstrahl verlangen wir, dass die beiden farbigen Strahlen, in welche derselbe von der ersten Linsenfläche zerlegt wurde, in der gleichen Entfernung vom Scheitel der letzten brechenden Fläche die Axe schneiden. (Der Schnittpunkt ist nach Früherem der Brennpunkt.) Ferner verlangen wir, dass gleichzeitig die Hauptpunkte für die beiden Farben dieselben werden. Sind die Brennpunkte beisammen, so ist der Farbenfehler gehoben; sind gleichzeitig die Hauptpunkte die gleichen, so ist auch die Farbenvergrösserung gehoben. (Wir haben schon im vorigen Capitel nachgewiesen, dass die Bildgrösse von den Brennweiten abhängig ist, also beim Zusammenfallen der Brennpunkte von der Lage der Hauptpunkte.) Es liegen also dann die Bilder verschiedener Farben an gleichen Stellen und sind gleich gross.

b) Für den Randstrahl verlangen wir, dass die beiden farbigen Strahlen (dieselben Farben, die wir in der Axe angenommen haben) im nämlichen Punkte in der Axe schneiden, wie beim Axenstrahl (also im Brennpunkte), und verlangen weiter, dass beide Strahlen die gleiche wahre Brennweite wie die Axenstrahlen haben, dass also die Anfangspunkte der Brennweiten auf einer Sphäre liegen, die mit der wahren Brennweite als Radius aus dem Brennpunkte durch den zweiten Hauptpunkt beschrieben wird. Dadurch, dass die gleichfarbigen Axen- und Randstrahlen im gleichen Punkte die Axe schneiden, ist der Kugelgestaltfehler für diese Farbe gehoben, und dadurch, dass die zweite Farbe des Randstrahles im selben Punkte mit der des Axenstrahles ihre Vereinigung hat, ist der Kugelgestaltfehler für eine zweite Farbe gehoben (Gauss' Bedingung)[1]. Dadurch, dass der Randstrahl der ersten Farbe mit dem Axenstrahl nicht nur gleichen Brennpunkt, sondern auch gleichen Abstand der (auf der sphärischen Hauptfläche liegenden) Hauptpunkte vom Brennpunkte besitzt, ist für diese Farbe die Verzerrung gehoben; denn das System muss für Axe und Rand, für welche es gleiche

1) *Gauss*, Dioptr. Unters. p. 23.

wahre Brennweite hat, nach dem Früheren auch gleiche Vergrösserung haben. Sind die Hauptpunkte auch für diese zweite Farbe gleich, so ist das Bild auch für diese zweite Farbe ohne Verzerrung und gleich gross mit dem andersfarbigen (das Bild ist stabil achromatisch, d. h. Strahlen von zweierlei Farben, welche vor der Brechung einem weissen Strahle angehörten, werden in dem Systeme so gebrochen, dass sie wieder, einen weissen Strahl bildend, austreten, indem sie das System an derselben Stelle der letzten Fläche verlassen und nach demselben Punkte zielen[1]), sowohl für die Mitte als für den Rand des Systems.

2) Für den zweiten Bildpunkt, den seitlich von der Axe gelegenen, ist die Verfolgung von vier Strahlen nothwendig. Vor Allem nehmen wir hierzu denjenigen Strahl, der ungebrochen durch das System geht, den Hauptstrahl; es bildet derselbe, wie schon angegeben, sowohl vor seinem Eintritt, als auch nach seinem Austritt mit der optischen Axe den gleichen Winkel, den wir durch τ bezeichnen. Dieser Hauptstrahl repräsentirt für den Büschel des seitlich von der Axe gelegenen Objectpunktes die Axe, und er schneidet die Bildfläche in der Höhe H^* gleich $F \sin \tau$. Um diesen Hauptstrahl ist der einfallende Büschel symmetrisch gelagert, und wir nehmen drei Strahlen aus dem Mantel dieses Büschels. Haben wir nämlich den Bildpunkt in der Verticalebene unter der Axe liegend angenommen, so wählen wir die im Durchschnitt der Verticalebene mit dem Mantel gelegenen Strahlen, einen oberhalb, den andern unterhalb vom Hauptstrahle, und als dritten Strahl einen zu diesen parallelen, im Mantel des Büschels gelegenen, der von beiden vorhin als oberer und unterer Strahl bezeichneten gleichweit um 90^0 absteht. Dieser im Büschel seitlich liegende Strahl ist symmetrisch für die beiden Seiten der oben angenommenen Verticalebene und wechselt die Ebenen, in welchen die Brechungen stattfinden, von Fläche zu Fläche. Während der obere und untere Strahl mit der optischen Axe in einer Ebene liegen, befindet sich der seitliche Strahl ausser der Axenebene, d. h. es kann keine Ebene angegeben werden, welche gleichzeitig die optische Axe und diesen seitlichen Strahl enthielte.

Das Bild eines seitlich von der Axe gelegenen Objectpunktes muss deutlich und unverzerrt sein, wenn das System ein richtiges sein soll. Schneiden die drei aus dem Büschel gewählten Strahlen, der obere, untere und der seitliche, den Hauptstrahl an derselben Stelle, so ist das Bild deutlich. Ist die Entfernung dieses Durchschnittes vom Hauptpunkte gleich der wahren Brennweite, wodurch er in die Bildfläche trifft, und tritt der Hauptstrahl so aus, als käme er aus dem zweiten Hauptpunkte, so ist das Bild auch unverzerrt, also auch in gleichem Maasstabe wie das Axenbild.

Die gleichen Forderungen wird man an Strahlen von zweiter Farbe stellen, die mit den vorher betrachteten als weisses Licht eingefallen sind. Ist diese Bedingung gleichzeitig mit den vorausgehenden erfüllt, so ist das scharfe, unverzerrte sphärische Bild auch über seine ganze Ausdehnung achromatisch (stabil achromatisch)[2]).

1) Traité élémentaire d'astronomie physique par J. B. Biot, Paris 1844. Tome deuxième p. 82.

2) Bei Systemen von grossem Oeffnungswinkel ist für den Bildpunkt in der Axe ein dritter in $^2/_3$ der Höhe von der Axe gegen den Rand hin einfallender

§ 2. Fehler im Bilde eines wirklichen Linsensystems.

Um die Fehler im Bilde eines wirklichen Linsensystems feststellen zu können, müssen wir das Bild dieses Systems mit dem des gleichwerthigen idealen Systems, d. h. des Systems mit gleicher Brennweite, vergleichen. Das gleichwerthige ideale System erhalten wir, wenn wir einen in der Richtung des einfallenden Lichtes, parallel zur Axe und ganz nahe derselben das System treffenden Strahl von mittlerer Brechbarkeit trigonometrisch durch dasselbe verfolgen, und in früher (S. 57) angegebener Weise die wahre Brennweite als den Abstand zwischen Haupt- und Brennpunkt bestimmen. Wir finden auf diese Weise den zweiten Hauptpunkt und den zweiten Brennpunkt. Lassen wir in ähnlicher Weise von entgegengesetzter Richtung einen ganz nahe an der Axe und parallel zu derselben das System treffenden Strahl von mittlerer Brechbarkeit dasselbe durchlaufen, so finden wir wieder die wahre Brennweite als Abstand des Brennpunktes vom Hauptpunkte; hierbei haben wir den ersten Hauptpunkt und den ersten Brennpunkt ermittelt. Für alle Linsensysteme ist der Abstand vom ersten Hauptpunkte gegen den ersten Brennpunkt gleich dem Abstande des zweiten Hauptpunktes vom zweiten Brennpunkte, gleich der wahren Brennweite. Sind die vier Fundamentalpunkte, die beiden Hauptpunkte und die beiden Brennpunkte bekannt, so lässt sich das dem idealen System entsprechende Bild construiren. Diejenigen Strahlen, welche aus dem parallel zur Axe einfallenden Büschel zur Berechnung ausgewählt wurden, müssen so austreten, als wären sie ungebrochen bis zur zweiten Hauptfläche gegangen und an dieser zum zweiten Brennpunkte abgelenkt worden. Von den Strahlen, welche aus dem schräg zur Axe einfallenden Büschel zur Durchrechnung genommen werden müssen, soll der Hauptstrahl so gehen, als ginge er ungebrochen bis zum ersten Hauptpunkte, würde parallel bis zum zweiten Hauptpunkte verschoben, und setzt dann unter dem gleichen Winkel gegen die Axe wie der einfallende Strahl seinen Weg bis zum Durchschnitt mit der Bildfläche fort. Die übrigen Strahlen dieses Büschels bleiben mit ihm parallel bis zur zweiten Hauptfläche und gehen nach derselben so, dass sie gegen den Durchschnittspunkt des Hauptstrahles mit der Bildfläche zielen.) Alle Aenderungen, welche die wirklich berechneten Strahlen gegen obige Lagen zeigen, nennen wir **Fehler des Systems**, und unterscheiden wir zwischen Fehlern, die sich auf den Bildpunkt in der Axe, und solchen, die sich auf den **seitlich** von der Axe gelegenen Bildpunkt beziehen.

Bei der Bestimmung der Fehler legen wir eine positive Linse zu Grunde, und werden die für eine negative Linse geltenden Aenderungen nur gelegentlich bemerken. Ferner betrachten wir, da es in den meisten in der Praxis vorkommenden Fällen genügt, nur jene Bildpunkte unendlich entfernter Objectpunkte, welche in der durch den zweiten Brennpunkt

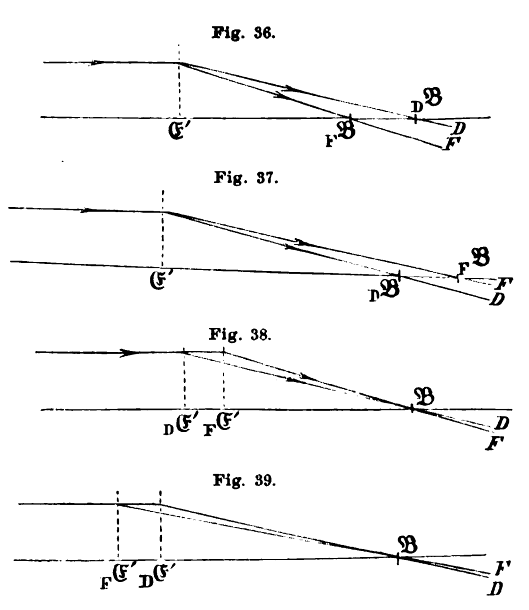
Strahl zu verfolgen, und für den **seitlich** von der Axe gelegenen Bildpunkt sind drei weitere Strahlen, welche im einfallenden Büschel in einem Cylinder liegen, der mit $^2/_3$ des Durchmessers der wirksamen Oeffnung beschrieben ist und in der Ebene liegen, welche die Axe und die gewählten Randstrahlen enthalten. Man orientirt sich dadurch über das Vorhandensein und die etwaige Grösse von Zwischenfehlern.



gehenden Bildfläche liegen, und zwar zuerst den einem in der Axe gelegenen unendlich entfernten Objectpunkte zugehörigen Bildpunkt. Wir rechnen dabei für zweierlei Farben und wählen diese Farben nach den durch das System zu erfüllenden Bedingungen.

Für die zunächst in Betracht kommenden Systeme, die zur directen Unterstützung des Auges dienen (optische Systeme), wählen wir einen Strahl von der Brechbarkeit der Linie D als denjenigen, mit welchem die Brenn- und Hauptpunkte für das ideale System ermittelt werden, und als andersfarbigen Strahl einen von stärkerer Brechbarkeit, z. B. einen der Linie F entsprechenden. Photographenapparate, bei denen optische Einstellung verlangt wird, wären mit den Linien G und D zu rechnen; solche, welche ohne Rücksicht auf die Lage des optischen Bildes möglichst scharfe Bilder der chemisch wirksamen Strahlen liefern sollen, sind für die Linien G und H zu rechnen. (Vergl. S. 33.) Die Ermittelung der Fehler führen wir nur für den ersten Fall, optische Systeme, durch; die Behandlung der beiden anderen Fälle ergiebt sich dann leicht nach Analogie.

Wir haben von den Strahlen, welche von einem unendlich entfernten, in der Axe gelegenen Objectpunkte ausgehen, wie wir schon oben anführten, zwei durch das System zu verfolgen, und zwar einen ganz nahe an der Axe einfallenden, sowie den zweiten am Rande des Systems, die erste Linsenfläche treffenden. Beide werden mit zwei Farben gerechnet, und es giebt uns der Axenstrahl, für die Farbe der Linie D verfolgt, den zweiten Hauptpunkt und den zweiten Brennpunkt; mit der Farbe der Linie F verfolgt, die Abweichung in der Lage des zweiten Hauptpunktes und des zweiten Brennpunktes für diese Farbe. Schneidet der stärker brechbare Strahl (von der Farbe F) die Axe an einer anderen Stelle als der Strahl von der Farbe D, so sagen wir es ist ein Farbenfehler des Axenstrahles vorhanden. Schneidet der stärker brechbare Strahl die Axe, in der Richtung des einfallenden Lichtes gezählt, früher, (wodurch die Brennweite kürzer wird) als der von der Farbe D, so nennen wir den Farbenfehler nicht compensirt (Fig. 36), während derselbe übercompensirt (Fig. 37) ist, wenn jener Strahl die Axe später schneidet[1]).



Den Abstand des Hauptpunktes der Axenstrahlen

1) Ein Fehler heisst compensirt, wenn er den Werth Null erreicht,

vom Schnittpunkte der austretenden Strahlen mit der Axe findet man durch die Formel:

$$\mathfrak{E}\mathfrak{B}' = \frac{H}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{H}{\beta},$$

und dann den Abstand des Hauptpunktes vom Scheitel der letzten brechenden Fläche aus der Gleichung: $\mathfrak{E}'\mathfrak{B} - \mathfrak{N}_2\mathfrak{B} = \mathfrak{E}'\mathfrak{N}_2 = E'$. Ist nun der Hauptpunkt der Farbe F, in der Richtung des einfallenden Lichtes genommen, hinter dem Hauptpunkte der Farbe D (wodurch die Brennweite kürzer wird), so ist der Farbenvergrösserungsfehler nicht compensirt (Fig. 38), im entgegengesetzten Falle übercompensirt. (Fig. 39).

Wir haben somit durch Verfolgung des Axenstrahles für zwei Farben festgestellt: 1) den Maasstab des Systemes, 2) den Farbenfehler für den Axenstrahl und 3) den Farbenvergrösserungsfehler des Systemes. Der gelbe Axenstrahl ergiebt die Werthe $\mathfrak{N}_2\mathfrak{F}' = B$, sowie $\mathfrak{E}'\mathfrak{N}_2 = E'$. Nun erhält man die Brennweite des Systemes F aus der Formel:

$$F = \mathfrak{E}'\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_2\mathfrak{F}' = E' + B.$$

Ferner ist der Farbenfehler des Axenstrahles gleich ${}_DB - {}_FB$ (positiv nicht compensirt) und der Farbenvergrösserungsfehler gleich ${}_DE' - {}_FE'$ (positiv nicht compensirt).

Nun wählen wir die Höhe des einfallenden Randstrahles H, wodurch die Helligkeit und zugleich der Oeffnungswinkel (vergl. S. 57) des Systems bestimmt ist. Der Oeffnungswinkel findet sich aus der Gleichung:

$$\sin\beta = \frac{H}{F}.$$

Das Oeffnungsverhältniss erhält man aus der Formel:

$$\frac{H}{F} = 1 : \frac{F}{H},$$

wobei $\frac{F}{H}$ die Zahl angiebt, wie oft die halbe Oeffnung in der Brennweite enthalten ist. Hierdurch hat man ein Maass der Helligkeit, welche um so grösser ist, je kleiner der Werth $\frac{F}{H}$ sich ergiebt. Die Helligkeit wächst umgekehrt mit dem Quadrate dieses Werthes. Der Zusammenhang zwischen Oeffnungswinkel und Oeffnungsverhältniss ist ausgedrückt durch die Gleichung:

$$1 : \frac{F}{H} = \sin\beta.$$

Wir rechnen jetzt den in der Höhe H parallel zur Axe einfallenden Strahl für die Farbe D durch das System und erhalten nun für diesen Randstrahl die Werthe von ${}_DB$ und ${}_DE'$. Es findet sich für die Farbe D als Vereinigungsweite des Axenstrahles der Werth: ${}_{Axe}\mathfrak{N}_2\mathfrak{B}$, und als diejenige des Randstrahles: ${}_{Rand}\mathfrak{N}_2\mathfrak{B}$, so ist der Unterschied dieser Werthe der Kugelgestaltfehler. Schneidet der Randstrahl früher die Axe, ist also ${}_{Axe}\mathfrak{N}_2\mathfrak{B} - {}_{Rand}\mathfrak{N}_2\mathfrak{B} = +$, und ist damit die Brennweite des Rand-

---

nicht compensirt, wenn er in gleichem Sinne liegt, den eine einfache positive Linse mit zwei gleichen Brechungen bedingt, übercompensirt, wenn er auf der andern Seite des Werthes Null liegt. Nicht compensirte Fehler erhalten durch die Formeln das Zeichen $+$, übercompensirte das Zeichen $-$.

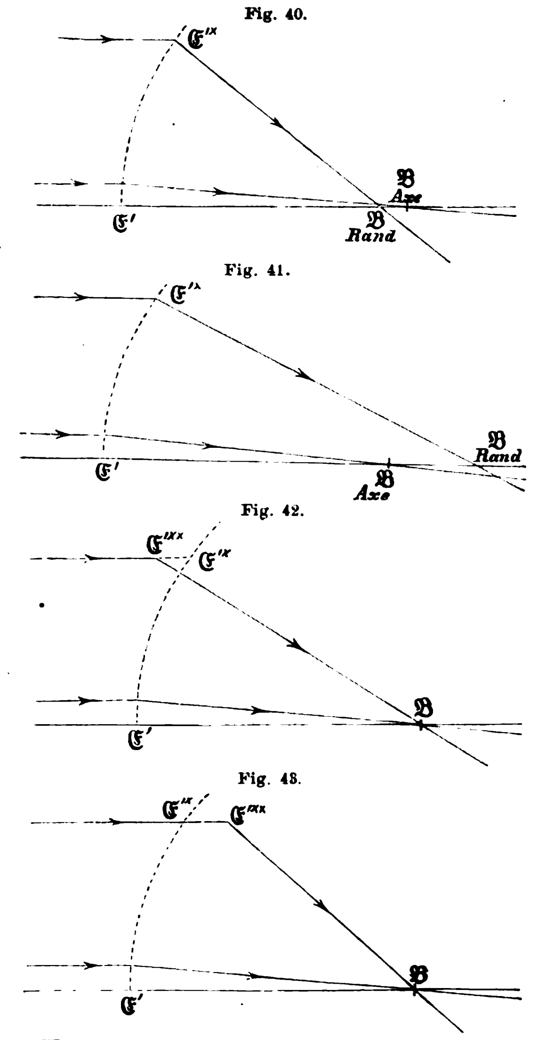
strahles kürzer als die des Axenstrahles, so nennt man den Kugelgestaltfehler nicht compensirt (Fig. 40), im entgegengesetzten Falle aber übercompensirt (Fig. 41). Die Hauptpunkte der in verschiedenen Höhen einfallenden Strahlen sollten auf einer Sphäre, die mit der wahren Brennweite aus dem Brennpunkte gezogen ist, liegen; die Projectionen der richtig liegenden Hauptpunkte sollen somit in der Richtung des einfallenden Lichtes hinter dem Hauptpunkte des Axenstrahles in der Entfernung:

$$2\,F\sin^2\frac{\beta}{2}$$

liegen, der Abstand dieser Projectionen vom Scheitel der letzten brechenden Fläche ist somit:

$$\mathfrak{E}'\mathfrak{N}_2 + 2\,F\sin^2\frac{\beta}{2} =$$

$$= E' + 2\,F\sin^2\frac{\beta}{2}.$$



Wir erhalten nun für den Randstrahl von der Farbe D die Projection des sich thatsächlich ergebenden Hauptpunktes $\mathfrak{E}'^{**}$, es ergiebt sich nämlich die Entfernung dieses projicirten Hauptpunktes vom Schnittpunkt des Randstrahles mit der Axe zu: $\frac{H}{\operatorname{tg}\beta}$, und die Entfernung dieses projicirten Punktes von dem Scheitel der letzten Fläche ist dann:

$$\mathfrak{N}_2\mathfrak{B} - \frac{H}{\operatorname{tg}\beta} = B - \frac{H}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Der Unterschied des letzterwähnten projicirten Hauptpunktes gegen den richtig gelegenen ist die Verzerrung, und es wird, wenn die Grösse:

$$\mathfrak{E}'\mathfrak{N}_2 + 2\,F\sin^2\frac{\beta}{2} - \mathfrak{N}_2\mathfrak{B} + \frac{H}{\operatorname{tg}\beta} = +$$

der Verzerrungsfehler als nicht compensirt (Fig. 42), im entgegengesetzten Falle als übercompensirt (Fig. 43) bezeichnet.

Dass eine Lagenänderung des zweiten Hauptpunktes von Randstrahlen eine Bildverzerrung bedingt, ist leicht nachweisbar. Man sieht nämlich der Durchrechnung eines zur Axe parallel einfallenden Strahlenbüschels schon an, ob Hauptstrahlen mit grösseren Winkeln so weiter gehen, als kämen sie aus dem zweiten Hauptpunkte. Wenn die Hauptpunkte der Randstrahlen auf einer vom Brennpunkte mit der wahren Brennweite als Radius gezogenen Sphäre liegen, so gehen alle, auch die unter grossem Winkel gegen die Axe einfallenden Hauptstrahlen nach Durchlaufung des Systems so weiter, als kämen sie vom zweiten Hauptpunkte, und das Bild wird ein unverzerrtes. Liegen jedoch die Hauptpunkte der Randstrahlen nicht auf der angegebenen Sphäre, so werden die unter grossen Winkeln gegen die Axe einfallenden Hauptstrahlen von einem andern Punkte als dem zweiten Hauptpunkte auszugehen scheinen; es treten also die unter grossen Winkeln einfallenden Hauptstrahlen so aus, als kämen sie von einem andern Punkte, als die unter kleinen Winkeln einfallenden, und das Bild ist ein verzerrtes.

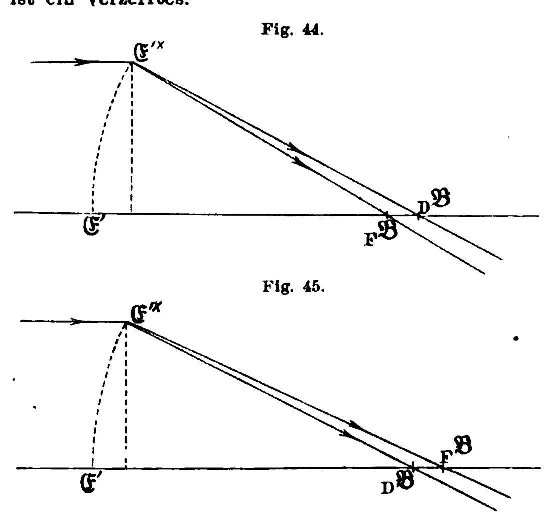

Fig. 44.

Fig. 45.

Schneidet der mit einer zweiten Farbe (der der Linie F entsprechenden) verfolgte Randstrahl in einer anderen Vereinigungsweite ${}_F\mathfrak{R}_2\mathfrak{B}$, als der Strahl, welcher der Linie D entspricht (mit der Vereinigungsweite ${}_D\mathfrak{R}_2\mathfrak{B}$), so ist ein Farbenfehler für den Randstrahl vorhanden, welcher nicht compensirt heisst (Fig. 44), wenn der Werth

$${}_D\mathfrak{R}_2\mathfrak{B} - {}_F\mathfrak{R}_2\mathfrak{B} = +$$

wird, im entgegengesetzten Falle dagegen übercompensirt, (Fig. 45.)

Ist dieser Fehler gleichzeitig mit dem Farbenfehler für den Axenstrahl gehoben, so erfüllt das System die Gauss'sche Bedingung; es ist dann auch der Kugelgestaltfehler für die Farbe F gehoben, wenn er für die Farbe D gehoben war. Die Abweichung in der Vereinigungsweite des Randstrahles von zweiter Farbe, wenn der Randstrahl der ersten Farbe mit den beiden Axenstrahlen für D und F denselben Brennpunkt hatte, nennen wir den Fehler gegen die Gauss'sche Bedingung. Wenn

$${}_{Axe}({}_D\mathfrak{R}_2\mathfrak{B} - {}_F\mathfrak{R}_2\mathfrak{B}) - {}_{Rand}({}_D\mathfrak{R}_2\mathfrak{B} - {}_F\mathfrak{R}_2\mathfrak{B}) = +$$

so ist der Fehler nicht compensirt, im entgegengesetzten Falle aber übercompensirt.

Giebt endlich der mit der zweiten Farbe (der Linie F entsprechend) gerechnete Randstrahl eine unrichtige Lage des Hauptpunktes, so ist ein Vergrösserungsfehler in Farben für den Randstrahl vorhanden, welcher nicht compensirt heisst (Fig. 46), wenn:

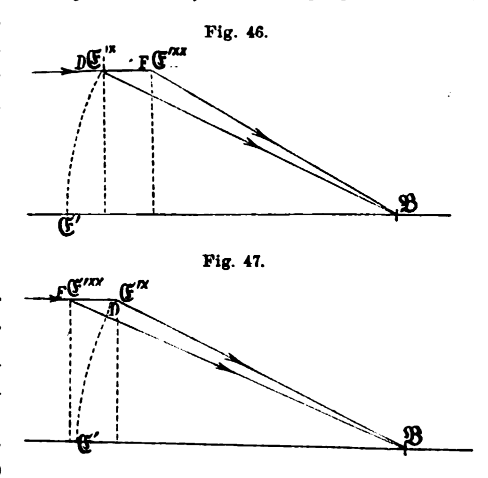
$${}_D\left(\mathfrak{E}'\mathfrak{R}_2 + 2F\sin^2\frac{\beta}{2}\right) - {}_F\left(\mathfrak{R}_2\mathfrak{B} - \frac{H}{\operatorname{tg}\beta}\right) = +,$$

im entgegengesetzten Falle aber übercompensirt (Fig. 47).

Wir haben somit durch Verfolgung eines Randstrahles für zwei Farben festgestellt: 1) Die Helligkeit des Systems, 2) den Kugelgestaltfehler, 3) den Fehler der Verzerrung, 4) den Farbenfehler für einen Randstrahl und 5) den Farbenvergrösserungsfehler für einen Randstrahl.

Fig. 46.

Fig. 47.



Von einem schräg zur Axe einfallenden Strahlenbüschel haben wir vier Strahlen, den Hauptstrahl, den oberen, den unteren und den seitlichen Strahl ausgewählt, und werden also für diese vier Strahlen die Fehler angeben müssen; wir wollen jedoch vorerst nur diejenigen Fehler betrachten, welche auch dann eintreten, wenn nur einfarbiges Licht von der Linie D einfällt, und erst zuletzt die durch andersfarbige, der Linie F entsprechende Strahlen bedingten Fehler berühren.

Der aus dem System austretende Hauptstrahl kann von einem Axenpunkte ausgehend erscheinen, der nicht mit dem zweiten Hauptpunkte identisch ist; der austretende Hauptstrahl schneidet dann nicht mehr in der Entfernung $F \sin \tau$ von der Axe die Bildfläche. Liegt der Punkt, von dem der Hauptstrahl auszugehen scheint, näher an dem Brennpunkte, so trifft der Hauptstrahl die Bildfläche tiefer; wenn jener Punkt weiter von dem Brennpunkte liegt, so trifft der Hauptstrahl die Bildfläche höher. Dieser Fehler bedingt somit eine Verzerrung, und nennen wir denselben nicht compensirt, wenn der Schnittpunkt des austretenden Hauptstrahles mit der Axe näher am Brennpunkte als der zweite Hauptpunkt liegt; dagegen übercompensirt, wenn jener Schnittpunkt weiter vom Brennpunkte wegliegt.

Wenn der obere, untere und seitliche Randstrahl eines seitlich von der Axe gelegenen Bildpunktes den Hauptstrahl an derselben Stelle schneiden, so ist das Bild dieses Punktes deutlich. Ist dieser Durchschnittspunkt zugleich der Durchschnittspunkt des Hauptstrahles mit derjenigen Bildfläche, welche aus dem Hauptpunkte mit der wahren Brennweite als Radius durch den Brennpunkt beschrieben wird, so ist das Bild richtig.

Schneiden der obere, untere und seitliche Randstrahl nicht in demselben Punkte, so ist das Bild undeutlich, und wir sehen als Ort des Bildpunktes diejenige zur optischen Axe senkrechte Ebene an, in welcher das Scheibchen, welches das Bild darstellt, am kleinsten ist.

Schneiden die beiden seitlichen Strahlen auf dem Hauptstrahle, ferner der obere und untere zwar ebenfalls auf dem Hauptstrahle aber an einer anderen Stelle, so ist regelmässiger Astigmatismus vorhanden. Schneidet der obere und untere nicht auf dem Hauptstrahle, so tritt der Kugelgestaltfehler ausser der Axe auf.

Die beiden seitlichen Strahlen liegen gegen die Ebene, welche die optische Axe, den Bildpunkt und den Hauptstrahl enthält, symmetrisch, und schneiden einander stets in einem Punkte derselben; liegt dieser Punkt nicht auf dem Hauptstrahle, sondern höher oder tiefer, so nennen wir die hierdurch entstehenden Fehler unregelmässigen Astigmatismus.

Es können also bei einem Bildpunkte ausser der Axe folgende Fehler auftreten: 1) Verzerrung. 2) Bildkrümmung. 3) Regelmässiger Astigmatismus. 4) Kugelgestaltfehler ausser der Axe. 5) Unregelmässiger Astigmatismus. 6) Combinationen dieser Fehler.

Dieselben Fehler können auch bei Strahlen der zweiten Farbe auftreten; in den meisten Fällen der Praxis genügt es, für eine Farbe den Fehler zu bestimmen, wenn die Punkte, die für die andere Farbe den Massstab des Systems gegeben haben, nämlich der zweite Hauptpunkt und der zweite Brennpunkt, für die zweite Farbe die nämlichen sind.

Eine grosse Erleichterung für die Untersuchung von ausgedehnten Bildern eines Linsensystems liegt darin, dass man der Berechnung des Bildpunktes in der Axe schon ansehen kann, ob die wichtigsten Bedingungen für ein ausgedehntes Bild im Wesentlichen erfüllt sind. Wenn nämlich die Brennpunkte und Hauptpunkte für zwei Farben, für Axen- und Randstrahlen, bei der Durchrechnung durch ein Linsensystem sich richtig ergeben, so sind beide verschiedenfarbige Bilder gleich gross, unverzerrt und an derselben Stelle gelegen. Ausser der correcten Zeichnung und der richtigen Grösse lässt sich der Berechnung des Bildpunktes in der Axe auch noch ansehen, ob die Deutlichkeit der Bilder von der Mitte gegen den Rand schnell abnimmt oder nicht. Die Undeutlichkeit der Bilder im schräg einfallenden Büschel ist bedingt durch die unsymmetrische Brechung der drei im Winkel des gewählten Büschels liegenden Strahlen. Sobald diese Strahlen symmetrisch liegen, wird das Bild ein deutliches; deshalb wird in den Fällen das günstigste Resultat eintreten, in welchen der parallel zur Axe einfallende Büschel am symmetrischsten durch das System geht. Dies tritt dann ein, wenn ein Rand- und ein Axenstrahl während des Durchganges durch das System nicht nur in Bezug auf die Winkel ihrer Ablenkung sondern auch in Bezug auf die Austrittshöhen proportional gebrochen wird. Wenn also, während diese beiden Strahlen in dem gleichen Punkte (dem Brennpunkte) die Axe schneiden, der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Austrittswinkels — die Sinus sind zu nehmen, da die Brechung proportional dem Sinus stattfindet — ein gleiches Verhältniss giebt für den Randstrahl, wie für den Axenstrahl, so durchlaufen die Strahlen das Linsensystem möglichst symmetrisch. Diese Bedingung, dass das Verhältniss der Sinus vom Eintritts- und Austrittswinkel für Rand und Axe gleich ist, wollen wir die Sinusbedingung nennen; diese Bedingung ist erfüllt, wenn

$$\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_{2s}'}\right)_{\text{Axe}} = \left(\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi_{2s}'}\right)_{\text{Rand}}.$$

Das System heisst in Beziehung auf die Sinusbedingung nicht compensirt, wenn

$$\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_{2s}'}\right)_{\text{Axe}} - \left(\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi_{2s}'}\right)_{\text{Rand}} = +,$$

dagegen übercompensirt, wenn dieselbe Grösse negativ ist. Die Sinusbedingung ist erfüllt, wenn das System für die ganze Oeffnung gleiche wahre Brennweiten besitzt, und fällt die Bedingung mit derjenigen zusammen, dass die Anfangspunkte der Brennweiten richtig liegen.

IV. Capitel.

Berechnung einer Linse und Discussion ihrer Bildfehler.

§ 1. Voraussetzungen für die Rechnung.

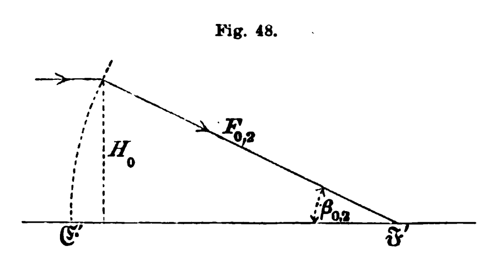
Wir wählen zur numerischen Feststellung der Fehler von Linsen, wie auch später zum Aufheben der Fehler eines Linsensystemes die trigonometrische Rechnung, weil sie uns bis zu der Ordnung, die wir durch die Wahl der Stellenzahl für die Rechnung vorschreiben, ein treues Bild der Lage der Strahlen giebt, und weil auch jene Fehler, die nicht gehoben werden können, darin zum Ausdrucke kommen und stets in einer Weise, bei der es leicht ist, festzusetzen, welches der grösste der vorhandenen Fehler ist.

Um vergleichbare Linsen unserer Rechnung zu Grunde legen zu können, müssen wir vor Allem die Leistung derselben fixiren, also: 1) Die Brennweite $F_{0,2}$; 2) den Oeffnungshalbmesser H_0 und 3) den halben Gesichtsfeldwinkel τ_0 annehmen.

1) Die Annahme der wahren Brennweite, der Entfernung des Brennpunktes vom Hauptpunkte (z. B. $F_{0,2} = 100$), bedingt den Massstab der Linse; denn es ändert sich proportional mit der Brennweite die Grösse des Bildes eines unendlich entfernten Objectes von gegebenem Winkeldurchmesser. Dass die Brennweite $F_{0,2}$ einen bestimmten Werth erhalte, ist bei der Durchrechnung eines Axenstrahles einzuführen.

2) Bei gegebener Brennweite bedingt die Annahme des Halbmessers eines parallel zur Axe einfallenden Lichtbüschels, gleich dem Halbmesser der wirksamen Oeffnung der Linse (Oeffnungshalbmesser), die Helligkeit des Bildpunktes in der Axe. Es sei z. B. $H_0 = 15$. Die auf die wirksame Linsenöffnung auffallende Lichtmenge ist $H_0^2 \pi$;[1]) wie aus der Zeichnung (Fig. 48) sofort ersichtlich, besteht die Relation:

Fig. 48.



$$H_0 = F_{0,2} \sin \beta_{0,2} \,,$$

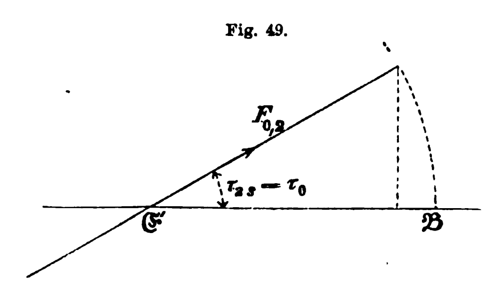
1) π bedeutet hier die Ludolphine; eine Verwechslung mit dem von uns mit π bezeichneten Winkel, den die Projection eines einfallenden Strahles auf

wobei $\beta_{0,2}$ der halbe Oeffnungswinkel d. h. der Winkel des austretenden Randstrahles mit der Axe ist. Die Helligkeit des Bildpunktes in der Axe ändert somit bei gegebener Brennweite proportional mit dem Quadrate des Oeffnungshalbmessers, oder dem Quadrate des Sinus des halben Oeffnungswinkels[1]). Die Annahme des Oeffnungshalbmessers ist bei der Durchrechnung eines Randstrahles einzuführen.

Ist die Brennweite und die wirksame Oeffnung der Linse angenommen, so können für die in ihrer Form (Radien und Dicke) und Brechung gegebenen Linse alle von einem Objectpunkte in der Axe ausgehenden und die Linse durchlaufenden Strahlen berechnet werden.

3. Die dritte Annahme ist der Winkel τ_0, welchen der äusserste noch benützte Hauptstrahl mit der Axe bildet. Als Gesichtsfeldwinkel bezeichnen wir den Winkel $2\tau_0$, den die beiden äussersten benützten Hauptstrahlen mit einander bilden; ferner verstehen wir unter Gesichtsfeld die Grösse der erhaltenen Bildfläche, also $(F_{0,2} \sin \tau_0)^2 \times \pi$,[2]) der Durchmesser dieses Gesichtsfeldes ist $2 F_{0,2} \sin \tau_0$. Die Annahme des Winkels τ_0 wird bei der Durchrechnung der Strahlen, die von einem Objectpunkte ausser der Axe kommen, nothwendig, und es können nun auch alle von einem seitlich von der Axe gelegenen Objectpunkte ausgehenden und die Linse durchlaufenden Strahlen berechnet werden.

Fig. 49.



Die Vergleichung zweier Linsen hinsichtlich der von ihnen erzeugten Bilder ist nur dann möglich, wenn dieselben in Bezug auf die drei oben aufgezählten Annahmen, nämlich Brennweite, Oeffnungshalbmesser und Gesichtsfeldwinkel übereinstimmen. Ist eine Linse von anderen Dimensionen mit einer gegebenen zu vergleichen, so muss vor allem der Massstab — die Brennweite — auf diejenige der Vergleichungslinse reducirt werden, und mit demselben Factor müssen alle anderen Elemente: Halbmesser, Dicke, wirksame Oeffnung, Gesichtsfelddurchmesser multiplicirt werden. Ergiebt die reducirte halbe Oeffnung dieselbe Zahl wie in der Vergleichslinse, so ist auch die Helligkeit die gleiche, ergiebt der Durchmesser des Gesichtsfeldes dieselbe Zahl, wie sie die Vergleichslinse hat, so ist auch das Gesichtsfeld gleich und die beiden Linsen sind direct vergleichbar. Ergiebt sich aber bei der Reduction die halbe Oeffnung anders, so ist die Helligkeit eine verschiedene und zwar grösser, wenn sich H_0 grösser ergiebt, und umgekehrt. Wenn H_0, $F_{0,2}$, $\beta_{0,2}$ und τ_0 die Elemente der Vergleichslinse, (H_0), $F_{0,2}$, $(\beta_{0,2})$ und (τ_0) die der reducirten Linse sind, so besteht für die Helligkeit die Relation:

$$H_0^2 x = (H_0)^2,$$

die Mittelpunktsebene im Punkte G mit der Richtung nach oben bildet, dürfte ausgeschlossen sein.

1) Vergleiche Cap. III. S. 56.

2) π bedeutet hier ebenfalls die Ludolphine, und nicht den von uns mit π bezeichneten Winkel, den die Projection eines einfallenden Strahles auf die Mittelpunktsebene im Punkte G mit der Richtung nach Oben bildet.

wobei x ausdrückt, um wievielmal die Helligkeit der Vergleichslinse kleiner oder grösser, als die der reducirten Linse ist. In gleicher Weise drückt die Gleichung:

$$\sin^2 \beta_{0,2} x = \sin^2(\beta_{0,2})$$

die Relation der Helligkeiten von beiden Linsen aus. Hat sich bei der Reduction der Durchmesser des Gesichtsfeldes ($2 F_{0,2} \sin \tau_0$) gleich mit dem der Vergleichslinse ergeben, so muss auch der Winkel τ_0, da ja die Werthe von $F_{0,2}$ gleich gemacht sind, für beide Linsen gleich sein. Ergiebt sich der Durchmesser anders, so ist bei der reducirten Linse ein anderer Gesichtsfeldwinkel benützt, und es findet sich der zugehörige Winkel τ_0 aus der Gleichung:

$$x \sin \tau_0 = \sin (\tau_0).$$

Sind die Annahmen über die Leistung der herzustellenden Linsen, also über Brennweite, Oeffnungshalbmesser und Gesichtsfeldwinkel gemacht, so muss man die Form der Linse festsetzen, welche von der Vertheilung der Brechungen in die beiden Flächen und von der angenommenen Dicke der Linse abhängt. Der totale Brechungswinkel, den die Linse für einen Axenstrahl geben soll, ist $\beta_{0,2}$ und dieser ist durch die Gleichung $\sin \beta_{0,2} = \frac{H_0}{F_{0,2}}$ [bei kleinen Oeffnungswinkeln übereinstimmend mit der Gleichung $\beta_{0,2} = \frac{H_0}{F_{0,2}}$], wobei H_0 die Einfallshöhe des Axenstrahles bedeutet. Hinsichtlich der Auswahl des Axenstrahles, für welchen H_0 nur ein sehr kleiner Werth im Verhältniss zum Werthe der Brennweite sein soll, sonst aber willkürlich ist, diene die folgende Auseinandersetzung.

Für den Axenstrahl könnten wir, nachdem die wahre Brennweite $F_{0,2} = 100$ vorausgesetzt ist, den Winkel des aus der Linse austretenden Strahles von bestimmter Farbe, nämlich der Linie D mit der optischen Axe gleich einer Secunde annehmen. Es würde dann, da der Sinus einer Secunde gleich dem Bogen einer Secunde den Werth 0.000004848137 hat, die Einfallshöhe des Axenstrahles nach der Formel $H_0 = F_{0,2} \sin 1''$ zu 0.0004848137 angenommen werden müssen. Wollten wir diese Werthe von $\beta_{0,2}$ und H_0 bei der Berechnung beibehalten, so wäre die grosse Stellenzahl sehr unbequem; es ist deshalb zweckmässiger, die ganze Gleichung mit 206 265 (dem reciproken Werthe der Bogenlänge von einer Secunde) zu multipliciren; man erhält dann

$$\text{Bogen einer Secunde} \times 206\,265 = \frac{\text{Einfallshöhe des Axenstrahles} \times 206\,265}{\text{Brennweite}}$$

wodurch der Bogen des halben Oeffnungswinkels den Werth 1, und die Einfallshöhe den Werth 100 bekommt, und die Gleichung die Form $1 = \frac{100}{100}$ annimmt. Es sind damit die zuerst angenommenen Einheiten der Winkel (die Secunde) und die Einheit der Einfallshöhen (zuerst übereinstimmend mit der der Brennweite) mit 206 265 multiplicirt.

Der eben festgesetzte Oeffnungswinkel $\beta_{0,2} = 1$ giebt die totale Ablenkung, welche ein Axenstrahl durch die zu berechnende Linse erleiden soll. Diese Ablenkung in der Linse vertheilt sich auf die beiden Flächen derselben. Indem wir die Vertheilung der Brechung in die beiden Flächen ändern, d. h. gleichviel an der einen wegnehmen und an der anderen zulegen, ändern wir die Form der Linse, während die Brenn-

weite dieselbe bleibt, was einer Durchbiegung der Linse entspricht. Die Ablenkung an der ersten Fläche sei δ_0, die an der zweiten δ_2, wobei immer $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2$ ist.

Wir können nun die Vertheilung der Ablenkungen an beiden Flächen verschieden annehmen, z. B. $\delta_0 = \delta_2 = \frac{1}{2}\beta_{0,2} = 0.5$, oder $\delta_0 = 0$; $\delta_2 = \beta_{0,2} = 1.0$. Bevor wir jedoch die verschiedenen Fälle weiter betrachten, müssen wir auch die Annahme über die Linsendicke besprechen.

Wir werden im Allgemeinen die geringste mögliche Dicke der Linse voraussetzen, um nicht die Grösse der Glasmasse unnöthig zu vermehren. Bei den Sammellinsen werden wir die Dicke so annehmen müssen, dass die Linse die gewünschte Oeffnung und überdies eine genügende Festigkeit besitzt. In unseren Berechnungen nehmen wir z. B. als Linsendicke $D_1 = 8^{mm}$ an. Bei den Zerstreuungslinsen muss die Dicke so gross sein, dass sie in der Mitte noch eine ausreichende Festigkeit bietet. Wir können in einzelnen Fällen sowohl für Sammellinsen als auch für Zerstreuungslinsen grössere Dicken wählen, um bestimmte Wirkungen der Linsen zu erzielen.

Endlich müssen wir auch das Brechungsverhältniss $\frac{n_{+1}}{n_{-1}}$, oder da in unserem Falle immer $n_{-1} = 1$ ist, den Werth von n_{+1} (z. B. $n_{+1} = 1.52964$) annehmen, wodurch wir für die zu berechnende Linse eine bestimmte Glasart und für die zu berechnenden Lichtstrahlen eine bestimmte Farbe (hier z. B. die Farbe der Linie D) auswählen.

§ 2. Bestimmung der Linsenform.

Für die Berechnung einer Linse sind deshalb nach dem Vorausgehenden gegeben die Werthe von H_0, D_1 und n_{+1}, zur Bestimmung der Form der Linse ist ferner angenommen der Werth von δ_0, wodurch dann $\delta_2 = \beta_{0,2} - \delta_0$ gegeben ist, und wir finden nun die beiden Radien R_0 und R_2 der Linse mit Hilfe der Formeln

$$R_0 = \frac{H_0\,(n_{+1} - 1)}{\delta_0 n_{+1}}, \text{ und}$$

$$R_2 = \frac{(H_0 - D_1\,\delta_0)\,(n_{+1} - 1)}{-\delta_2 + \delta_0\,(n_{+1} - 1)}.$$

Wenn sich R_0 oder R_2 mit positivem Vorzeichen ergeben, so wenden die betreffenden Flächen ihre convexe Seite dem auffallenden Lichte zu, wenn negativ die Concavseite. Die Richtigkeit dieser Formeln ist leicht durch das Brechungsgesetz und die Betrachtung eines an den beiden Linsenflächen abgelenkten Axenstrahles nachzuweisen.

Wir wählen als Beispiele eine Reihe bestimmter Vertheilungen der Ablenkungen an beiden Linsenflächen, und erhalten dafür folgende Radien der Linsen.

Sammellinsen: $\beta_{0,2} = +1$.

1) $\delta_0 = +2; \quad \delta_2 = -1; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1.$

$$R_0 = \frac{H_0(n_{+1} - 1)}{2n_{+1}},$$

$$R_2 = \frac{(H_0 - 2D_1)(n_{+1} - 1)}{2n_{+1} - 1}.$$

2) $\delta_0 = +1; \quad \delta_2 = 0; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1.$

$$R_0 = \frac{H_0(n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$

$$R_2 = (H_0 - D_1).$$

3) $\delta_0 = \frac{1}{n_{+1}}; \quad \delta_2 = \frac{n_{+1} - 1}{n_{+1}}; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1.$

$$R_0 = H_0\, n_{+1} - 1,$$

$$R_2 = \infty.$$

4) $\delta_0 = \delta_2 = 0.5; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1.$

$$R_0 = \frac{2H_0(n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$

$$R_2 = -\frac{(2H_0 - D_1)(n_{+1} - 1)}{2 - n_{+1}}.$$

Zerstreuungslinsen: $\beta_{0,2} = -1$.

1) $\delta_0 = -2; \quad \delta_2 = +1; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1.$

$$R_0 = -\frac{H_0(n_{+1} - 1)}{2n_{+1}},$$

$$R_2 = -\frac{(H_0 + 2D_1)(n_{+1} - 1)}{2n_{+1} - 1}.$$

2) $\delta_0 = -1; \quad \delta_2 = 0; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1.$

$$R_0 = -\frac{H_0(n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$

$$R_2 = -(H_0 - D_1).$$

3) $\delta_0 = -\frac{1}{n_{+1}}; \quad \delta_2 = -\frac{n_{+1} - 1}{n_{+1}}; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1.$

$$R_0 = -H_0(n_{+1} - 1),$$

$$R_2 = \infty.$$

4) $\delta_0 = \delta_2 = -0.5; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1.$

$$R_0 = -\frac{2H_0(n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$

$$R_2 = +\frac{(2H_0 + D_1)(n_{+1} - 1)}{2 - n_{+1}}.$$

Sammellinsen: $\beta_{0,2} = +1$.

5) $\delta_0 + \delta_2 = \beta_{0,2} = +1; \quad R_0 = -R_2.$

$$R_0 = -R_2 = H_0(n_{+1} - 1) \pm$$
$$\pm \sqrt{-\frac{H_0 D_1 (n_{+1} - 1)^2}{n_{+1}} + H_0^2 (n_{+1} - 1)^2}.$$

6) $\delta_0 = 0; \quad \delta_2 = +1; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1.$

$$R_0 = \infty,$$
$$R_2 = -H_0(n_{+1} - 1).$$

7) $\delta_0 = -1; \quad \delta_2 = +2; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1.$

$$R_0 = -\frac{H_0(n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$
$$R_2 = -\frac{(H_0 + D_1)(n_{+1} - 1)}{n_{+1} + 1}.$$

Zerstreuungslinsen: $\beta_{0,2} = -1$.

5) $\delta_0 + \delta_2 = \beta_{0,2} = -1; \quad R_0 = -R_2.$

$$R_0 = -R_2 = -H_0(n_{+1} - 1) \mp$$
$$\mp \sqrt{-\frac{H_0 D_1 (n_{+1} - 1)^2}{n_{+1}} + H_0^2 (n_{+1} - 1)^2}.$$

6) $\delta_0 = 0; \quad \delta_2 = -1; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1.$

$$R_0 = \infty,$$
$$R_2 = +H_0(n_{+1} - 1).$$

7) $\delta_0 = +1; \quad \delta_2 = -2; \quad \beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1.$

$$R_0 = +\frac{H_0(n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$
$$R_2 = +\frac{(H_0 - D_1)(n_{+1} - 1)}{n_{+1} - 1}.$$

In dem von uns angenommenen Beispiele, in welchem $n_{+1} = 1.52964$ und $H_0 = 100$ ist, erhalten wir:

Sammellinsen: $\beta_{0,2} = 1$.	Zerstreuungslinsen: $\beta_{0,2} = -1$.
1a)*) $\delta_0 = +2,2;\ \delta_2 = -1,2$	1a)*) $\delta_0 = -2,2;\ \delta_2 = +1,2$
$R_0 = \frac{100\ (0,52964)}{2,2 \times 1,52964} = +15,739$	$R_0 = -\frac{100\ (0,52964)}{2,2 \times 1,52964} = -15,739$
$R_2 = \frac{(100 - 2,2 \times 8)\ 0,52964}{2,2 \times 0,52964 + 1,2} = +18,452.$	$R_2 = -\frac{(100 - 2,2 \times 8)\ (0,52964)}{2,2 \times 0,52964 + 1,2} = -18,452.$
1) $\delta_0 = +2,0;\ \delta_2 = -1,0$	1) $\delta_0 = -2,0;\ \delta_2 = +1,0$
$R_0 = \frac{100\ (0,52964)}{2 \times 1,52964} = +17,3125$	$R_0 = -\frac{100\ (0,52964)}{2 \times 1,52964} = -17,3125$
$R_2 = \frac{(100 - 2 \times 8)\ 0,52964}{2 \times 1,52964 - 1} = +21,605.$	$R_2 = -\frac{(100 - 2 \times 8)\ (0,52964)}{2 \times 1,52964 - 1} = -21,605.$
2) $\delta_0 = +1,0;\ \delta_2 = 0,0$	2) $\delta_0 = -1,0;\ \delta_2 = 0,0$
$R_0 = \frac{100\ (0,52964)}{1,52964} = +34,625$	$R_0 = -\frac{100\ (0,52964)}{1,52964} = -34,625$
$R_2 = 100 - 8 = +92,000.$	$R_2 = -(100 - 8) = -92,000.$
3) $\delta_0 = \frac{1}{n_{+1}};\quad \delta_2 = \frac{n_{+1} - 1}{n_{+1}}$	3) $\delta_0 = -\frac{1}{n_{+1}};\quad \delta_2 = -\frac{n_{+1} - 1}{n_{+1}}$
$R_0 = 100 \times 0,52964 = +52,964$	$R_0 = -100 \times 0,52964 = -52,964$
$R_2 = \infty.$	$R_2 = \infty.$

*) Die Linsenformen 1a) sind als Grenzwerthe für das angenommene Beispiel zugefügt.

Sammellinsen: $\beta_{0,2} = +1$.	Zerstreuungslinsen: $\beta_{0,2} = -1$.
4) $\delta_0 = \delta_2 = 0{,}5$	4) $\delta_0 = \delta_2 = -0{,}5$
$R_0 = \frac{2 \times 100\,(0{,}52964)}{1{,}52964} = +69{,}250$	$R_0 = -\frac{2 \times 100\,(0{,}52964)}{1{,}52964} = -69{,}250$
$R_2 = -\frac{(2 \times 100 - 8)\,(0{,}52964)}{2 - 1{,}52964} = -216{,}195$	$R_2 = -\frac{(2 \times 100 - 8)\,(0{,}52964)}{2 - 1{,}52964} = +216{,}195.$
5) $\delta_0 + \delta_2 = 1;\ R_0 = -R_2$.	5) $\delta_0 + \delta_2 = -1;\ R_0 = -R_2$
$R_0 = -R_2 = 100 \times 0{,}52964 \pm$	$R_0 = -R_2 = -100 \times 0{,}52964 \mp$
$\pm \sqrt{-\frac{100 \times 8 (0{,}52964)^2}{1{,}52964} + 100^2 (0{,}52964)^2} = +104{,}524.$	$\mp \sqrt{-\frac{100 \times 8 (0{,}52964)^2}{1{,}52964} + 100^2 (0{,}52964)^2} = -104{,}524.$
6) $\delta_0 = 0;\ \delta_2 = +1$	6) $\delta_0 = 0;\ \delta_2 = -1$
$R_0 = \infty$	$R_0 = \infty$
$R_2 = -100 \times 0{,}52964 = -52{,}964.$	$R_2 = 100 \times 0{,}52964 = +52{,}964.$
7) $\delta_0 = -1;\ \delta_2 = +2$	7) $\delta_0 = +1;\ \delta_2 = -2$
$R_0 = -\frac{100\,(0{,}52964)}{1{,}52964} = -34{,}625$	$R_0 = \frac{100\,(0{,}52964)}{1{,}52964} = +34{,}625$
$R_2 = -\frac{(100 + 8)\,(0{,}52964)}{2{,}52964} = -22{,}612.$	$R_2 = \frac{(100 + 8)\,(0{,}52964)}{2{,}52964} = +22{,}612.$
7)a*) $\delta_0 = -1{,}2;\ \delta_2 = +2{,}2$	7a)*) $\delta_0 = +1{,}2;\ \delta_2 = -2{,}2$
$R_0 = -\frac{100\,(0{,}52964)}{1{,}83557} = -28{,}854$	$R_0 = \frac{100\,(0{,}52964)}{1{,}83557} = +28{,}854$
$R_2 = -\frac{(100 + 9{,}6)\,(0{,}52964)}{2{,}83557} = -20{,}472.$	$R_2 = \frac{(100 + 9{,}6)\,(0{,}52964)}{2{,}83557} = +20{,}472.$

*) Auch die Linsenformen 7a) sind als Grenzwerthe beigefügt.

Bei der Bestimmung der Form einer Linse ist noch zu beachten, wie gross die benutzbare Oeffnung der Linse sich ergiebt. Es ist nämlich einerseits die Maximalöffnung der Linse durch die Form derselben bedingt; Strahlen mit grösserem Abstande von der Axe als der Halbmesser der Maximalöffnung fallen nicht mehr auf die Linse. Andrerseits können aber auch Strahlen, die auf die Linse treffen, an einer der Linsenflächen total reflectirt werden und tragen dann zum Entwerfen des Bildes durch die Linse nicht mehr bei.

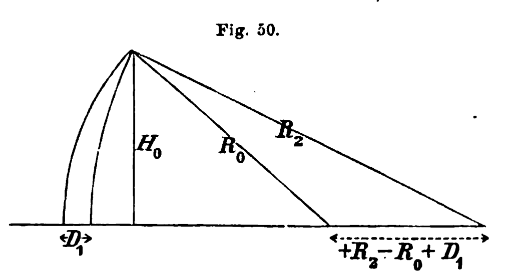
a. Maximalöffnung einer Linse.

Bei Sammellinsen findet man den Halbmesser der Maximalöffnung durch die Formel:

$$H_0 = \frac{2}{\pm R_2 \mp R_0 + D_1} \sqrt{\frac{D_1}{2}\left(\mp R_0 \pm R_2 + \frac{D_1}{2}\right)\left(\pm R_0 - \frac{D_1}{2}\right)\left(\pm R_2 + \frac{D_1}{2}\right)},$$

welche sich aus der nebenstehenden Zeichnung Fig. 50 leicht entwickeln lässt. Diese Gleichung für H_0 ergiebt für $D_1 = +2R_0$ und $D_1 = -2R_2$ den Werth 0, und für $D_1 > 2R_0$, sowie für $D_1 > -2R_2$ verliert die Gleichung ihre Bedeutung. Bei so grossen verwendeten Glasdicken kann man die Linsen, statt mit scharfem Rande, mit einem zur Axe parallelen Cylinder, dessen Maximalöffnung zum Halbmesser den kleinsten der beiden Radien erhält, herstellen. In manchen Fällen ist es zweckmässiger, den cylindrischen Mantel durch einen conischen zu ersetzen. Wir werden später bei den Anwendungen der Linsen zu optischen Instrumenten darauf zurückkommen.

Fig. 50.



Die allgemeine Formel für H_0 geht in speciellen Fällen in eine einfachere Form über, es ist nämlich, wenn:

$$R_0 = \infty,$$

$$H_0 = 2\sqrt{\frac{D_1}{2}\left(\pm R_2 + \frac{D_1}{2}\right)};$$

und ferner, wenn:

$$R_2 = \infty$$

$$H_0 = 2\sqrt{\frac{D_1}{2}\left(\pm R_0 - \frac{D_1}{2}\right)}.$$

In den von uns gewählten Beispielen werden die Maximalöffnungen: für

$R_0 =$	15.739	17.312	34.625	52.964	69.250	104.524	∞	34.625	28.854
$R_2 =$	18.452	21.605	92.000	∞	216.195	104.524	52.964	22.612	20.472

und

$D_1 =$	8	8	8	8	8	8	8	8	8
$H_0 =$	15.705	17.300	25.990	27.990	28.460	28.639	27.990	21.444	19,987

Wir sehen, dass bei Linsen von gleichem Massstabe und gleicher Dicke die gleichseitige Linse die bedeutendste Oeffnung besitzt, und diese immer mehr abnehmen, wenn man die Linse in der einen oder in der anderen Richtung durchbiegt. Auch die Dicke der Linse ist von Einfluss auf die Maximalöffnung derselben. Nehmen wir Linsen von gleichem Massstabe und gleicher Form, lassen jedoch die Dicke sich ändern, von 8 auf 48, 88 und 138.5, so wird:

$R_0 =$	69.25 $O.Z$	69.25 $O.Z$	69.25 $O.Z$	69.25 $O.Z$
$R_2 =$	216.195 $U.Z$	171.153 $U.Z$	126.115 $U.Z$	69.25 $U.Z$
$D_1 =$	8	48	88	138.5
$H_0 =$	28.46	61.136	69.22	69.25.

Wir sehen, dass mit wachsender Linsendicke die Maximalöffnung ebenfalls wächst; wie ja selbstverständlich.

Bei Zerstreuungslinsen ist der Halbmesser der Maximalöffnung übereinstimmend mit dem kleinsten Radius.

b. Verminderung der Maximalöffnung durch totale Reflexion.

In dem Cap. I. S. 3 haben wir angegeben, dass wenn Strahlen aus einem dichtern Medium in ein dünneres übergehen, dieselben total reflectirt werden können, wenn der Einfallswinkel gleich oder grösser als der aus der Gleichung $\sin \varphi_{2r} = \frac{n_{2r+1}}{n_{2r-1}}$ sich ergebende wird, z. B. bei Crownglas vom Brechungsindex für die Farbe H: 1.547 grösser als $40^0\ 16'\ 18''$, bei Flintglas mit dem Brechungsindex 1.671 für die Farbe H grösser als $36^0\ 45'\ 31''$. Bei der trigonometrischen Durchrechnung der Strahlen durch die Linsen erkennt man, ob eine totale Reflexion eintritt daran, dass der Sinus des Brechungswinkels an der letzten Fläche den Werth 1 erreicht hat.

§ 3. **Wahl der zu berechnenden Strahlen.**

Nachdem wir so für eine Linse die Radien gefunden haben, sind die Werthe von: H_0, D_1, n_{+1}, R_0 und R_2 gegeben, und man kann mit Hilfe derselben den Weg aller von einem unendlich entfernten Objectpunkte in der Axe ausgehenden und die Linse treffenden Strahlen trigonometrisch verfolgen. Nehmen wir ausserdem den Winkel τ_0 an, so lassen sich auch die von einem unendlich entfernten, seitlich von der Axe gelegenen zweiten Objectpunkte ausgehenden und die Linse treffenden Strahlen trigonometrisch verfolgen.

Da man selbstverständlich nicht alle Strahlen rechnen kann, ist es wichtig eine solche Wahl zu treffen, welche bei Berechnung möglichst weniger Strahlen gestattet, eine klare Vorstellung von der Beschaffenheit des Bildes zu gewinnen. Zu diesem Zwecke wählen wir aus den vom Objectpunkte in der Axe ausgehenden Strahlen zwei beziehungsweise drei aus und zwar: 1) einen nahe an der Axe und zu derselben parallelen Strahl (Axenstrahl), 2) einen am Rande der wirksamen Oeffnung parallel zur Axe einfallenden (Randstrahl) und eventuell einen diesem parallelen im Abstande $^2/_3$ der wirksamen Oeffnung von der Axe gegen den Rand

einfallenden Strahl ($^2/_3$-Randstrahl). Diese Strahlen, welche bei der ersten Brechung zerlegt werden, verfolgen wir in zwei Farben durch die Linse.

Der Objectpunkt seitlich von der Axe ist durch zwei Winkel bestimmt. Der eine Winkel wird gemessen in der Ebene, welche die optische Axe und den Objectpunkt enthält, und ist derjenige Winkel (τ_0), welchen der von dem Objectpunkte kommende Hauptstrahl mit der optischen Axe bildet. Der zweite Winkel ist derjenige, welchen die Projection des einfallenden Hauptstrahles in einer durch den ersten Hauptpunkt senkrecht zur Axe gelegten Ebene mit der Richtung nach Oben bildet, und zwar von Null nach rechts herum über 90^0, 180^0, 270^0 bis 360^0 zählend. Dieser Winkel (π_0)[1]) wird z. B. gleich 180^0, wenn der seitlich von der Axe gelegene Bildpunkt sich senkrecht unter derselben befindet.

Für den seitlich von der optischen Axe gelegenen Bildpunkt ist zu berechnen: 1) der Hauptstrahl, welcher die Axe des seitlichen Lichtbüschels bildet, 2) der obere und 3) der untere Randstrahl, zwei Strahlen, welche im Mantel des einfallenden Lichtbüschels liegen und parallel zum Hauptstrahle in der gleichen Verticalebene, der eine über, der andere unter demselben einfallen; 4) der Strahl, der ebenfalls parallel zum Hauptstrahle und im Mantel des einfallenden Büschels gelegen ist, und vom oberen und unteren Strahle um je 90^0 entfernt z. B. rechts einfällt; mit diesem Strahle ist der gegenüberliegende linke symmetrisch, weshalb nur einer derselben zu rechnen ist. Die Ebenen, in welchen die Brechungen des letzterwähnten Strahles stattfinden, wechseln von Fläche zu Fläche. Als weitere Strahlen werden eventuell die zu 2) 3) und 4) gehörigen $^2/_3$-Randstrahlen gerechnet. Für eine zweite Farbe ausser der Axe zu rechnen ist im Allgemeinen nicht nöthig, insbesondere wenn die verschiedenfarbigen Strahlen gleiche Brennpunkte und gleiche Brennweiten haben. Bei ausgedehntem Gesichtsfelde ist eventuell ein dritter, ebenfalls seitlich von der Axe gelegener Bildpunkt zu rechnen, um die Zwischenfehler kennen zu lernen.

§ 4. Feststellung der Unsicherheitsgrenzen in der Rechnung.

Bei der nun zu beginnenden trigonometrischen Durchrechnung ist zuerst der Entscheid darüber zu treffen, mit wieviel Stellen gerechnet werden soll, wobei als Regel zu nehmen ist, nicht mehr Stellen in der Rechnung beizubehalten, als es für die geforderte Genauigkeit der Resultate von Werth ist. Rechnen wir z. B. mit fünfstelligen Logarithmen, so müssen wir sehen, welche Genauigkeit wir im Resultate erzielen können. Es müssen dabei für die Zahlen, welche in die Rechnung eingehen, so viele Stellen geschrieben werden, dass die Vernachlässigung höchstens fünf Einheiten der 6ten Stelle beim Logarithmus entspricht, z. B. für den Logarithmus 0,18459 müssen wir dem Numerus 6 Stellen geben, nämlich die Zahl 1.52964 setzen; denn würden wir nur die ersten fünf Stellen,

1) Die Ebene, in welcher der Winkel (π_0) gemessen wird, kann bei immer senkrechter Lage zur optischen Axe eine andere Stellung annehmen, z. B. auch mit einer Mittelpunktsebene zusammenfallen, wodurch die oben gegebene Definition des Winkels π_0 mit der von *Seidel* bei der Entwickelung seiner trigonometrischen Formeln gegebenen übereinstimmt.



also 1.5296 nehmen, so entspräche diese Zahl einer Vernachlässigung im Logarithmus von 12.1 Einheiten der 6ten Stelle, da der Logarithmus von 1.5296 gleich 0.1845779 wäre. Darnach ist klar, dass bei allen Zahlen, die kleiner als 43455, bei welcher Zahl die Differenz der siebenstelligen Logarithmen für die Einheit der 5ten Stelle 100, für fünfstellige 1 wird, im Numerus 6 Stellen aufgeschlagen werden müssen, während es bei allen grösseren Zahlen werthlos sein würde, noch eine sechste Stelle aufzuschlagen, es genügen dann die fünf ersten Stellen.

Wichtiger noch ist es, beim Aufschlagen der Winkel immer die richtige Stellenzahl zu benutzen, und ist hierbei von Fall zu Fall zu constatiren, wie weit die Winkel aufzuschlagen sind, d. h. ob auf 10″ abzurunden, ob ganze Secunden noch zu nehmen, oder ob es nöthig ist auch die Zehntel aufzuschlagen. Für die Axenstrahlen gelten diese Rücksichten nicht, weil in der Rechnung derselben keine Winkel sondern Bogen vorkommen, dagegen ist jener Entscheid bei den Randstrahlen zu treffen. Wir entscheiden zuerst aus dem totalen Ablenkungswinkel der Linse, aus dem Winkel $\beta_{0,2}$ welchem Winkel eine Einheit der 5ten Stelle in Secunden entspricht. Es sei z. B. $\sin \beta_{0,2} = \frac{H_0}{F'_{0,2}} = \frac{15}{100}$, so ist $\log \sin \beta_{0,2} = 9.17609$; $\beta_{0,2} = 8^0\ 37'\ 37'' = 31057''$, wobei 1″ 13.88 Einheiten der sechsten Stelle im Logarithmus, also fünf Einheiten der sechsten Stelle im Logarithmus 0″.36 entsprechen; oder wenn $\sin \beta_{0,2} = \frac{10}{100}$, $\log \sin \beta_{0,2} = 9.00000$; $\beta_{0,2} = 5^0\ 44''\ 21''.0 = 20661''$, wobei fünf Einheiten der sechsten Stelle 0″.24 entsprechen; oder endlich $\sin \beta_{0,2} = \frac{6.6667}{100}$, $\log \sin \beta_{0,2} = 8.82391$, $\beta_{0,2} = 3^0\ 49'\ 21''.2 = 13761''.2$, so dass fünf Einheiten der sechsten Stelle 0″.16 entsprechen. Man muss somit im ersten Falle noch halbe, in den beiden letzten Fällen zehntel Secunden aufschlagen.

Hiermit wäre der Winkelwerth bestimmt, der im Resultate eine Sicherheit gewährt, die fünf Einheiten der sechsten Stelle entspricht, wenn jener Winkel der Gesammtablenkung der Linse der grösste der vorkommenden Winkel wäre. Diese Sicherheit kann aber dadurch geringer werden, dass bei einzelnen Brechungen grössere Winkel vorkommen, als die Gesammtablenkung ist, die der Strahl erfährt. Es ist zu constatiren, welcher Winkelgrösse fünf Einheiten der sechsten Stelle beim grössten vorkommenden Winkel entsprechen. In den oben erwähnten Fällen seien die grössten Winkel $12^0\ 38'\ 44''$, beziehungsweise $8^0\ 20'\ 31''.1$ und $5^0\ 32'\ 9''.3$, so sind die Logarithmen sinus 9.34028, 9.16175 und 8.984 39, und es entsprechen fünf Einheiten der sechsten Stelle 0″.5, 0″.35 und 0″.23. Es hat nun keinen Werth den Winkel genauer aufzuschlagen, als der hierdurch gegebenen Unsicherheit entspricht; es ist aber dann das Resultat nur in dieser Ordnung sicher, also in den erwähnten Fällen bis auf 1″ beziehungsweise 0″.5. Wäre der grösste vorkommende Winkel 30^0 gewesen, so würde eine Vernachlässigung von fünf Einheiten der sechsten Stelle schon 1″.4 ausmachen und die Unsicherheit im Resultate würde dadurch 3″ betragen. Müsste man bei dem Resultate noch eine Secunde sicher haben, so wäre, wegen des vorkommenden grossen Winkels, mit sechsstelligen Logarithmen zu rechnen.

§ 5. Formeln für die trigonometrische Durchrechnung von Axen- und Randstrahlen durch eine Linse.

Zur Durchrechnung der Strahlen durch eine Linse benützen wir die leicht zu entwickelnden trigonometrischen Formeln. Bei dem Uebergange von einer Brechung zu einer anderen kann man entweder die Längendimensionen in der Richtung der Axe (Vereinigungsweiten) oder die senkrecht zu derselben (Höhen) einführen. Im Allgemeinen gestalten sich die ersteren Formeln etwas einfacher, doch geben sie in dem Falle, dass grosse Radien der Linsen vorkommen, eine geringere Genauigkeit, weshalb man in dem letzteren Falle die Höhenformeln anwendet. Wenn die erste oder letzte Fläche plan ist, werden diese Höhenformeln etwas einfacher. Wir geben im Folgenden eine Zusammenstellung dieser verschiedenen Formeln.

A. Für irgend einen parallel zur Axe auf die Linse einfallenden Strahl erhält man

I. Wenn kein Radius sehr gross ist.	II. Wenn ein Radius gross ist. 1)
1) $\sin\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$,	1) $\sin\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$,
2) $\sin\varphi_0' = \frac{n_{-1}}{n_{+1}}\sin\varphi_0$,	2) $\sin\varphi_0' = \frac{n_{-1}}{n_{+1}}\sin\varphi_0$,
	3) $\eta_0 = \varphi_0$,
3) $\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$,	4) $\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$,
4) $A_0' \mp R_0 = \pm R_0 \frac{\sin\varphi_0'}{\sin\beta_{0,0}}$,	5) $A_0' = \frac{H_0}{\operatorname{tg}\beta_{0,0}} \pm 2R_0\sin^2\frac{\eta_0}{2}$,
5) $\sin\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_0 \pm R_0 \mp R_2 - D_1)\sin\beta_{0,0}}{\pm R_2}$,	6) $\sin\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\sin\beta_{0,0}}{\pm R_2}$,
6) $\sin\varphi_2' = \frac{n_{+1}}{n_{+3}}\sin\varphi_2$,	7) $\sin\varphi_2' = \frac{n_{+1}}{n_{+3}}\sin\varphi_2$,
7) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$,	8) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$,
8) $\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$,	9) $\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$,
	10) $\eta_2 = \varphi_2 + \beta_{0,0}$,

1) Die Höhenformeln sind auch dann anzuwenden, wenn man die Höhen, in welchen die Linsenfläche getroffen werden, kennen muss. Z. B. zur Ermittelung der Dicken, die das nöthige Oeffnungsmass der Linse bedingen.

I. Wenn kein Radius sehr gross ist.	II. Wenn ein Radius gross ist.[1])
	11) $H_2 = \left(A_0' - D_1 \mp 2R_2 \sin^2\frac{\eta_2}{2}\right) \operatorname{tg}\beta_{0,0}$,
9) $A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin\varphi_2}{\sin\beta_{0,2}}$,	12) $A_2' = \frac{H_2}{\operatorname{tg}\beta_{0,2}} \pm 2R_2 \sin^2\frac{\eta_2}{2}$,
10) $F_{0,2} = \frac{H_0}{\operatorname{tg}\beta_{0,2}}$,	13) $F_{0,2} = \frac{H_0}{\operatorname{tg}\beta_{0,2}}$,
11) $E_{0,2} = A_2' - F$.	14) $E_{0,2} = A_2' - F$.

III. Wenn die erste Fläche plan ist.	IV. Wenn die zweite Fläche plan ist.
	1) $\sin\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$,
	2) $\sin\varphi_0' = \frac{n_{-1}}{n_{+1}} \sin\varphi_0$,
	3) $\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$,
1) $\sin\varphi_2 = \frac{H_0}{\pm R_2}$,	4) $\sin\varphi_2 = \sin\beta_{0,0}$,
2) $\sin\varphi_2' = \frac{n_{+1}}{n_{+3}} \sin\varphi_2$,	5) $\sin\varphi_2' = \frac{n_{+1}}{n_{+3}} \sin\varphi_2$,
3) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$,	6) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$,
4) $\beta_{0,2} = \delta_2$,	7) $\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$,
5) $A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin\varphi_2}{\sin\beta_{0,2}}$,	8) $A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin\varphi_2}{\sin\beta_{0,2}'}$,
6) $F_{0,2} = \frac{H_0}{\operatorname{tg}\beta_{0,2}}$,	9) $F_{0,2} = \frac{H_0}{\operatorname{tg}\beta_{0,2}}$,
7) $E_{0,2} = A_2' - F$.	10) $E_{0,2} = A_2' - F$.

Ist der zur Axe parallele Strahl sehr nahe der Axe einfallend, wobei die vorkommenden Winkel so klein sind, dass für ihre Sinus die Bogen gesetzt werden dürfen, so werden die oben angegebenen Formeln etwas einfacher, man erhält somit:

B. Für einen nahe an der optischen Axe einfallenden zu dieser parallelen Strahl:

---

1) Die Höhenformeln sind auch dann anzuwenden, wenn man die Höhen, in welchen die Linsenfläche getroffen werden, kennen muss. Z. B. zur Ermittelung der Dicken, die das nöthige Oeffnungsmass der Linse bedingen.

I. Wenn kein Radius sehr gross ist.

1) $\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$;

2) $\varphi_0' = \frac{n_{-1}}{n_{+1}} \varphi_0$,

3) $\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$,

4) $A_0' = \pm R_0 \pm \frac{R_0 \varphi_0'}{\beta_{0,0}}$,

5) $\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\, \beta_{0,0}}{\pm R_2}$,

6) $\varphi_2' = \frac{n_{+1}}{n_{+3}} \varphi_2$,

7) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$,

8) $\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$,

9) $A_2' = \pm R_2 \pm R_2 \frac{\varphi_2'}{\beta_{0,2}}$,

10) $F_{0,2} = \frac{H_0}{\beta_{0,2}}$,

11) $E_{0,2} = A_2' - F$.

II. Wenn die Radien gross sind [1])

1) $\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$,

2) $\varphi_0' = \frac{n_{-1}}{n_{+1}} \varphi_0$,

3) $\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$,

4) $A_0' = \frac{H_0}{\beta_{0,0}}$,

5) $\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\, \beta_{0,0}}{\pm R_2}$,

6) $\varphi_2' = \frac{n_{+1}}{n_{+3}} \varphi_2$,

7) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$,

8) $\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$,

9) $H_0 = (A_0' - D_1)\, \beta_{0,0}$,

10) $A_2' = \frac{H_2}{\beta_{0,2}}$,

11) $F_{0,2} = \frac{H_0}{\beta_{0,2}}$,

12) $E_{0,2} = A_2' - F$.

III. Wenn die erste Fläche plan ist.

1) $\varphi_2 = \frac{H_0}{\pm R_2}$,

2) $\varphi_2' = \frac{n_{+1}}{n_{+3}} \varphi_2$,

IV. Wenn die zweite Fläche plan ist.

1) $\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$,

2) $\varphi_0' = \frac{n_{-1}}{n_{+1}} \varphi_0$,

3) $\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$,

4) $\varphi_2 = \beta_{0,0}$,

5) $\varphi_2' = \frac{n_{+1}}{n_{+3}} \varphi_2$,

1) Die Höhenformeln sind auch dann anzuwenden, wenn man die Höhen, in welchen die Linsenflächen getroffen werden, kennen muss. Z. B. zur Ermittelung der Dicken, die das nöthige Oeffnungsmass der Linse bedingen.

III. Wenn die erste Fläche plan ist.	IV. Wenn die zweite Fläche plan ist.
3) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$,	6) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$,
4) $\beta_{0,2} = \delta_2$,	7) $\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$,
5) $A_2' = \pm R_2 \pm R_2 \dfrac{\varphi_2'}{\beta_{0,2}}$,	8) $A_2' = \pm R_2 \pm R_2 \dfrac{\varphi_2'}{\beta_{0,2}}$,
6) $F_{0,2} = \dfrac{H_0}{\beta_{0,2}}$,	9) $F_{0,2} = \dfrac{H_0}{\beta_{0,2}}$,
7) $E_{0,2} = A_2' - F$.	10) $E_{0,2} = A_2' - F$.

§ 6. Rechnungsbeispiele für Axen- und Randstrahlen.

Als Beispiele für die Rechnung wählen wir drei Sammellinsen, nämlich eine, bei welcher die Ablenkungen an beiden Flächen die gleichen sind, ferner eine Linse mit einem langen Radius, und endlich eine mit einer Planfläche.

I. Sammellinse aus Crownglas mit den Brechungsindices $n_{-1} = n_{+3} = 1$; ${}_Dn_{+1} = 1.529\,64$ und ${}_Fn_{+1} = 1.536\,39$; die totale Ablenkung der Linse $\beta_{0,2}$ sei gleich 1, die Ablenkungen an beiden Flächen δ_0 und δ_2 einander gleich und zwar 0.5. Die Linsendicke $D_1 = 8$. Die Radien ergeben sich, wie oben schon nachgewiesen, zu $R_0 = 69.250$ *O.Z.* und $R_2 = 216.195$ *U.Z.*

Vor Allem rechnen wir einen Axenstrahl und zwar zuerst den der Linie D entsprechenden durch die Linse; wir bedienen uns dabei der Formeln I., in welchen keine Höhen berechnet sind, weil in diesem Falle die Linse keinen grossen Radius hat. Zum Vergleiche setzen wir die durch die Höhenformeln gewonnenen Resultate neben die mit den anderen Formeln erhaltenen, in welchen die Höhen nicht vorkommen. In einigen Fällen ist die grössere Genauigkeit der Höhenformeln erkennbar. Ausser dem oben genannten Axenstrahle rechnen wir auch gleich den der Linie F entsprechenden Axenstrahl; und endlich, um den ersten Hauptpunkt der Linse zu finden, auch den für die Linie D geltenden Axenstrahl in umgekehrter Richtung durch die Linse; in letzterem Falle ist $R_0 = 216.195$ *O.Z.* und $R_2 = 69.250$ *U.Z.* zu setzen.

Crown: ${}_D n_{+1} = 1.529\,64$ $\log {}_D n_{+1} = 0.184\,59.$ ${}_F n_{+1} = 1.536\,39$ $\log {}_F n_{+1} = 0.186\,50.$ $D_1 = 8.$ $R_0 = 69.250$ *O. Z.* $\log R_0 = 1.84042$ *O. Z.* $R_2 = 216.195$ *U. Z.* $\log R_2 = 2.33485$ *U. Z.*

Axenstrahlen.

D				*F*		Linse umgekehrt *D*	
$\log H_0 =$	2.000 00			$\log H_0 =$	2.000 00	$\log H_2 =$	2.000 00
$\log(1:\pm R_0) =$	8.159 58			$\log(1:\pm R_0) =$	8.159 58	$\log(1:\pm R_2) =$	7.665 15
$\log \varphi_0 =$	0.159 58			$\log \varphi_0 =$	0.159 58	$\log \varphi_2 =$	9.665 15
$\log(n_{-1}:n_{+1}) =$	9.815 41			$\log(n_{-1}:n_{+1}) =$	9.813 50	$\log(n_{+3}:n_{+1}) =$	9.815 41
$\log \varphi_0' =$	9.974 99			$\log \varphi_0' =$	9.973 08	$\log \varphi_2' =$	9.480 56
$\varphi_0 =$	1.444 04			$\varphi_0 =$	1.444 04	$\varphi_2 =$	0.462 54
$-\varphi_0' =$	− 0.944 04			$-\varphi_0' =$	− 0.939 90	$-\varphi_2' =$	− 0.302 38
$\delta_0 = \beta_{0,0} =$	0.500 00			$\delta_0 = \beta_{0,0} =$	0.504 14	$\delta_2 = \beta_{2,2} =$	0.160 16
$\log \beta_{0,0} =$	9.698 97			$\log \beta_{0,0} =$	9.702 55	$\log \beta_{2,2} =$	9.204 54
$\log(1:\beta_{0,0}) =$	0.301 03	$\log(1:\beta_{0,0}) =$	0.301 03	$\log(1:\beta_{0,0}) =$	0.297 45	$\log(1:\beta_{2,2}) =$	0.795 46
$\log(\pm R_0) =$	1.840 42	$\log H_0 =$	2.000 00	$\log(\pm R_0) =$	1.840 42	$\log(\pm R_2) =$	2.334 85
$\log \varphi_0' =$	9.974 99	$\log A_0' =$	2.301 03	$\log \varphi_0' =$	9.973 08	$\log \varphi_2' =$	9.480 56
$\log(A_0' \mp R_0) =$	2.116 44			$\log(A_0' \mp R_0) =$	2.110 95	$\log(A_2' \mp R_2) =$	2.610 87
		$A_0' =$	200.000				
$A_0' \mp R_0 =$	130.750	$\mp R_2 - D_1 =$	208.195	$A_0' \mp R_0 =$	129.107	$A_2' \mp R_2 =$	408.205
$\pm R_0 \mp R_2 - D_1 =$	277.445	$A_0' \mp R_2 - D_1 =$	408.195	$\pm R_0 \mp R_2 - D_1 =$	277.445	$\pm R_2 \mp R_0 - D_1 =$	277.445
$A_0' \mp R_2 - D_1 =$	408.195			$A_0' \mp R_2 - D_1 =$	406.552	$A_2' \mp R_0 - D_1 =$	685.650
$\log(A_0' \mp R_2 - D_1) =$	2.610 87			$\log(A_0' \mp R_2 - D_1) =$	2.609 12	$\log(A_2' \mp R_0 - D_1) =$	2.836 10
$\log \beta_{0,0} =$	9.698 97			$\log \beta_{0,0} =$	9.702 55	$\log \beta_{2,2} =$	9.204 54
$\log(1:\pm R_2) =$	7.665 15*n*			$\log(1:\pm R_2) =$	7.665 15*n*	$\log(1:\pm R_0) =$	8.159 58*n*
$\log \varphi_2 =$	9.974 99*n*			$\log \varphi_2 =$	9.976 82*n*	$\log \varphi_0 =$	0.200 22*n*
$\log(n_{+1}:n_{+3}) =$	0.184 59			$\log(n_{+1}:n_{+3}) =$	0.186 50	$\log(n_{+1}:n_{+3}) =$	0.184 59
$\log \varphi_2' =$	0.159 58*n*			$\log \varphi_2' =$	0.163 32*n*	$\log \varphi_0' =$	0.384 81*n*

6*

Crown: ${}_D n_{+1} = 1.529\,64$ $\log {}_D n_{+1} = 0.184\,59.$ $D_1 = 8.$ $R_0 = 69.250$ *O. Z.* $\log R_0 = 1.840\,42$ *O. Z.*
${}_F n_{+1} = 1.536\,39$ $\log {}_F n_{+1} = 0.186\,50.$ $R_2 = 216\,195$ *U. Z.* $\log R_2 = 2.334\,85$ *U. Z.*

Axenstrahlen.

D		*F*	Linse umgekehrt *D*
$\varphi_2 = -0.944\,04$		$\varphi_2 = -0.948\,03$	$\varphi_0 = -1.585\,70$
$-\varphi_2' = 1.444\,04$		$-\varphi_2' = 1.456\,53$	$-\varphi_0' = 2.425\,55$
$\delta_2 = 0.500\,00$		$\delta_2 = 0.508\,50$	$\delta_0 = 0.839\,85$
$\delta_0 = 0.500\,00$		$\delta_0 = 0.504\,14$	$\delta_2 = 0.160\,16$
$\beta_{0,2} = 1.000\,00$		$\beta_{0,2} = 1.012\,64$	$\beta_{2,0} = 1.000\,01$
$\log \beta_{0,2} = 0.000\,00$	$A_0' - D_1 = 192.000$	$\log \beta_{0,2} = 0.005\,46$	$\log \beta_{2,0} = 0.000\,00$
$\log (1:\beta_{0,2}) = 0.000\,00$	$\log (A_0' - D_1) = 2.283\,30$	$\log (1:\beta_{0,2}) = 9.994\,54$	$\log (1:\beta_{2,0}) = 0.000\,00$
$\log (\pm R_2) = 2.334\,85n$	$\log \beta_{0,0} = 9.698\,97$	$\log (\pm R_2) = 2.334\,85n$	$\log (\pm R_0) = 1.840\,42n$
$\log \varphi_2' = 0.159\,58n$	$\log H_2 = 1.982\,27$	$\log \varphi_2' = 0.163\,32n$	$\log \varphi_0' = 0.384\,81n$
$\log (A_2' \mp R_2) = 2.494\,43$	$\log (1:\beta_{0,2}) = 0.000\,00$	$\log (A_2' \mp R_2) = 2.492\,71$	$\log (A_0' \mp R_0) = 2.225\,23$
	$\log A_2' = 1.982\,27$		
$A_2' \mp R_2 = 312.195$		$A_2' \mp R_2 = 310.963$	$A_0' \mp R_0 = 167.969$
$\pm R_2 = -216.195$		$\pm R_2 = -216.195$	$\pm R_0 = -69.250$
$A_2' = 96.000$	$A_2' = 96.000$	$A_2' = 94.768$	$A_0' = 98.719$
$\log H_0 = 2.000\,00$		$\log H_0 = 2.000\,00$	$\log H_2 = 2.000\,00$
$\log (1:\beta_{0,2}) = 0.000\,00$		$\log (1:\beta_{0,2}) = 9.994\,54$	$\log (1:\beta_{2,0}) = 0.000\,00$
$\log F_{0,2} = 2.000\,00$		$\log F_{0,2} = 1.994\,54$	$\log F_{2,0} = 2.000\,00$
$F_{0,2} = 100.000$		$F_{0,2} = 98.751$	$F_{2,0} = 100.000$
$A_2' = 96.000$		$A_2' = 94.768$	$A_0' = 98.719$
$-F_{0,2} = -100.000$		$-F_{0,2} = -98.751$	$-F_{2,0} = -100.000$
$E_{0,2} = -4.000$		$E_{0,2} = -3.983$	$E_{2,0} = -1.281$

Als Randstrahlen nehmen wir den unter $H_0 = 15$ zur Axe parallel einfallenden Strahl, und rechnen für die beiden Farben D und F; ebenso den $^2/_3$-Randstrahl, für welchen $H_0 = 10$, auch für die beiden Farben D und F.

	Randstrahl, $H = 15$.		$^2/_3$-Randstrahl, $H = 10$.	
	D	F	D	F
$\log H_0$	1.176 09	1.176 09	1 000 00	1.000 00
$\log (1 : \pm R_0)$	8.159 58	8.159 58	8 159 58	8.159 58
$\log \sin \varphi_0$	9.335 67	9 335 67	9 159 58	9.159 58
$\log (n_{-1} : n_{+1})$	9.815 41	9.813 50	9.815 41	9.813 50
$\log \sin \varphi_0'$	9.151 08	9.149 17	8.974 99	8.973 08
φ_0	12° 30′ 35″	12° 30′ 35″	8° 18′ 10″.0	8° 18′ 10″.0
$-\varphi_0'$	− 8 8 27	− 8 6 17	− 5 25 1.2	− 5 23 35.4
$\delta_0 = \beta_{0,0}$	4 22 8	4 24 18	2 53 8.8	2 54 34.6
$\log \sin \beta_{0,0}$	8.881 83	8.885 40	8.701 96	8.705 53
$\log (1 : \sin \beta_{0,0})$	1.118 17	1 114 60	1.298 04	1.294 47
$\log \sin \varphi_0'$	9.151 08	9.149 17	8.974 99	8.973 08
$\log (\pm R_0)$	1.840 42	1.840 42	1.840 42	1.840 42
$\log (A_0' \mp R_0)$	2.109 67	2.104 19	2.113 45	2.107 97
$A_0' \mp R_0$	128.727	127.113	129.852	128.224
$\pm R_0 \mp R_2 - D_1$	277.447	277.447	277.447	277.447
$A_0' \mp R_2 - D_1$	406.174	404.560	407.299	405.671
$\log (A_0' \mp R_2 - D_1)$	2.608 71	2.606 98	2.609 91	2.608 17
$\log \sin \beta_{0,0}$	8.881 83	8.885 40	8.701 96	8.705 53
$\log (1 : \pm R_2)$	7.665 15 *n*	7.665 15 *n*	7.665 15 *n*	7.665 15 *n*
$\log \sin \varphi_2$	9.155 69 *n*	9.157 53 *n*	8.977 02 *n*	8.978 85 *n*
$\log (n_{+1} : n_{+3})$	0.184 59	0.186 50	0.184 59	0.186 50
$\log \sin \varphi_2'$	9.340 28 *n*	9.344 03 *n*	9.161 61 *n*	9.165 35 *n*

	Randstrahl, $H = 15$.		²/₃-Randstrahl, $H = 10$.	
	D	F	D	F
φ_2	— 8° 13′ 42″	— 8° 15′ 48″	— 5° 26′ 32″.9	— 5° 27′ 55″.9
$-\varphi_2'$	12 38 44	12 45 25	8 20 31.1	8 24 52.7
δ_2	4 25 2	4 29 37	2 53 58.2	2 56 56.8
δ_0	4 22 8	4 24 18	2 53 8.8	2 54 34.6
$\beta_{0,2}$	8 47 10	8 53 55	5 47 7.0	5 51 31.4
$\log \sin \beta_{0,2}$	9.183 97	9.189 45	9.003 46	9.008 92
$\log (1 : \sin \beta_{0,2})$	0.816 03	0.810 55	0.996 54	0.991 08
$\log \sin \varphi_2'$	9.340 28 *n*	9.344 03 *n*	9.161 61 *n*	9.165 35 *n*
$\log (\pm R_2)$	2.334 85 *n*	2.334 85 *n*	2.334 85 *n*	2.334 85 *n*
$\log (A_2' \mp R_2)$	2 491 16	2.489 43	2.493 00	2.491 28
$A_2' \mp R_2$	309.856	308 624	311.172	309.942
$\pm R_2$	— 216.197	— 216.197	— 216.197	— 216.197
A_2'	93.659	92.427	94.975	93.745
$\log H_0$	1.176 09	1.176 09	1.000 00	1.000 00
$\log (1 : \operatorname{tg} \beta_{0,2})$	0.810 90	0.805 29	0.994 32	0.988 80
$\log F_{0,2}$	1.986 99	1.981 38	1.994 32	1.988 80
$F_{0,2}$	97.0488	95.803	98.701	97.454
A_2'	93 659	92.427	94.975	93.745
$-F_{0,2}$	— 97.049	— 95.803	— 98.701	— 97.454
$E_{0,2}$	— 3.390	— 3.376	— 3.726	— 3.709

II. Sammellinse aus Crownglas mit den Brechungsindices $n_{-1} = n_{+3} = 1$, ${}_D n_{+1} = 1.52964$ und ${}_F n_{+1} = 1.53639$. Die totale Ablenkung der Linse $\beta_{0,2}$ sei gleich 1. Der erste Radius R_0 sei gleich 53.0 *O. Z.*, der zweite R_2 sehr gross, nämlich 72 748; die Dicke der Linse $D_1 = 8$.

Crown: ${}_{D}n_{+1} = 1.529\,64$ $\log {}_{D}n_{+1} = 0.184\,59$ $D_1 = 8$; $R_0 = 53.0$ *O. Z.* $\log R_0 = 1.724\,28$ *O. Z.*
${}_{F}n_{+1} = 1.536\,39$ $\log {}_{F}n_{+1} = 0.186\,50$ $R_2 = 72\,748.0$ *U. Z.* $\log R_2 = 4.861\,82$ *U. Z.*

Axenstrahl: *D*.								Axenstrahl: *F*.	
$R_0 = 53.0$, $R_2 = 72\,748.0$				Linse umgekehrt: $R_0 = 72\,748.0$, $R_2 = 53.0$					
$\log H_0$	2.000 00			$\log H_0$	2.000 00			$\log H_0$	2.000 00
$\log(1:\pm R_0)$	8.275 72			$\log(1:\pm R_0)$	5.138 18			$\log(1:\pm R_0)$	8.275 72
$\log \varphi_0$	0.275 72			$\log \varphi_0$	7.138 18			$\log \varphi_0$	0.275 72
$\log(n_{-1}:n_{+1})$	9.815 41			$\log(n_{-1}:n_{+1})$	9.815 41			$\log(n_{-1}:n_{+1})$	9.813 50
$\log \varphi_0'$	0.091 13			$\log \varphi_0'$	6.953 59			$\log \varphi_0'$	0.089 22
φ_0	1.886 8			φ_0	0.001 3746			φ_0	1.8868
$-\varphi_0'$	− 1.233 5			$-\varphi_0'$	−0.000 8987			$-\varphi_0'$	− 1.2281
$\delta_0 = \beta_{0,0}$	0.653 3			$\delta_0 = \beta_{0,0}$	0.000 4759			$\delta_0 = \beta_{0,0}$	0.6587
$\log \beta_{0,0}$	9.815 11			$\log \beta_{0,0}$	6.677 52			$\log \beta_{0,0}$	9.818 69
$\log(1:\beta_{0,0})$	0.184 89	$\log(1:\beta_{0,0})$	0.184 89	$\log(1:\beta_{0,0})$	3 322 48	$\log(1:\beta_{0,0})$	3.322 48	$\log(1:\beta_{0,0})$	0.181 31
$\log H_0$	2.000 00	$\log \varphi_0'$	0.091 13	$\log H_0$	2.000 00	$\log \varphi_0'$	6.953 59	$\log H_0$	2.000 00
$\log A_0'$	2.184 89	$\log(\pm R_0)$	1.724 28	$\log A_0'$	5.322 48	$\log(\pm R_0)$	4.861 82	$\log A_0'$	2 181 31
		$\log(A_0' \mp R_0)$	2.000 30			$\log(A_0' \mp R_0)$	5.137 89		
A_0'	153.07			A_0'	210 126.0			A_0'	151.8
$\mp R_2 - D_1$	72 740.00	$A_0' \mp R_0$	100.07	$\mp R_2 - D_1$	45 0	$A_0' \mp R_0$	137 369.5	$\mp R_2 - D_1$	72 740.0
$A_0' \mp R_2 - D_1$	72 893.07	$\pm R_0 \mp R_2 - D_1$	72 793.00	$A_0' \mp R_2 - D_1$	210 171.0	$\pm R_0 \mp R_2 - D_1$	72 793.0	$A_0' \mp R_2 - D_1$	72 891.8
		$A_0' \mp R_2 - D_1$	72 893.07			$A_0' \mp R_2 - D_1$	210162.5		
$\log (A_0' \mp R_2 - D_1)$	4.862 69	$\log (A_0' \mp R_2 - D_1)$	4.862 69	$\log (A_0' \mp R_2 - D_1)$	5.322 57	$\log (A_0' \mp R_2 - D_1)$	5.322 56	$\log (A_0' \mp R_2 - D_1)$	4.862 68
$\log \beta_{0,0}$	9.815 11			$\log \beta_{0,0}$	6.677 52			$\log \beta_{0,0}$	9.818 69
$\log(1:\pm R_2)$	5.138 18*n*			$\log(1:\pm R_2)$	8.275 72*n*			$\log(1:\pm R_2)$	5.138 18*n*
$\log \varphi_2$	9.815 98*n*			$\log \varphi_2$	0.275 81*n*			$\log \varphi_2$	9.819 55*n*
$\log(n_{+1}:n_{+3})$	0.184 59			$\log(n_{+1}:n_{+3})$	0.184 59			$\log(n_{+1}:n_{+3})$	0.186 50
$\log \varphi_2'$	0.000 57*n*			$\log \varphi_2'$	0.460 40*n*			$\log \varphi_2'$	0.006 05*n*

Crown: ${}_D n_{+1} = 1.529\,64$ $\log {}_D n_{+1} = 0.184\,59$ $D_1 = 8;$ $R_0 = 53.0$ *O. Z.* $\log R_0 = 1.724\,28$ *O. Z.*
${}_F n_{+1} = 1.536\,39$ $\log {}_F n_{+1} = 0.186\,50$ $R_2 = 72\,748.0$ *U. Z.* $\log R_2 = 4.861\,82$ *U. Z.*

Axenstrahl: *D.*								Axenstrahl: *F.*	
$R_0 = 53.0$, $R_2 = 72\,748.0$				Linse umgekehrt: $R_0 = 72\,748.0$, $R_2 = 53.0$					
φ_2	-0.6546			φ_2	$-1.887\,17$			φ_2	$-0.660\,01$
$-\varphi_2'$	1.0013			$-\varphi_2'$	2.886 69			$-\varphi_2'$	1.014 03
δ_2	0.3467			δ_2	0.999 52			δ_2	0 354 02
δ_0	0.6533			δ_0	0.000 48			δ_0	0.658 70
$\beta_{0,2}$	1 0000			$\beta_{0,2}$	1.000 00			$\beta_{0,2}$	1 012 72
$A_0' - D_1$	145.07			$A_0' - D_1$	210 118.0			$A_0' - D_1$	143.813
$\log(A_0' - D_1)$	2.161 58	$\log(1:\beta_{0,2})$	0.000 00	$\log(A_0' - D_1)$	5.322 46	$\log(1:\beta_{0,2})$	0.000 00	$\log(A_0' - D_1)$	2.157 80
$\log \beta_{0,0}$	9.815 11	$\log \varphi_2'$	0.000 57*n*	$\log \beta_{0,0}$	6.677 52	$\log \varphi_2'$	0.460 40*n*	$\log \beta_{0,0}$	9.818 69
$\log H_2$	1.976 69	$\log \pm R_2$	4.861 82*n*	$\log H_2$	1.999 98	$\log \pm R_2$	1.724 28*n*	$\log H_2$	1.976 49
$\log(1:\beta_{0,2})$	0.000 00	$\log(A_2' \mp R_2)$	4.862 39	$\log(1:\beta_{0,2})$	0.000 00	$\log(A_2' \mp R_2)$	2.184 68	$\log(1:\beta_{0,2})$	9.994 51
$\log A_2'$	1.976 69			$\log A_2'$	1.999 98			$\log A_2'$	1 971 00
		$A_2' \mp R_2$	72 843.0			$A_2' \mp R_2$	152.976		
A_2'	94.774	$\pm R_2$	72 748.0	A_2'	99.9954	$\pm R_2$	53.000	A_2'	93.5405
		A_2'	95.0			A_2'	99.996		
$\log H_0$	2.000 00			$\log H_0$	2.000 00			$\log H_0$	2.000 00
$\log(1:\beta_{0,2})$	0.000 00			$\log(1:\beta_{0,2})$	0.000 00			$\log(1:\beta_{0,2})$	9.994 51
$\log F_{0,2}$	2.000 00			$\log F_{0,2}$	2.000 00			$\log F_{0,2}$	1.994 51
A_2'	94.774			A_2'	99.9954			A_2'	93.5405
$-F_{0,2}$	-100.000			$-F_{0,2}$	-100.0000			$-F_{0,2}$	-98.744
$E_{0,2}$	-5.226			$E_{0,2}$	-0.0046			$E_{0,2}$	-5.2035

	Randstrahl, $H_0 = 15$.		$^2/_3$-Randstrahl, $H_0 = 10$.	
	D	F	D	F
$\log H_0$	1.176 09	1.176 09	1.000 00	1.000 00
$\log (1 : \pm R_0)$	8.275 72	8.275 72	8.275 72	8.275 72
$\log \sin \varphi_0$	9.451 81	9.451 81	9.275 72	9.275 72
$\log (n_{-1} : n_{+1})$	9.815 41	9.813 50	9.815 41	9.813 50
$\log \sin \varphi_0'$	9.267 22	9.265 31	9.091 13	9.089 22
$\varphi_0 = \eta_0$	16° 26′ 25″	16° 26′ 25″	10° 52′ 32″	10° 52′ 32″
$- \varphi_0'$	— 10 39 45	— 10 36 54	— 7 5 7	— 7 3 15
$\delta_0 = \beta_{0,0}$	5 46 40	5 49 31	3 47 25	3 49 17
$\log \operatorname{tg} \beta_{0,0}$	9.005 11	9.008 69	8.821 18	8.824 74
$\log (1 : \operatorname{tg} \beta_{0,0})$	0.994 89	0.991 31	1.178 82	1.175 26
$\log H_0$	1.176 09	1.176 09	1.000 00	1.000 00
$\log (H_0 : \operatorname{tg} \beta_{0,0})$	2.170 98	2.167 40	2.178 82	2.175 26
$\log \sin \frac{\eta_0}{2}$	9.155 27		8.976 75	
$\log \sin^2 \frac{\eta_0}{2}$	8.310 54		7.953 50	
$\log 2$	0.301 03		0.301 03	
$\log (\pm R_0)$	1.724 28		1.724 28	
$\log \left(\pm 2 R_0 \sin^2 \frac{\eta_0}{2}\right)$	0.335 85		9.978 81	
$H_0 : \operatorname{tg} \beta_{0,0}$	148.245	147.028	150.945	149.714
$\pm 2 R_0 \sin^2 \frac{\eta_0}{2}$	2.167	2.167	0.952	0.952
A_0'	150.412	149.195	151.897	150.666
$\mp R_2 - D_1$	72 740.0	72 740	72 740	72 740
$A_0' \mp R_2 - D_1$	72 890.4	72 889.2	72 891.897	72 890.666

	Randstrahl, $H_0 = 15$.		$^2/_3$-Randstrahl, $H_0 = 10$.	
	D	F	D	F
$\log (A_0' \mp R_2 - D_1)$	4.862 67	4.862 66	4.862 68	4.862 67
$\log \sin \beta_{0,0}$	9.002 90	9.006 45	8.820 23	8.823 78
$\log (1 : \pm R_2)$	5.138 18 *n*	5.138 18 *n*	5.138 18 *n*	5.138 18 *n*
$\log \sin \varphi_2$	9.003 75 *n*	9.007 29 *n*	8.821 09 *n*	8.824 63 *n*
$\log (n_{+1} : n_{+3})$	0.184 59	0.186 50	0.184 59	0.186 50
$\log \sin \varphi_2'$	9.188 34 *n*	9.193 79 *n*	9.005 68 *n*	9.011 13 *n*
φ_2	-5^0 47′ 21″	-5^0 50′ 12″	-3^0 47′ 52″	-3^0 49′ 44″
$-\varphi_2'$	8 52 32	8 59 19	5 48 54	5 53 19
δ_2	3 5 11	3 9 7	2 1 2	2 3 35
δ_0	5 46 40	5 49 31	3 47 25	3 49 17
$\beta_{0,2}$	8 51 51	8 58 38	5 48 27	5 52 52
φ_2	− 5 47 21	− 5 50 12	− 3 47 52	− 3 49 44
$\beta_{0,0}$	5 46 40	5 49 31	3 47 25	3 49 17
η_2	− 0 0 41	− 0 0 41	− 0 0 27	− 0 0 27
$\log \sin \frac{\eta_2}{2}$	5.996 89 *n*		5.820 61 *n*	
$\log \sin^2 \frac{\eta_2}{2}$	1.993 78		1.641 22	
$\log (\mp R_2)$	4.861 82		4.861 82	
$\log 2$	0.301 03		0.301 03	
$\log \left(\mp 2 R_2 \sin^2 \frac{\eta_2}{2}\right)$	7.156 63		6.804 07	
$\mp 2 R_2 \sin^2 \frac{\eta_2}{2}$	0.0014	0.0014	0.000 64	0.0006
$A_0' - D_1$	142.412	141.195	143.8974	142.6664
$A_0' - D_1 \mp 2 R_2 \sin^2 \frac{\eta_2}{2}$	142.4134	141.1964	143.898	142.667

	Randstrahl, $H_0 = 15$.		$^2/_3$-Randstrahl $H_0 = 10$.	
	D	*F*	*D*	*F*
$\log\left(A_0' - D_1 \mp 2R_2 \sin^2 \frac{\eta_2}{2}\right)$	2.153 55	2.149 82	2.158 05	2.154 32
$\log \operatorname{tg} \beta_{0,0}$	9.005 11	9 008 69	8 821 18	8.824 74
$\log H_2$	1.158 66	1.158 51	0.979 23	0.979 06
$\log (1 : \operatorname{tg} \beta_{0,2})$	0.807 00	0 801 54	0.992 64	0.987 13
$\log (H_2 : \operatorname{tg} \beta_{0,2})$	1.965 66	1.960 05	1.971 87	1.966 19
$H_2 : \operatorname{tg} \beta_{0,2}$	92.3975	91.2115	93.7281	92.5103
$\pm 2R_2 \sin^2 \frac{\eta_2}{2}$	− 0.0014	− 0.0014	− 0.0006	− 0.0006
A_2'	92.3961	92.2101	93.7275	92.5097
$\log H_0$	1.176 09	1.176 09	1.000 00	1.000 00
$\log (1 : \operatorname{tg} \beta_{0,2})$	0.807 00	0.801 54	0.992 64	0.987 13
$\log F_{0,2}$	1.983 09	1.977 63	1.992 64	1.987 13
A_2'	92.3961	91 2101	93.7275	92.5097
$-F_{0,2}$	− 96.1810	− 94.9795	− 98.3200	− 97.0800
$E_{0,2}$	− 3.7849	− 3.7694	− 4.5925	− 4.5703

III. Sammellinse aus Crownglas mit den Brechungsindices $n_{-1} = n_{+3} = 1$, ${}_Dn_{+1} = 1.529\,64$ und ${}_Fn_{+1} = 1.536\,39$. Die totale Ablenkung der Linse sei $\beta_{0,2} = 1$; der erste Radius sei unendlich, so wird $R_2 = 52.9663$, bei einer Linsendicke $D_1 = 8$.

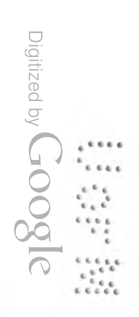
Crown: $_Dn_{+1} = 1.529\,64$ $\log {_Dn_{+1}} = 0.184\,59$ $D_1 = 8.$ $R_0 = \infty$ $\log R_0$
$_Fn_{+1} = 1.536\,39$ $\log {_Fn_{+1}} = 0.186\,50$ $R_2 = 52.9663$ *U. Z.* $\log R_2 = 1.724\,00$ *U. Z.*

	Axenstrahl.			Randstrahl $H_0 = 15$.		²/₃-Randstrahl, $H = 10$.	
	D	*F*		*D*	*F*	*D*	*F*
$\log H_2$	2.000 00	2.000 00	$\log H_2$	1.176 09	1.176 09	1.000 00	1.000 00
$\log (1 : \pm R_2)$	8.276 00 *n*	8.276 00 *n*	$\log (1 : \pm R_2)$	8.276 00 *n*	8.276 00 *n*	8.276 00 *n*	8.276 00 *n*
$\log \varphi_2$	0.276 00 *n*	0.276 00 *n*	$\log \sin \varphi_2$	9 452 09 *n*	9.452 09 *n*	9.276 00 *n*	9.276 00 *n*
$\log (n_{+1} : n_{+3})$	0.184 59	0.186 50	$\log (n_{+1} : n_{+3})$	0.184 59	0.186 50	0.184 59	0.186 50
$\log \varphi_2'$	0.460 59 *n*	0.462 50 *n*	$\log \sin \varphi_2'$	9.636 68 *n*	9.638 59 *n*	9.460 59 *n*	9 462 50 *n*
φ_2	— 1.887 99	— 1.887 99	φ_2	— 16° 27′ 4″	— 16° 27′ 4″	— 10° 52′ 57″.8	— 10° 52′ 57″.8
φ_2'	2.887 95	2.900 68	φ_2'	25 40 13	25 47 30	16 47 9.0	16 51 43.3
$\delta_2 = \beta_{0,2}$	0.999 96	1.012 69	$\delta_0 = \beta_{0,2}$	9 13 9	9 20 26	5 54 11.2	5 58 45.5
$\log \beta_{0,2}$	9.999 98	0.005 48	$\log \sin \beta_{0,2}$	9.204 69	9.210 32	9.012 19	9.017 74
$\log (1 : \beta_{0,2})$	0.000 02	9.994 52	$\log (1 : \sin \beta_{0,2})$	0.795 31	0.789 68	0.987 81	0.982 26
$\log \varphi_2'$	0.460 59 *n*	0.462 50 *n*	$\log \sin \varphi_2'$	9.636 68 *n*	9.638 59 *n*	9.460 59 *n*	9.462 50 *n*
$\log (\pm R_2)$	1.724 00 *n*	1.724 00 *n*	$(\log \pm R_2)$	1.724 00 *n*	1.724 00 *n*	1.724 00 *n*	1.724 00 *n*
$\log (A_2' \mp R_2)$	2.184 61	2.181 02	$\log (A_2' \mp R_2)$	2.155 99	2.152 27	2.172 40	2.168 76
$A_2' \mp R_2$	152.971	151.712	$A_2' \mp R_2$	143.215	141.994	148.730	147.489
$\pm R_2$	— 52.966	— 52.966	$\pm R_2$	— 52.966	— 52.966	— 52.966	— 52.966
A_2'	100.005	98.746	A_2'	90.249	89.028	95.764	94.523
$\log H_2$	2.000 00	2.000 00	$\log H_2$	1.176 09	1.176 09	1.000 00	1.000 00
$\log (1 : \beta_{0,2})$	0.000 02	9.994 52	$\log (1 : \mathrm{tg}\, \beta_{0,2})$	0.789 66	0.783 88	0.985 50	0.979 89
$\log F_{0,2}$	2.000 02	1.994 52	$\log F_{0,2}$	1.965 75	1.959 97	1.985 50	1.979 89
A_2'	100.005	98.746	A_2'	90.249	89.028	95 764	94.523
$- F_{0,2}$	— 100.005	— 98.746	$- F_{0,2}$	— 92.417	— 91.195	— 96.716	— 95.475
$E_{0,2}$	0.000	0.000	$E_{0,2}$	— 2.168	— 2.167	— 0.952	— 0.952

IV. Die im Vorausgehenden berechnete Linse, aber in umgekehrter Lage, so dass $R_0 = 52.9663\ O.Z.$ und $R_2 = \infty$.

Crown: ${}_Dn_{+1} = 1.529\,64$ $\log {}_Dn_{+1} = 0.184\,59$ $D_1 = 8.$ $R_0 = 52.9663\ O.Z.$; $\log R_0 = 1.724\,00\ O.Z.$
${}_Fn_{+1} = 1.536\,39$ $\log {}_Fn_{+1} = 0.186\,50$ $R_2 = \infty$

	Axenstrahl.			Randstrahl, $H_0 = 15$.		²/₃-Randstrahl, $H_0 = 10$	
	D	F		D	F	D	F
$\log H_0$	2.000 00	2.000 00	$\log H_0$	1.176 09	1.176 09	1.000 00	1.000 00
$\log (1 : \pm R_0)$	8.276 00	8.276 00	$\log (1 : \pm R_0)$	8.276 00	8.276 00	8.276 00	8.276 00
$\log \varphi_0$	0.276 00	0.276 00	$\log \sin \varphi_0$	9.452 09	9.452 09	9.276 00	9.276 00
$\log (n_{-1} : n_{+1})$	9.815 41	9.813 50	$\log (n_{-1} : n_{+1})$	9.815 41	9.813 50	9.815 41	9.813 50
$\log \varphi_0'$	0.091 41	0.089 50	$\log \sin \varphi_0'$	9.267 50	9.265 59	9.091 41	9.089 50
φ_0	1.887 99	1.887 99	φ_0	16° 27′ 4″	16° 27′ 4″	10° 52′ 57″.8	10° 52′ 57″.8
$-\varphi_0'$	— 1.234 27	— 1.228 85	$-\varphi_0'$	— 10 40 9	— 10 37 19	— 7 5 23.7	— 7 3 31.1
$\delta_0 = \beta_{0,0}$	0.653 72	0.659 14	$\delta_0 = \beta_{0,0}$	5 46 55	5 49 45	3 47 34.1	3 49 26.7
$\log \beta_{0,0}$	9.815 39	9.818 98	$\log \sin \beta_{0,0}$	9.003 21	9.006 73	8.820 52	8.824 08
$\log (1 : \beta_{0,0})$	0.184 61	0.181 02	$\log (1 : \sin \beta_{0,0})$	0.996 79	0.993 27	1.179 48	1.175 92
$\log \varphi_0'$	0.091 41	0.089 50	$\log \sin \varphi_0'$	9.267 50	9.265 59	9.091 41	9.089 50
$(\log \pm R_0)$	1.724 00	1.724 00	$(\log \pm R_0)$	1.724 00	1.724 00	1.724 00	1.724 00
$\log (A_0' \mp R_0)$	2.000 02	1.994 52	$\log (A_0' \mp R_0)$	1.983 29	1.982 86	1.994 89	1.989 42
$A_0' \mp R_0$	100.005	98.7461	$(A_0' \mp R_0)$	97.3397	96.1302	98.8303	97.5933
$\pm R_0 - D_1$	44.966	44.9663	$\pm R_0 - D_1$	44.9663	44.9663	44.9663	44.9663
$A_0' - D_1$	144.971	143.712	$A_0' - D_1$	142.3060	141.0965	143.797	142.560



Crown: ${}_Dn_{+1} = 1.529\,64$ $\log {}_Dn_{+1} = 0.184\,59$ $D_1 = 8.$ $R_0 = 52.9663$ *O. Z.*; $\log R_0 = 1.724\,00$ *O. Z.*
${}_Fn_{+1} = 1.536\,39$ $\log {}_Fn_{+1} = 0.186\,50$ $R_2 = \infty$

	Axenstrahl.			Randstrahl, $H_0 = 15$.		$^2/_3$-Randstrahl, $H_0 = 10$	
	D	*F*		*D*	*F*	*D*	*F*
$\log \varphi_2' = \log \beta_{0,0}$	9.815 39	9.818 98	$\log \sin \beta_{0,0}$	9.003 21	9.006 73	8.820 52	8.824 08
$\log (n_{+1} : n_{+3})$	0.184 59	0.186 50	$\log (n_{+1} : n_{+3})$	0 184 59	0.186 50	0.184 59	0.186 50
$\log \varphi_2'$	9.999 98	0 005 48	$\log \sin \varphi_2'$	9.187 80	9.193 23	9.005 11	9 010 58
$\varphi_2' = \beta_{0,2}$	0.999 954	1.012 70	$\varphi_2' = \beta_{0,2}$	8° 51′ 52″	8° 58′ 37″	5° 48′ 26″.4	5° 52′ 52″.3
$\log (A_0' - D_1)$	2.161 28	2.157 49	$\log (A_0' - D_1)$	2.153 22	2.149 52	2.157 75	2.154 00
$\log \beta_{0,0}$	9.815 39	9.818 98	$\log \operatorname{tg} \beta_{0,0}$	9.005 43	9.008 99	8.821 47	8.825 05
$\log (1 : \beta_{0,2})$	0.000 02	9.994 52	$\log (1 : \operatorname{tg} \beta_{0,2})$	0.806 99	0.801 42	0.992 66	0 987 13
$\log A_2'$	1.976 69	1.970 99	$\log A_2'$	1.965 64	1.959 92	1.971 88	1 966 18
$\log H_2$	2.000 00	2.000 00	$\log H_2$	1.176 09	1.176 09	1.000 00	1.000 00
$\log (1 : \beta_{0,2})$	0.000 02	9.994 52	$\log (1 : \operatorname{tg} \beta_{0,2})$	9.193 01	9.198 58	0.992 66	0.987 13
$\log F_{0,2}$	2.000 02	1.994 52	$\log F_{0,2}$	1.983 08	1.977 51	1.992 66	1.987 13
A_2'	94.7742	93.5384	A_2'	92.3932	91.1864	93.7303	92.5081
$-F_{0,2}$	— 100.005	— 98.7461	$-F_{0,2}$	— 96.1789	— 94.9533	— 98.3241	— 97.0800
$E_{0,2}$	— 5.2308	— 5.2077	$E_{0,2}$	— 3.7857	— 3 7669	— 4.5938	— 4.5719

§ 7. Discussion der Fehler der Brennweiten.

In der gleichen Weise, wie in den vorausgehenden Beispielen, haben wir für eine Reihe von Linsen, alle jedoch von gleicher wahrer Brennweite, die Durchrechnung verschiedener Strahlen ausgeführt, und benützen die gewonnenen Resultate, um den Einfluss der bei diesen Linsen noch verschieden zu wählenden Grössen auf die Bildfehler derselben darzulegen. Wir können nämlich in verschiedener Weise die wirksame Linsenöffnung, die Dicke der Linse, die Form der Linse und endlich die Glasart derselben wählen, und werden unter Einhaltung der wahren Brennweite für die von den Linsen entworfenen Bildpunkte sehr verschiedene Fehler nachweisen können.

a. Einfluss der wirksamen Linsenöffnung (Einfallshöhe) auf die Fehler in den Brennweiten.

Beifolgende Tabelle (I) enthält die Rechnungsresultate für eine Linse, bei welcher der Axenstrahl an beiden Flächen die gleiche Ablenkung (= 0.5) erfährt. Es sind ferner für diese Linse die Resultate der Rechnung für Strahlen von zweierlei Farbe, und zwar in der ersten Colonne für Strahlen von der Farbe D, und in der dritten für Strahlen von der Farbe F angegeben, während in der zweiten die Differenzen für beide Farben enthalten sind.

Die Linse hat für Licht von der Farbe D die wahre Brennweite (gleich 100^{mm}), und sind für dieselbe immer Strahlen, in acht verschiedenen Höhen einfallend, durchgerechnet. Die gewählten Einfallshöhen sind von der höchsten beginnend: 22.5^{mm}, 15.0, 10.0, 6.6667, 4.4444, 2.9630, 1.9753, und der letzte Strahl ist nahe an der Axe in $0.000\,485^{mm}$ einfallend angenommen; die letzte Einfallshöhe entspricht einem halben Oeffnungswinkel von 1″. Für die ersten sieben Strahlen hat, wie leicht einzusehen, der nächst tiefere immer $^2/_3$ des vorangehenden höheren als Einfallshöhe erhalten.

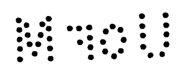
Der Grund der letzterwähnten Annahme liegt darin, dass hierdurch eine leichte Bestimmung des kleinsten Bilddurchmessers ermöglicht ist, und werden wir später eine Begründung für diese Behauptung geben.

I. Einfluss der Linsenöffnung auf die Fehler in den Brennweiten.

Bezeichnungen.		$D_1 = 8$ $R_0 = 69.250$ O. Z. $R_2 = 216.195$ U. Z. $\vartheta_0 = \vartheta_2 = +0.5$		
		D	Differenzen.	F
A. Brennweiten: $F_{0,2}$ für:		mm		mm
	0.000 485	100.000		98.751
	1.9753	99.949		98.696
	2.9630	99.885		98.637
	4.4444	99.745		98.496
	6.6667	99.424		98.177
	10.000	98.701		97.454
	15.000	97.049		95.803
	22.500	93.195		91.960



Bezeichnungen.	$D_1 = 8$ $R_0 =$ 69.250 *O. Z.* $R_2 =$ 216 195 *U. Z.* $\delta_0 = \delta_2 = + 0.5$		
	D	Differenzen	*F*
B. Vereinigungsweiten:			
A_2' für:	mm		mm
0.000 485	96.001		94.767
1.9753	95.958		94.724
2.9630	95.915		94 681
4.4444	95 800		94.567
6.6667	95.548		94.316
10.000	94.975		93.745
15.000	93.659		92.427
22,500	90.550		89.323
C. Hauptpunktsweiten:			
1) ideale Werthe:			
$E^* = (A_2' - F_{0,2})_{Axe} =$			
$E^* + 0.000$ für: 0.000 485	— 3.999		
$E^* + 0.020$ 1.9753	— 3.979		
$E^* + 0.044$ 2.9630	— 3.955		
$E^* + 0.099$ 4.4444	— 3.900		
$E^* + 0.241$ 6.6667	— 3.758		
$E^* + 0.496$ 10.000	— 3.503		
$E^* + 1.106$ 15.000	— 2.893		
$E^* + 2.439$ 22.500	— 1.560		
2) wirkliche Werthe:			
$E = A_2' - F_{0,2}$ für:			
0.000 485	— 3.999		— 3 984
1.9753	— 3.991		— 3.972
2.9630	— 3.970		— 3.956
4.4444	— 3.945		— 3.929
6.6667	— 3.876		— 3.861
10.000	— 3.726		— 3.709
15 000	— 3 390		— 3.376
22.500	— 2.645		— 2.637
D. Oeffnungswinkel:			
1) ideale Werthe: $\beta^*_{0,2}$ für:			
0 000 485	1''000		
1.9753	4074.600		
2.9630	6112.400		
4.4444	9170.300		
6.6667	13761.200		
10.000	20661.000		
15.000	31056.900		
22.500	46810.300		
2) wirkliche Werthe: $\beta_{0,2}$ für:			
0.000 485	1''000		1''013
1.9753	4075.900		4127.600
2.9630	6116.790		6194.170
4.4444	9184.800		9301.100
6 6667	13810.000		13985.000
10.000	20827.000		21091.400
15.000	31630.000		32035.000
22.500	48863.000		49495.000

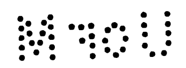


Bezeichnungen.	$D_1 = 8.$ $R_0 = 69.250$ *O. Z* $R_2 = 216.195$ *U. Z.* $\delta_0 = \delta_2 = + 0.5$		
	D	Differenzen	*F*
E. Winkelfehler:			
1) Farbenfehler			
${}_D\beta_{0,2} - {}_F\beta_{0,2}$ für:			
0.000 485		— 0″013	
1.9753		— 51.700	
2.9630		— 77.380	
4.4444		— 116.300	
6.6667		— 175.000	
10.000		— 264.400	
15.000		— 405.000	
22.500		— 632.000	
2) Kugelgestaltfehler			
$\beta^*_{0,2} - \beta_{0,2}$ für:			
0.000 485	0″000		— 0″013
1.9753	— 1.300		— 53.000
2.9630	— 4.390		— 81.770
4.4444	— 14.500		— 130.800
6.6667	— 48.800		— 223.800
10.000	— 166.000		— 430.400
15.000	— 573.100		— 978.100
22.500	— 2052.700		— 2684.700
F. Fehler der Brennweiten:			
1) Auf Seite der Brennpunkte (Ende der Brennweite).			
a) Farbenfehler			
${}_DA_2' - {}_FA_2'$ für:		mm	
0.000 485		+ 1.234	
1.9753		+ 1.234	
2.9630		+ 1.234	
4.4444		+ 1.233	
6.6667		+ 1.232	
10.000		+ 1.230	
15.000		+ 1.232	
22.500		+ 1.227	
b) Kugelgestaltfehler			
$\underset{Axe}{A_2'} - \underset{Rand}{A_2'}$ für:	mm		mm
0.000 485	0.000		0.000
1.9753	+ 0.043		+ 0.043
2.9630	+ 0.086		+ 0.086
4.4444	+ 0.201		+ 0.200
6.6667	+ 0.453		+ 0.451
10.000	+ 1.026		+ 1.022
15.000	+ 2.342		+ 2.340
22.500	+ 5.450		+ 5.444
2) Auf Seite der Hauptpunkte (Anfang der Brennweite).			
a) Farbenvergrösserungsfehler ${}_DE - {}_FE$. für:		mm	
0.000 485		— 0.015	
1.9753		— 0.019	



Bezeichnungen.	$D_1 = 8.$ $R_0 = 69.250$ O. Z. $R_2 = 216\,195$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = +0.5$		
	D	Differenzen	*F*
2) Auf Seite der Hauptpunkte (Anfang der Brennweite).			
a) Farbenvergrösserungsfehler $_DE - {}_FE$ für:		mm	
2.9630		— 0.014	
4.4444		— 0.016	
6.6667		— 0.015	
10.000		— 0.017	
15.000		— 0 014	
22.500		— 0.008	
b) Verzerrung $E^* - E$ für:	mm		mm
0.000 485	0.000		— 0.015
1.9753	+ 0.012		— 0.007
2.9630	+ 0.015		+ 0.001
4.4444	+ 0 045		+ 0.029
6 6667	+ 0.118		+ 0.103
10.000	+ 0.223		+ 0.206
15.000	+ 0.497		+ 0.483
22.500	+ 1.085		+ 1.077

Die Tabelle besteht aus zwei Abtheilungen: die erste enthält die Bezeichnungen, die zweite die Rechnungsresultate für die Linse und zwar in den ersten acht Zeilen (unter A.) in der ersten Abtheilung die angenommenen Einfallshöhen, in der zweiten die entsprechenden Brennweiten (die Entfernungen der Brennpunkte von den Hauptpunkten), und unter diesen in der ersten Zeile der ersten für die Linie *D* gültigen Colonne der zweiten Abtheilung die wahre Brennweite der Linse. Die Zeilen 9 bis 16 (unter B.) geben in der zweiten Abtheilung die Vereinigungsweiten (Abstand des Schnittpunktes der austretenden Strahlen mit der Axe, vom Scheitel der letzten Linsenfläche aus gezählt). Unter C. sind die Entfernungen der Projectionen der Anfangspunkte der Brennweiten auf die Axe von dem Scheitel der letzten Fläche aus angegeben, und zwar unter 1) in den Zeilen 17—24 die ideellen, und unter 2) in den Zeilen 25—32 die wirklichen Werthe. Die ideellen Werthe der erwähnten Entfernungen sind in der gleichen Weise gerechnet, wie wir auf Seite (56) entwickelt haben, wobei angenommen ist, dass die Anfangspunkte der Brennweiten auf einer Sphäre liegen, welche mit dem Radius gleich der wahren Brennweite aus dem Brennpunkte durch den Hauptpunkt beschrieben wird. Für die gewählten Einfallshöhen fallen die auf die Axe projicirten Anfangspunkte der Brennweiten hinter den für den Axenstrahl gültigen Hauptpunkt, und zwar von den grössten Einfallshöhen beginnend in die Abstände $+ 2.439^{mm}$, $+ 1.106$, $+ 0.496$, $+ 0.241$, $+ 0.099$, $+ 0.044$ und $+ 0.020^{mm}$, wobei die Richtung des einfallenden Lichtes als die positive angenommen ist. Diese Abstände sind in der Abtheilung „Bezeichnungen" den zugehörigen Einfallshöhen vorangesetzt, und sind somit in der zweiten Abtheilung mit ihrem Zeichen



dem Abstande des Hauptpunktes vom Scheitel zugezählt. Da wir für die Farbe D die wahre Brennweite ($= 100^{mm}$) angenommen haben, sind die ideellen Werthe auch nur für diese Farbe zu bilden, und die Abweichungen der Anfangspunkte der Brennweiten für beide Farben als Fehler zu bezeichnen. Die wirklichen Werthe für die Entfernungen der Projectionen der Anfangspunkte der Brennweiten vom Scheitel sind aus den trigonometrischen Durchrechnungen entnommen, und durch die Formel: $E = A_2' - F_{0,2}$ gewonnen.

Die Rubrik D. der Tabelle giebt die Oeffnungswinkel (die Winkel, unter welchen die jeweilig austretenden Randstrahlen die Axe schneiden.) In den Zeilen 33—40 sind die ideellen, in den Zeilen 41—48 die wirklichen Werthe derselben enthalten; die ideellen Werthe sind diejenigen, um welche der in der betreffenden Höhe einfallende Strahl so zur Axe abgelenkt werden müsste, dass die Entfernung des Ablenkungspunktes vom Schnittpunkte mit der Axe gleich der wahren Brennweite der Linse ist, und dabei die Durchschnitte mit der Axe im gleichen Punkte stattfinden. Man erhält den erwähnten Winkel somit aus der Formel

$$\sin \beta_{0,2} = \frac{H_0}{F_{0,2}},$$

und ergeben sich für die verschiedenen Einfallshöhen die Winkel, mit den grössten Einfallshöhen beginnend: 46810″.3, 31056.9, 20661.0, 13761.2, 9170.3, 6112.4, 4074.6 und 1″.0.

In den folgenden Nummern E. und F. sind die Fehler in den Anfangspunkten und Endpunkten der Brennweiten zusammengestellt. Diese Fehler haben zweierlei Ursachen: 1) die ungleiche Brechbarkeit der in einer Höhe einfallenden Strahlen, und 2) die unproportionale Ablenkung in Folge des Einfallens der Strahlen in verschiedener Höhe. Die zuerst erwähnten Fehler sind, wie wir schon früher (siehe Cap. III) erörterten, Farbenfehler, wenn sie sich auf den Endpunkt der Brennweite beziehen; Farbenvergrösserungsfehler, soweit sie den Anfangspunkt der Brennweite verlegen. Die zuletzt (unter 2) erwähnten Fehler nennen wir Kugelgestaltfehler, wenn sie eine Aenderung am Ende der Brennweite, und Verzerrungsfehler, wenn sie eine Aenderung am Anfange der Brennweite betreffen.

Den Farben- und den Kugelgestaltfehler drücken wir in doppelter Weise aus, entweder in den sich ergebenden Unterschieden der Vereinigungen, oder in Differenzen der Winkel, und es ist bei näherer Betrachtung der Tabelle leicht ersichtlich, dass man bei der letzteren Angabe eine richtigere Vorstellung von dem Einflusse der Fehler auf die Deutlichkeit der Bilder (Durchmesser der Bildpunkte) erhält. Denn alle Grössen, die das Auge sieht, erscheinen demselben als Winkel, während die Längenabweichungen für sich kein Maass für die Deutlichkeit oder den Durchmesser eines Bildpunktes geben.

Vergleichen wir z. B. die unter E. 1) und F. 1) gegebenen Farbenfehler; die den Effect im Auge bedingende Ursache ist der in E. 1) zusammengestellte Winkelfehler; je grösser die Differenz im Winkel ist, um so grösser erscheint dem Auge der Fehler, während die Längenabweichungen der Farbenfehler in F. 1) bei Zunahme der Oeffnung sogar kleiner werden,

was einen vollständig unrichtigen Begriff des Farbenfehlers geben würde. Die Längenabweichungen werden nämlich dadurch kleiner, dass die Brennweiten für die grösseren Oeffnungen kürzer werden und der gleiche Bruchtheil der Brennweite eine immer kleinere Zahl wird.

Der Farbenfehler sowohl im Winkel als in der Vereinigung kann durch eine Näherungsformel ausgedrückt werden. Es ist der Winkelfehler:

$$\varDelta\beta_{0,2} = -\frac{\varDelta n_1}{n_1 - 1}\frac{H_0}{F_{0,2}},$$

und die Längenabweichung:

$$\varDelta A_2' = +\frac{\varDelta n_1}{n_1 - 1} F_{0,2}.$$

Bei unserem Rechnungsbeispiele würde man folgende Werthe erhalten:

1) Fehler von $\beta_{0,2}$

für H_0 =	
0.000 485	— 0.″0127
1.9753	— 51.92
2.9630	— 77.89
4.4444	— 116.83
6.6667	— 175.25
10	— 262.88
15	— 394.31
22.5	— 591.47

2) Fehler von A_2'

mm
+ 1.275.

Um die Durchmesser der von den verschiedenfarbigen Strahlen entworfenen Bildpunkte zu bestimmen, was wir später ausführen werden, müssen sowohl die gerechneten Winkelgrössen wie die Vereinigungsweiten benützt werden.

Die Kugelgestaltfehler sind unter E. 2) und F. 2) zusammengestellt; auch hier giebt die Winkelabweichung (E. 2)) ein treueres Bild des Effectes im Auge als die Längenabweichung. Sowohl die Winkelgrössen wie die Längenabweichungen der Kugelgestaltfehler wachsen rasch mit zunehmender Oeffnung der Linse, und zwar in stärkerem Verhältniss als die der Farbenfehler.

Auch der Kugelgestaltfehler, die Winkelfehler und der Fehler in der Vereinigungsweite können durch eine Näherungsgleichung dargestellt werden. Es ist der Winkelfehler:

$$\varDelta\beta_{0,2} = -\frac{nH_0^3}{2F_{0,2}}\left[n\left(\frac{1}{\pm R_0}+\frac{1}{\mp R_2}\right)^2 - \frac{1+2n}{\pm nR_0}\left(\frac{1}{\pm R_0}+\frac{1}{\mp R_2}\right)+\frac{2+n}{n^2R_0^2}\right]$$

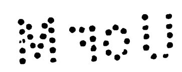
und die Längenabweichung:

$$\varDelta A_2' = \frac{nH_0^2F_{0,2}}{2}\left[n\left(\frac{1}{\pm R_0}+\frac{1}{\mp R_2}\right)^2 - \frac{1+2n}{\pm nR_0}\left(\frac{1}{\pm R_0}+\frac{1}{\mp R_2}\right)+\frac{2+n}{n^2R_0^2}\right].$$

Die beiden oben angenommenen Rechnungsbeispiele geben mit den Näherungsformeln folgende Fehler.

1) Winkelfehler in Secunden:

Einfallshöhen	$\delta_0 = \delta_2 = 0.5$
0.000 485	0.000
1.9753	— 1.711



Einfallshöhen	$\delta_0 = \delta_2 = 0.5$
2.9630	— 5.775
4.4441	— 19.489
6.6667	— 65.78
10.0	— 221.99
15.0	— 749.22
22.5	— 2528.60

2) Fehler in den Vereinigungsweiten:

Einfallshöhen	$\delta_0 = \delta_2 = 0.5$
0.000 485	0.000
1.9753	0.042
2.9630	0.094
4.4444	0.213
6.6667	0.478
10.0	1.076
15.0	2.422
22.5	5.448

Die Fehler in den Anfangspunkten der Brennweiten sind in F. 2) enthalten; und zwar der Unterschied in den Hauptpunkten der verschiedenfarbigen Strahlen, der Farbenvergrösserungsfehler unter a). Der Farbenvergrösserungsfehler ist für die gerechnete Linse ganz unbedeutend, und ist die dritte Decimalstelle schon unsicher. Die Unterschiede im Anfangspunkte der Brennweite der Randstrahlen gegen den des gelben Axenstrahles, die Verzerrungsfehler sind in b) zusammengestellt. Die Verzerrungsfehler sind für die beiden Farben ziemlich gleich und sie wachsen, indem grössere Oeffnungen der Linse benutzt werden.

Fassen wir die aus der Tabelle zu entnehmenden Resultate kurz zusammen, so können wir folgende Sätze aussprechen:

1) Die absoluten Werthe aller Fehler wachsen im Allgemeinen mit zunehmender wirksamer Oeffnung der Linsen.

2) Die Fehler auf Seite der Brennpunkte sind im Allgemeinen grösser als die auf Seite der Hauptpunkte.

3) Die Winkelgrössen der Farben- und Kugelgestaltfehler geben ein treueres Bild für den Effect im beobachtenden Auge als die Werthe der Längenabweichungen.

4) Die Kugelgestaltfehler wachsen mit zunehmender Linsenöffnung rascher als die Farbenfehler.

5) Die Winkelgrössen der Kugelgestaltfehler und die der Farbenfehler wachsen näherungsweise mit der dritten beziehungsweise mit der zweiten Potenz der Einfallshöhen, während die Längenabweichungen für den Kugelgestaltfehler nahe mit der ersten Potenz der Einfallshöhen wachsen und für den Farbenfehler von der Einfallshöhe unabhängig sind.

b. Einfluss der Linsendicke auf die Fehler in den Brennweiten.

In der auf S. 102 u. 103 stehenden Tabelle II sind in ganz ähnlicher Weise wie in Tabelle I die Rechnungsresultate für fünf Linsen zusammengestellt.

Für alle fünf Linsen von der wahren Brennweite 100mm ist die gleiche Brechung $\delta_0 = \delta_2 = 0.5$ an beiden Linsenflächen vorausgesetzt; es ist nur der Abstand der beiden Linsenflächen, die Linsendicke, verschieden angenommen; für die erste Linse ist die Dicke verschwindend

II. Einfluss der Linsendicke auf die Fehler in den Brennweiten.

	$D_1 = 0.001$ $R_0 = 69.250$ O. Z. $R_2 = 225.196$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = 0.5$		$D_1 = 8.0$ $R_0 = 69.250$ O. Z. $R_2 = 216.195$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = 0.5$		$D_1 = 48.0$ $R_0 = 69.250$ O. Z. $R_2 = 171.153$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = 0.5$		$D_1 = 88.0$ $R_0 = 69.250$ O. Z. $R_2 = 126.1155$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = 0.5$		$D_1 = 138.5.$ $R_0 = 69.250$ O. Z. $R_2 = 69.250$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = 0.5$	
	D	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*
A. Brennweiten: $F_{0,2}$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	100.000	98.744	100.000	98.751	100.000	98.803	100.000	98.896	100.000	99.179
10			98.701	97.454	98.723	97.535	98.780	97.679	98.937	98.121
15			97.049	95.803	97.116	95.922	97.232	96.132	97.595	96.783
B. Vereinigungsweiten: A_2'										
0.000 485	99.996	98.741	96.001	94.767	76.002	74.890	56.002	55.023	30.750	29.929
10			94.975	93.745	75.116	74.013	55.261	54.290	30.190	29.378
15			93.659	92.427	73.990	72.892	54.320	53.354	29.492	28.688
C. Hauptpunktweiten: 1) ideale Werthe $E^*_{Axe}(A_2' - F_{0,2})$										
$E^* + 0.000$; 0.000 485	— 0.004		— 3.999		— 23.998		— 43.998		— 69.250	
$E^* + 0.496$; 10			— 3.503		— 23.502		— 43 502		— 68.754	
$E^* + 1.106$; 15			— 2.893		— 22.892		— 42.892		— 68.144	
2) wirkliche Werthe $E = A_2' - F_{0,2}$										
0.000 485	— 0.004	— 0.004	— 3.999	— 3.984	— 23.998	— 23.913	— 43.998	— 43.873	— 69.250	— 69.250
10			— 3.726	— 3.709	— 23.607	— 23.522	— 43.519	— 43.389	— 68.748	— 68.743
15			— 3.390	— 3.376	— 23 126	— 23.030	— 42.912	— 42.778	— 68.104	— 68.096
D. Oeffnungswinkel: 1) ideale Werthe $\beta^*_{0,2}$										
0.000 485	1″000		1″000		1″000		1″000		1″000	
10			20661.000		20661.000		20661.000		20661.000	
15			31056.900		31056.900		31056.900		31056.900	

2) wirkl. Werthe $\beta_{0,2}$										
0.000 485	1″000	1″013	1″000	1″013	1″000	1″012	1″000	1″011	1″000	1″008
10			20827.000	21091.500	20821.000	21074.000	20810.300	21043.500	20777.600	20949.200
15			31630.200	32034.900	31608.800	31995.500	31571.400	31927.200	31456.000	31716.000
E. Fehler der Winkel										
1) Farbenfehler:										
0.000 485	0″013		0″013		0″012		0″011		0″008	
10			264.500		253.000		233.200		171.600	
15			404.700		386.700		355.800		260.000	
2) Kugelgestaltfehler										
0.000 485	0″000	0″000	0″000	0″013	0″000	0″012	0″000	0″011	0″000	0″008
10			166.000	430.500	160.000	413.000	149.300	382.500	116.600	288.200
15			573.300	978.000	551.900	938.600	514.500	870.300	399.100	659.100
F. Fehler der Brennweiten:										
1) Auf Seite d. Brennp. (Ende der Brennweite)										
a) Farbenfehler $_DA_2' - {}_FA_2'$	mm		mm		mm		mm		mm	
0.000 485	+ 1.255		+ 1.234		+ 1.212		+ 0.979		+ 0.821	
10			+ 1.230		+ 1.103		+ 0.971		+ 0.812	
15			+ 1.232		+ 1.098		+ 0.966		+ 0.804	
b) Kugelgestaltfehler $_{Axe}A_2' - {}_{Rand}A_2'$	mm		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	0.000		+ 0.000	+ 0.000	+ 0.000	+ 0.000	+ 0.000	+ 0.000	+ 0.000	+ 0.000
10			+ 1.026	+ 1.022	+ 0.886	+ 0.877	+ 0.741	+ 0.723	+ 0.560	+ 0.551
15			+ 2.342	+ 2.340	+ 2.012	+ 1.998	+ 1.682	+ 1.669	+ 1.258	+ 1.241
2) Auf Seite d. Hauptp. (Anfang d. Brennweite)										
a) Farbenvergrösserungsfehler $_DE - {}_FE$	mm		mm		mm		mm		mm	
0.000 485	− 0.001		− 0.015		− 0.085		− 0.125		0.000	
10			− 0.017		− 0.085		− 0.130		− 0.005	
15			− 0.014		− 0.096		− 0.134		− 0.008	
b) Verzerrung $E^* - E$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	+ 0.000	− 0.001	+ 0.000	− 0.015	+ 0.000	− 0.085	+ 0.000	− 0.125	− 0.000	− 0.000
10			+ 0.223	+ 0.206	+ 0.105	+ 0.020	+ 0.017	− 0.113	− 0.006	− 0.011
15			+ 0.497	+ 0.483	+ 0.234	+ 0.138	+ 0.020	− 0.114	− 0.040	− 0.048

klein, gleich 0,001^{mm}, für die anderen immer grösser, nämlich 8, 48 und 88^{mm} gesetzt und die letzte hat die möglichst grosse Dicke gleich 138.5^{mm} erhalten; es wird diese Linse damit zur Kugel. Für die vier letzten Linsen sind die Oeffnungen 0.000485^{mm}, 10 und 15, und für die Linse von 0.001^{mm} Dicke nur die in 0.000 485^{mm} einfallenden Strahlen gerechnet; Strahlen von der Einfallshöhe 10 und 15^{mm} würden die Linse nicht treffen, da sie nur eine Oeffnung von 0.325^{mm} besitzt.

In der Tabelle sind für jede der fünf Linsen zwei Colonnen, die eine für die Farbe D, die andere für die Farbe F, und für jede Linse sechs Rubriken (A.—F.) enthalten. In den drei ersten Zeilen (unter A.) sind die Brennweiten gegeben, ferner in den Zeilen vier bis sechs (unter B.) die Vereinigungsweiten; in den Zeilen sieben bis neun (unter C.) die ideellen und in zehn bis zwölf die wirklichen Entfernungen der Projectionen der Anfangspunkte der Brennweite von den Scheiteln der letzten brechenden Flächen, endlich in den Zeilen 13 bis 15 (unter D.) die ideellen, und in den Zeilen 16 bis 18 die wirklichen Werthe der Winkel, welche die aus den Linsen austretenden Strahlen mit den Axen bilden. In den Nummern E. und F. sind die Fehler der Brennweiten für die einzelnen Linsen zusammengestellt, welche wir etwas eingehender zu betrachten haben. In der Rubrik E. sind die Fehler im Winkel des aus den Linsen austretenden Strahles enthalten und zwar in den Zeilen 19 bis 21 die Farbenfehler und in den Zeilen 22 bis 24 die Kugelgestaltfehler; wir fassen die Fehler in den Oeffnungswinkeln gleich zusammen mit den der Vereinigungsweiten, welche in der Gruppe F. unter 1) und zwar in den Zeilen 25 bis 27 die Farbenfehler, und Zeile 28 bis 30 die Kugelgestaltfehler enthalten sind. Es ist sofort aus den Zahlen der Tabelle zu erkennen, dass sowohl die Farbenfehler als auch die Kugelgestaltfehler mit zunehmender Dicke der Linse geringer werden, und bei der Kugellinse einen Minimalwerth erreichen.

Die Fehler der Brennweiten auf Seite der Hauptpunkte sind in der Tabelle unter F. 2) angegeben. Zeile 31 bis 33 enthält die Farbenvergrösserungsfehler. Diese Fehler sind bei der unendlich dünnen Linse verschwindend, nehmen dann mit zunehmender Dicke ebenfalls zu, erreichen jedoch einen Minimalwerth, um dann wieder bei der Kugellinse einen verschwindend kleinen Werth zu erreichen. Die Verzerrungsfehler endlich, welche in Zeile 34 bis 37 zusammengestellt sind, werden mit zunehmender Dicke der Linse immer geringer und für die Kugellinse Null. (Um den Einfluss der Dicken auf die Verzerrung rein zu haben, darf man nur die Resultate der Strahlen von der Farbe D vergleichen, da die der Farbe F durch den Farbenvergrösserungsfehler entstellt sind.)

Das aus dieser Tabelle zu entnehmende Hauptresultat ist in die einfachen Sätze zusammenzufassen:

1) Während die Fehler am Endpunkte der Brennweite, innerhalb der gegebenen Dickenänderungen, nicht um die Hälfte ihres Maximalwerthes ändern, ändern die Fehler am Anfange der Brennweiten um ihren ganzen Maximalwerth, indem sie an beiden Grenzen Null werden.

2) Eine Kugellinse hat die geringsten Fehler in den Brennweiten.

3) Farbenfehler, Kugelgestaltfehler und Verzerrung nehmen regelmässig ab mit zunehmender Dicke der Linse, bis zur Kugel.

4) Der Farbenvergrösserungsfehler wird sowohl für die Linse von unendlich geringer Dicke als für die Kugellinse gleich Null, nimmt mit wachsender Dicke zu, erreicht bei den gerechneten Fällen für $D = 88^{mm}$ einen Maximalwerth, um dann wieder gegen Null (für die Kugellinse) abzunehmen.

c. Einfluss der Linsenform auf die Fehler in den Brennweiten.

In der Tabelle III (S 106 ff.) sind für 16 verschiedene Linsen, alle aus gleichem Glase und von gleicher wahrer Brennweite, die Fehler in den Brennweiten zusammengestellt. Die 16 Linsen sind so gewählt, dass immer die Vertheilung der Brechungen auf die beiden Linsenflächen verschieden angenommen ist. Die Vertheilung der Ablenkungen an den beiden Linsenflächen ergiebt sich aus den angenommenen Werthen von δ_0 und δ_2. Bei der ersten Linse ist der Werth von δ_0 am grössten, nämlich gleich $+ 2.3$, der von δ_2, da die Gesammtablenkung gleich $+ 1$ werden soll, entsprechend gleich $- 1.3$; bei dieser Linse bedingt somit die erste Fläche eine Ablenkung zur Axe, die zweite jedoch von der Axe. Bei den später aufgeführten Linsen nimmt der absolute Werth von δ_0 immer mehr ab, es wird also bei den nachfolgenden Linsen für den gelben Axenstrahl die Ablenkung an der ersten Fläche zur Axe allmählich geringer, und in demselben Maasse an der zweiten Fläche die Ablenkung von der Axe ebenfalls geringer, bis im fünften Falle die Grösse $\delta_0 = 1$ wird, also an der ersten Fläche die ganze Ablenkung, an der zweiten Fläche dagegen keine Ablenkung stattfindet. Die Ablenkung δ_0 an der ersten Fläche zur Axe nimmt für die späteren Linsen immer mehr bis gegen Null ab, während die Ablenkung an der zweiten Fläche ebenfalls zur Axe immer mehr zunimmt. Bei der 13ten Linse wird die Ablenkung δ_0 an der ersten Fläche Null und die ganze Ablenkung der Linse findet in der zweiten Fläche zur Axe statt. Bei den drei letzten Linsen, bei welchen δ_0 negativ wird, wobei der absolute Werth bis zur letzten Linse und zwar auf 1.2 steigt, lenkt die erste Fläche von der Axe und die zweite entsprechend mehr zur Axe ab. In der ganzen Reihe der 16 Linsen findet eine immer stärkere Verlegung der Ablenkung zur Axe von der ersten nach der zweiten Fläche statt. Hierbei ändert die Form der Linse in der Weise, dass im ersten Falle ein Meniskus, der die convexe Seite dem auffallenden Lichte zukehrt, angenommen ist, und in den folgenden Fällen diese convexe Fläche aufgebogen wird, bis sie im 13. Falle plan ist, und bei weiterem Zubiegen die dem einfallenden Lichte zugekehrte Fläche concav wird, während stets die Brechungen der zweiten Fläche die Gesammtbrechung auf das als Vollbetrag der Linse festgesetzte Maass ergänzen. Hierbei werden die ersten fünf Fälle allmählig flacher werdende Menisken, deren convexe Seite voraus, der sechste Fall eine convex-plane Linse, die Fälle sieben bis zwölf biconvexe Linsen, der Fall dreizehn eine planconvexe Linse und die Fälle vierzehn bis sechzehn Menisken, die die Concavfläche dem auffallenden Lichte zuwenden.

Die einzelnen Rubriken (A. bis D.) enthalten die gleichen Rechnungsresultate, wie in den vorausgehenden Tabellen, die Rubriken (E. und F.) die in gleicher Weise gebildeten Fehler in den Anfangs- und End-

III. Einfluss der Linsenform auf die Bildfehler.

		$D_1 = 8.$ $R_0 = 15.054$ O. Z. $R_2 = 17.159$ O. Z. $\delta_0 = +2.3$; $\delta_2 = -1.3$		$D_1 = 8.$ $R_0 = 17.3125$ O. Z. $R_2 = 21.605$ O. Z. $\delta_0 = +2.0$; $\delta_2 = -1.0$		$D_1 = 8.$ $R_0 = 19.565$ O. Z. $R_2 = 26.635$ O. Z. $\delta_0 = +1.77$; $\delta_2 = -0.77$		$D_1 = 8.$ $R_0 = 22.612$ O. Z. $R_2 = 34.625$ O. Z. $\delta_0 = +1.531$; $\delta_2 = -0.531$	
		D	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*
A. Brennweiten: $F_{0,2}$		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	0.000 485	100.044	98.320	99.998	98.419	99.995	98 510	99.998	98.587
	10	63.570	62 643	74.034	72.979	80.898	79.781	86.842	85.670
	15	18 144	17.961	43 614	43.103	57.875	57.160	70 544	69.651
B. Vereinigungsweiten: A_2'									
	0.000 485	81.635	80.078	83.998	82.542	85.839	84.447	87.748	86.409
	10	54.280	53.433	64.480	63.501	71.595	70.541	78.140	77 025
	15	23.697	23.519	42.796	42.309	55.036	54 353	66.531	65.673
C. Hauptpunktsweiten:									
1) ideale Werthe $E^* = (A_2' - F_{0,2})_{Axe}$									
$E^* + 0.000$	0.000 485	− 18.409	− 18.409	− 16.000	− 16 000	− 14.156	− 14.156	− 12.250	− 12.250
$E^* + 0.496$	10	− 17.913	− 17.913	− 15.504	− 15.504	− 13.660	− 13.660	− 11.754	− 11.754
$E^* + 1.106$	15	− 17.303	− 17.303	− 14.894	− 14.894	− 13.050	− 13.050	− 11.144	− 11.144
2) wirkliche Werthe $E = A_2' - F_{0,2}$									
	0.000 485	− 18.409	− 18.242	− 16 000	− 15.877	− 14.156	− 14.063	− 12.250	− 12.178
	10	− 9.290	− 9.210	− 9.554	− 9.478	− 9.303	− 9.240	− 8.702	− 8.645
	15	+ 5.553	+ 5.558	− 0.818	− 0.794	− 2.839	− 2.807	− 4.013	− 3.978
D. Oeffnungswinkel									
1) ideale Werthe $\beta^*_{0,2}$									
	0.000 485	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000
	10	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000
	15	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900

2) wirkliche Werthe $\beta_{0,2}$								
0.000 485	1″000	1″017	1″000	1″016	1″000	1″015	1″000	1″014
10	32183.000	32652.000	27693.500	28088.500	25368.000	25720.000	23648.000	23968.000
15	142491.000	143519.000	68325.000	69077.000	52309.000	52935.000	43215.000	43752.000
E. Fehler der Winkel								
1) Farbenfehler: ${}_D\beta_{0,2} - {}_F\beta_{0,2}$								
0.000 485	— 0″017		— 0″016		— 0″015		— 0″014	
10	— 469.000		— 395.000		— 352.000		— 320.000	
15	— 1028.000		— 752.000		— 626.000		— 537.000	
2) Kugelgestaltfehler $\beta^*_{0,2} - \beta_{0,2}$								
0.000 485	- 0″000	- 0″017	- 0″000	- 0″016	- 0″000	- 0″015	- 0″000	- 0″014
10	- 11522.000	- 11991.000	- 7032.500	- 7427.500	- 4707.000	- 5059.000	- 2987.000	- 3307.000
15	-111434.100	-112462.100	-37268.100	-38020.100	-21252.100	-21878.100	-12158.100	-12695.100
F. Fehler der Brennweiten								
1) Auf Seite der Brennpunkte (Ende der Brennweite)								
a) Farbenfehler ${}_DA_2' - {}_FA_2'$	mm		mm		mm		mm	
0.000 485	+ 1.557		+ 1.456		+ 1.392		+ 1.339	
10	+ 0.847		+ 0.979		+ 1.054		+ 1.115	
15	+ 0.178		+ 0.487		+ 0.683		+ 0.858	
b) Kugelgestaltfehler $\underset{Axe}{A_2'} - \underset{Rand}{A_2'}$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	+ 27.355	+ 26.645	+ 19.518	+ 19.041	+ 14.244	+ 13.906	+ 9.608	+ 9.384
15	+ 57.938	+ 56.559	+ 41.202	+ 40.233	+ 30.803	+ 30.094	+ 21.217	+ 20.736
2) Auf Seite der Hauptpunkte (Anfang der Brennweite)								
a) Farbenvergrösserungsfehler ${}_DE - {}_FE$	mm		mm		mm		mm	
0.000 485	— 0.167		— 0.123		— 0.093		— 0.072	
10	— 0.080		— 0.076		— 0.063		— 0.057	
15	— 0.005		— 0.024		— 0.032		— 0.035	
b) Verzerrung $E^* - \underset{Axe}{E}$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	0.000	— 0.167	0.000	— 0.123	0.000	— 0.093	0.000	— 0.072
10	— 8.623	— 8.703	— 5.950	— 6.026	— 4.357	— 4.420	— 3.052	— 3.109
15	— 22.856	— 22.861	— 14.076	— 14.100	— 10.211	— 10.243	— 7.131	— 7.166

		$D_1 = 8.$ $R_0 = 34.625$ O. Z. $R_2 = 92.000$ O. Z. $\delta_0 = +1.0$; $\delta_2 = 0.0$		$D_1 = 8.$ $R_0 = 52.966$ O. Z. $R_2 = \infty$ $\delta_0 = +0.654$; $\delta_2 = +0.346$		$D_1 = 8.$ $R_0 = 53.000$ O. Z. $R_2 = 72748.000$ U. Z. $\delta_0 = +0.653$; $\delta_2 = +0.347$		$D_1 = 8.$ $R_0 = 57.708$ O. Z. $R_2 = 613.282$ U. Z. $\delta_0 = +0.6$; $\delta_2 = +0.4$	
		D	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*
A. Brennweiten: $F_{0,2}$		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	0.000 485	100.000	98.703	100.000	98.746	100.000	98.742	100.000	98.745
	10	95.708	94.478	98.324	97.080	98.320	97.080	99.012	97.735
	15	90.213	89.068	96.179	94.953	96.175	94.951	96.603	95 369
B. Vereinigungsweiten: A_2'									
	0.000 485	92.000	90.742	94.774	93.538	94.772	93.538	95.202	93.971
	10	89.256	88.059	93.730	92.508	93.727	92.507	94.208	92.954
	15	85.768	84.647	92.393	91.186	92,390	91.183	92.938	91.736
C. Hauptpunktsweiten									
1) ideale Werthe $E^* = \underset{Axe}{(}A_2' - F_{0,2})$									
$E^* + 0.000$	0.000 485	— 8.000	— 8.000	— 5.231	— 5.231	— 5.228	— 5.228	— 4.798	— 4.798
$E^* + 0.496$	10	— 7.504	— 7.504	— 4.735	— 4.735	— 4.732	— 4.732	— 4.302	— 4.302
$E^* + 1.106$	15	— 6.894	— 6.894	— 4.125	— 4.125	— 4.122	— 4.122	— 3.692	— 3.692
2) wirkliche Werthe $E = A_2' - F_{0,2}$									
	0.000 485	— 8.000	— 7.961	— 5.231	— 5.208	— 5.228	— 5.204	— 4.798	— 4.774
	10	— 6.452	— 6.419	— 4.594	— 4.572	— 4.593	— 4.573	— 4.300	— 4.269
	15	— 4.445	— 4.421	— 3.786	— 3.767	— 3.785	— 3.768	— 3,665	— 3,633
D. Oeffnungswinkel									
1) ideale Werthe $\beta^*_{0,2}$									
	0.000 485	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000
	10	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000
	15	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900

2) wirkliche Werthe $\beta_{0,2}$								
0.000 485	1''000	1''013	1''000	1''013	1''000	1''012	1''000	1''013
10	21473.600	21750.900	20906.400	21172.300	20907.000	21172.000	20867.700	21141.400
15	33985.000	34414.000	31912.000	32317.000	31913.000	32318.000	31774.000	32178.300
E. Fehler der Winkel								
1) Farbenfehler: ${}_D\beta_{0,2} - {}_F\beta_{0,2}$								
0.000 485	— 0''013		— 0''013		— 0''012		— 0''013	
10	— 277.300		— 265.900		— 265.000		— 273.700	
15	— 429.000		— 405.000		— 405.000		— 404.300	
2) Kugelgestaltfehler $\beta^*_{0,2} - \beta_{0,2}$								
0.000 845	0''000	— 0''013	0''000	— 0''013	0''000	— 0''012	0''000	— 0''013
10	— 812.600	— 1089.900	—245.400	— 511.300	—246.000	— 511.000	—206.700	— 480.400
15	— 2928.100	— 3357.100	—855.100	—1260.100	—856.100	—1261.100	—717.100	—1121.400
F. Fehler der Brennweiten								
1) Auf Seite der Brennpunkte (Ende der Brennweite)								
a) Farbenfehler ${}_DA_2' - {}_FA_2'$	mm		mm		mm		mm	
0.000 485	+ 1.258		+ 1.236		+ 1.234		+ 1.231	
10	+ 1.197		+ 1.222		+ 1.220		+ 1.254	
15	+ 1.121		+ 1.207		+ 1.207		+ 1.202	
b) Kugelgestaltfehler $\underset{Axe}{A_2'} - \underset{Rand}{A_2'}$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	+ 2.744	+ 2.683	+ 1.044	+ 1.030	+ 1.045	+ 1.031	+ 0.994	+ 1.017
15	+ 6.232	+ 6.095	+ 2.381	+ 2.352	+ 2.382	+ 2,355	+ 2.264	+ 2.235
2) Auf Seite der Hauptpunkte (Anfang der Brennweite)								
a) Farbenvergrösserungsfehler ${}_DE - {}_FE$	mm		mm		mm		mm	
0.000 485	— 0.039		— 0.023		— 0.024		— 0.024	
10	— 0.033		— 0.022		— 0.020		— 0.023	
15	— 0.024		— 0.019		— 0.017		— 0.032	
b) Verzerrung $E^* - \underset{Axe}{E}$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 845	0.000	— 0.039	0.000	— 0.023	0.000	— 0.024	0.000	— 0.024
10	— 1.052	— 1.085	— 0.141	— 0.163	— 0.139	— 0.159	— 0.002	— 0.033
15	— 2.449	— 2.473	— 0.339	— 0.358	— 0.337	— 0 354	— 0.027	— 0.059

		$D_1 = 8.$ $R_0 = 69.250$ *O. Z.* $R_2 = 216.195$ *U. Z.* $\delta_0 = +0.5$; $\delta_2 = +0.5$		$D_1 = 8.$ $R_0 = 104.529$ *O. Z.* $R_2 = 104.529$ *U. Z.* $\delta_0 = +0.331$; $\delta_2 = +0.669$		$D_1 = 8.$ $R_0 = 216.195$ *O. Z.* $R_2 = 69.250$ *U. Z.* $\delta_0 = +0.160$; $\delta_2 = +0.840$		$D_1 = 8.$ $R_0 = 72748.000$ *O. Z.* $R_2 = 53000$ *U. Z.* $\delta_0 = +0.0005$; $\delta_2 = +0.9995$	
		D	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*
A. Brennweiten: $F_{0,2}$		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	0.000 485	100.000	98.751	100.005	98.760	100.000	98.751	99.999	98.742
	10	98.701	97.454	98.585	97.337	97.884	96.636	96.743	95.487
	15	97.049	95.803	96.770	95.519	95.141	93.901	92.412	91.174
B. Vereinigungsweiten: A_2'									
	0.000 485	96.001	94.767	97.354	96.121	98 719	97 475	99 995	98.737
	10	94.975	93.745	95.812	94.575	96 064	94.824	95.765	94.520
	15	93.659	92.427	93.834	92.591	92.629	91.392	90.252	89.030
C. Hauptpunktsweiten									
1) ideale Werthe $E^* \underset{Axe}{=} (A_2' - F_{0,2})$									
$E^* + 0.000$	0 000 485	— 3.999	— 3.999	— 2.651	— 2.651	— 1.281	— 1.281	— 0.004	— 0.004
$E^* + 0.496$	10	— 3.503	— 3.503	— 2.155	— 2.155	— 0.785	— 0.785	+ 0.492	+ 0.492
$E^* + 1.106$	15	— 2.893	— 2.893	— 1.545	— 1.545	— 0.175	— 0.175	+ 1.102	+ 1.102
2) wirkliche Werthe $E = A_2' - F_{0,2}$									
	0.000 485	— 3.999	— 3.984	— 2.651	— 2.639	— 1.281	— 1.276	— 0.004	— 0.005
	10	— 3.726	— 3.709	— 2.773	— 2.762	— 1.820	— 1.812	— 0.978	— 0.967
	15	— 3.390	— 3.376	— 2.936	— 2.928	— 2.512	— 2 509	— 2.160	— 2.144
D. Oeffnungswinkel									
1) ideale Werthe $\beta^*_{0,2}$									
	0.000 485	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000
	10	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000
	15	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900

	I		II		III		IV	
2) wirkliche Werthe $\beta_{0,2}$								
0.000 485	1″000	1″013	1″000	1″013	1″000	1″013	1″000	1″012
10	20827.000	21096.400	20851.300	21116.400	20999.600	21268.600	21245.500	21532.900
15	31630.000	32035.000	31720.000	32129.000	32254.000	32673.000	33190.200	33625.600
E. Fehler der Winkel ${}_D\beta_{0,2} - {}_F\beta_{0,2}$								
1) Farbenfehler								
0.000 485	— 0″013		— 0″013		— 0″013		— 0″012	
10	— 269.400		— 265.100		— 269.000		— 277.400	
15	— 405.000		— 409.000		— 419.000		— 435.400	
2) Kugelgestaltfehler $\beta^*_{0,2} - \beta_{0,2}$								
0.000 485	0″000	— 0″013	0″000	— 0″013	0″000	0″000	0″000	0″000
10	— 166.000	— 435.400	—190.300	— 455.400	— 338.600	— 607.600	— 584.500	— 861.900
15	— 523.100	— 978.100	—663.100	—1072.100	—1197.100	—1616.100	—2133.300	—2568.700
F. Fehler der Brennweiten								
1) Auf Seite der Brennpunkte (Ende der Brennweite)								
a) Farbenfehler: ${}_DA_2' - {}_FA_2'$	mm		mm		mm		mm	
0.000 485	+ 1.234		+ 1.233		+ 1.244		+ 1.258	
10	+ 1.230		+ 1.237		+ 1.240		+ 1.245	
15	+ 1.232		+ 1.243		+ 1.237		+ 1.222	
b) Kugelgestaltfehler $A_{2\,Axe}' - A_{2\,Rand}'$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	+ 1.026	+ 1.022	+ 1.542	+ 1.546	+ 2.655	+ 2.651	+ 4.230	+ 4.217
15	+ 2.342	+ 2.340	+ 3.520	+ 3.530	+ 6.090	+ 6.083	+ 9.743	+ 9.707
2) Auf Seite der Hauptpunkte (Anfang der Brennweite)								
a) Farbenvergrösserungsfehler ${}_DE - {}_FE$	mm		mm		mm		mm	
0.000 485	— 0.015		— 0.012		— 0.005		+ 0.001	
10	— 0.017		— 0.011		— 0.008		— 0.011	
15	— 0.014		— 0.008		— 0.003		— 0.016	
b) Verzerrung $E^* - E$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	0.000	+ 0.015	0.000	+ 0.012	0.000	+ 0.005	0.000	+ 0.001
10	+ 0.223	+ 0.206	+ 0.618	+ 0.607	+ 1.035	+ 1.027	+ 1.470	+ 1.459
15	+ 0.497	+ 0.483	+ 1.391	+ 1.383	+ 2.337	+ 2.334	+ 3.262	+ 3.246

		$D_1 = 8.\ R_0 = \infty$, $R_2 = 52\,966$ U. Z. $\delta_0 = 0.0;\ \delta_2 = +1.00$		$D_1 = 8.\ R_0 = 92.000$ U. Z. $R_2 = 34.625$ U. Z. $\delta_0 = -0.376;\ \delta_2 = +1.376$		$D_1 = 8.\ R_0 = 34.625$ U. Z. $R_2 = 22.612$ U. Z. $\delta_0 = -1.0;\ \delta_2 = +2.0$		$D_1 = 8.\ R_0 = 28\,854$ U. Z. $R_2 = 20.472$ U. Z. $\delta_0 = -1.2;\ \delta_2 = +2.2$	
		D	F	D	F	D	F	D	F
A. Brennweiten: $F_{0,2}$		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	0.000 485	100.005	98.746	100.000	98.705	99.995	98.587	100.005	98.546
	10	96.716	95.475	91.981	90.759	77.963	76.821	71.822	70.716
	15	92.417	91.195	81.409	80.275	48.092	47.203	30.387	29.371
B. Vereinigungsweiten: A_2'									
	0.000 485	100.005	98.746	103.010	101.701	107.996	106.540	109.605	108 086
	10	95.764	94.523	92.854	91.619	80.738	79.555	74.762	73.604
	15	90.249	89.028	79.587	78.440	44.238	43.313	24.657	23.583
C. Hauptpunktsweiten									
1) ideale Werthe $E^* \underset{Axe}{=} (A_2' - F_{0,2})$									
$E^* + 0.000$	0.000 485	0.000	0.000	+ 3.010	+ 3.010	+ 8.001	+ 8.001	+ 9.600	+ 9.600
$E^* + 0.496$	10	+ 0.496	+ 0.496	+ 3.506	+ 3.506	+ 8.497	+ 8.497	+ 10.096	+ 10.096
$E^* + 1.106$	15	+ 1.106	+ 1.106	+ 4.116	+ 4.116	+ 9.107	+ 9.107	+ 10.706	+ 10.706
2) wirkliche Werthe $E = A_2' - F_{0,2}$									
	0 000 485	0.000	0.000	+ 3.010	+ 2.996	+ 8.001	+ 7.953	+ 9.600	+ 9.540
	10	− 0.952	− 0.952	+ 0.873	+ 0.860	+ 2.775	+ 2.734	+ 2.940	+ 2.888
	15	− 2.168	− 2.167	− 1.822	− 1.835	− 3.854	− 3.890	− 5.730	− 5.788
D. Oeffnungswinkel									
1) ideale Werthe $\beta^*_{0,2}$									
	0.000 485	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000	1″000
	10	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000
	15	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900

2) wirkliche Werthe $\beta_{0,2}$								
0.000 485	1.000	1.013	1.000	1.013	1.000	1.014	1.000	1.015
10	21252.300	21526.000	22336.900	22635.300	26313.000	26700.000	28535.000	28925.000
15	33190.600	33627.800	37584.000	38103.000	62362.000	63464.000	94581.000	97395.000
E. Fehler der Winkel ${}_D\beta_{0,2} - {}_F\beta_{0,2}$								
1) Farbenfehler								
0.000 485	— 0".013		— 0".013		— 0".014		— 0".015	
10	— 274.300		— 298.400		— 387.000		— 390.000	
15	— 437.200		— 519.000		— 1102.000		— 2814.000	
2) Kugelgestaltfehler $\beta^*_{0,2} - \beta_{0,2}$								
0.000 485	0".000	0".000	0".000	0".000	0".000	- 0".015	0".000	- 0".015
10	- 591.300	- 865.600	-1675.900	-1974.300	- 5652.000	- 6039.000	- 7874.000	- 8264.000
15	- 2133.700	- 2570.900	-6527.100	-7046.100	-31305.100	-32407.100	-63524.100	-66338.100
F. Fehler der Brennweiten								
1) Auf Seite der Brennpunkte (Ende der Brennweite)								
a) Farbenfehler: ${}_DA_2' - {}_FA_2'$	mm		mm		mm		mm	
0.000 485	+ 1.259		+ 1.309		+ 1.456		+ 1.519	
10	+ 1.241		+ 1.235		+ 1.183		+ 1.158	
15	+ 1.221		+ 1.147		+ 0.925		+ 1.074	
b) Kugelgestaltfehler $\underset{Axe}{A_2'} - \underset{Rand}{A_2'}$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	+ 4.241	+ 4.223	+ 10.156	+ 10.082	+ 27.258	+ 26.985	+ 34.843	+ 34.482
15	+ 9.756	+ 9.718	+ 23.423	+ 23.261	+ 63.758	+ 63.227	+ 84.948	+ 84.503
2) Auf Seite der Hauptpunke (Anfang der Brennweite)								
a) Farbenvergrösserungsfehler ${}_DE - {}_FE$	mm		mm		mm		mm	
0.000 485	0.000		+ 0.014		+ 0.048		+ 0.060	
10	0.000		+ 0.013		+ 0.041		+ 0.052	
15	— 0.001		+ 0.013		+ 0.036		+ 0.058	
b) Verzerrung $E^* - E$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	0.000	0.000	0.000	0.014	0.000	0.048	0.000	0.060
10	+ 1.448	+ 1.448	+ 2.633	+ 2.646	+ 5.722	+ 5.763	+ 7.156	+ 7.208
15	+ 3.274	+ 3.273	+ 5.938	+ 5.951	+ 12.961	+ 12.997	+ 16.436	+ 16.494

punkten der Brennweiten. Vergleicht man die Winkelfehler, so ergiebt sich, dass die Fehler in den Endpunkten der Brennweiten ungefähr da ihr Minimum erreichen, wo die Brechung gleich in die beiden Linsenflächen vertheilt ist. (Strenge richtig ist diese Angabe nicht, da die Vertheilung der Brechungen am Rande nicht die gleichen sind, wie in der Axe.) In unserer Tabelle ist das Minimum des Farbenfehlers bei einer halben Linsenöffnung von 15^{mm} im Winkel ausgedrückt — 405″, und wächst dieser Fehler nach beiden Seiten auf — 1028″, wenn die erste Brechung die stärkste, und auf — 2814″, wenn die letzte Brechung die stärkste ist. Das Minimum des Kugelgestaltfehlers ist bei der soeben angegebenen Linsenöffnung — 523″ und wächst dieser Fehler ebenfalls nach beiden Seiten, und um so stärker, je ungleicher die Vertheilung der Brechungen in die beiden Linsenflächen ist; im ersten Beispiele beträgt er — 111434″ und im letzten Falle — 63524″. Drückt man diese Fehler in Vereinigungsweiten aus, wie in F: 1) und 2), so erscheinen sie, wenigstens für die Randstrahlen, entstellt. Die an beiden Flächen gleich stark brechende Linse giebt in der Axe einen Farbenfehler von 1.234^{mm}, und dieser Fehler wächst nach beiden Seiten, wenn die Brechungen ungleich vertheilt sind, jedoch in unserem Beispiele nur um $^1/_4$ des Minimalwerthes, nämlich auf 1.557^{mm}, beziehungsweise auf 1.519^{mm}. Für die Randstrahlen dagegen erscheint für die gleich brechende Linse der Farbenfehler, in Längenabweichung ausgedrückt, für verschiedene Linsenöffnungen wenig geändert, bei der halben Linsenöffnung von 15^{mm} gleich 1.232^{mm}; bei anderer Vertheilung der Brechungen in die beiden Linsenflächen nimmt der Fehler, bei der eben angegebenen Linsenöffnung, nach beiden Seiten hin ab, er beträgt im ersten Beispiele 0.178^{mm} und im letzten 1.074^{mm}. Der Kugelgestaltfehler, der sein Minimum in jenem Falle hat, wo die beiden Brechungen gleich sind, erscheint hierbei bei halber Linsenöffnung von 15^{mm} zu 2.342^{mm}, und in den Grenzfällen 57.938^{mm} beziehungsweise 84.948^{mm}, also bei weitem nicht so vielmal verschieden als bei der Ausdrucksweise der Fehler in Winkeln. Der Farbenvergrösserungsfehler hat sein Minimum in jenem Falle, wenn die Brechung an der ersten Fläche Null ist, somit die ganze Brechung an der zweiten Fläche statt hat, wodurch der Fall einem von der Linsendicke Null sich conform verhält und kein Farbenvergrösserungsfehler vorhanden ist. Bei anderer Vertheilung der Brechungen wächst der Fehler des Axenstrahles nach beiden Seiten, aber mit entgegengesetzten Zeichen und erreicht im ersteren Falle den Werth — 0.167^{mm}, im letzten den von + 1.060^{mm}. Bei den Randstrahlen ist der Farbenvergrösserungsfehler, in demselben Falle wie oben, Null, und es ändert der Fehler mit anderer Vertheilung der Brechung nur wenig, was hauptsächlich von dem verschiedenen Einfluss der Dicke bei verschiedenen Formen herrührt. Der Fehler der Verzerrung geht durch Null ungefähr bei der Form, welche gleiche Brechung an beiden Flächen giebt, und wächst nach beiden Seiten mit entgegengesetztem Zeichen; diese Grenzen sind im ersten Beispiel — 22.856^{mm} und im letzten + 16.436^{mm}.

Man sieht also, dass die Fehler an den Endpunkten der Brennweiten alle in gleichem Sinne liegen, während die Fehler an den Anfangspunkten der Brennweiten die Zeichen wechseln. In beiden Fällen wachsen die Fehler, je ungleicher die Brechungen in die beiden Flächen vertheilt sind.

IV. Einfluss der Glasart der Linse auf die Fehler der Brennweiten.

		$_Dn = 1.5159$; $_Fn = 1.5211$; $D_1 = 8$. $R_0 = 68.064$ O. Z. $R_2 = 204.621$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = +0.5$		$_Dn = 1.5297$; $_Fn = 1.5364$; $D_1 = 8$. $R_0 = 69.250$ O. Z. $R_2 = 216.195$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = +0.5$		$_Dn = 1.6255$; $_Fn = 1.6379$; $D_1 = 8$. $R_0 = 76.963$ O. Z. $R_2 = 320.730$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = +0.5$		$_Dn = 1.9626$; $_Fn = 1.9981$; $D_1 = 8$. $R_0 = 98.093$ O. Z. $R_2 = 4945.500$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = +0.5$	
		D	F	D	F	D	F	D	F
A. Brennweiten: $F_{0,2}$		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	0.000 485	100.000	99.008	100.000	98.751	100 000	98.073	100.000	96.445
	10	98.662	97.685	98.701	97.454	98.903	96.977	99.229	95.667
	15	96.962	95.973	97.049	95.803	97.510	95.585	98.254	94.689
	22 5	92.991	92.011	93 194	91.959	94.282	92.359	96.024	92.436
B. Vereinigungsweiten: A_2'									
	0 000 485	96.000	95.026	96.001	94.767	96.005	94.109	96.000	92.517
	10	94.929	93.972	94.975	93.745	95.171	93.279	95.494	92.002
	15	93.581	92 594	93.659	92.427	94.119	92.213	94.849	91.346
	22.5	90.344	89.367	90.545	89.325	91.633	89.729	93.356	89 825
C. Hauptpunktsweiten									
1) ideale Werthe $E^*_{Axe} = (A_2' - F_{0,2})$									
$E^* + 0.000$	0.000 485	— 4.000	— 4.000	— 3.999	— 3.999	— 3.995	— 3.995	— 4 000	— 4.000
$E^* + 0.496$	10	— 3.504	— 3.504	— 3.503	— 3.503	— 3.499	— 3 499	— 3.504	— 3.504
$E^* + 1.106$	15	— 2.894	— 2.894	— 2.883	— 2.883	— 2.889	— 2.889	— 2.894	— 2.894
$E^* + 2 439$	22 5	— 1.561	— 1.561	— 1 560	— 1.560	— 1.556	— 1.556	— 1 561	— 1.561
2) wirkliche Werthe $E = (A_2' - F_{0,2})$									
	0.000 485	— 4.000	— 3.982	— 3.999	— 3.984	— 3.995	— 3.964	— 4.000	— 3 928
	10	— 3.733	— 3.713	— 3.726	— 3.709	— 3.732	— 3.698	— 3.735	— 3.665
	15	— 3.385	— 3.379	— 3.390	— 3.376	— 3.391	— 3.372	— 3.405	— 3.343
	22.5	— 2.647	— 2 644	— 2.649	— 2.634	— 2.649	— 2.630	— 2 668	— 2.611

IV. Einfluss der Glasart der Linse auf die Fehler der Brennweiten.

	$_{D}n = 1.5159$; $_{F}n = 1.5211$ $D_1 = 8.$ $R_0 = 68.064$ O. Z. $R_2 = 204.621$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = +0.5$		$_{D}n = 1.5297$; $_{F}n = 1.5364$ $D_1 = 8.$ $R_0 = 69.250$ O. Z. $R_2 = 216.195$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = +0.5$		$_{D}n = 1.6255$; $_{F}n = 1.6379$ $D_1 = 8.$ $R_0 = 76.963$ O. Z. $R_2 = 320.730$ U. Z. $\delta_0 = \delta_2 = +0.5$		$_{D}n = 1.9626$; $_{F}n = 1.9981$ $D_1 = 8.$ $R_0 = 98.093$ O. Z. $R_2 = 4945.500$ U. Z $\delta_0 = \delta_2 = +0.5$	
	D	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*	*D*	*F*
D. Oeffnungswinkel								
1) ideale Werthe $\beta^*_{0,2}$								
0.000 485	1''000	1''000	1''000	1''000	1''000	1''000	1''000	1''000
10	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000	20661.000
15	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900	31056.900
22.5	46810.300	46810.300	46810.300	46810.300	46810.300	46810.300	46810.300	46810.300
2) wirkliche Werthe $\beta_{0,2}$								
0.000 485	1.000	1.010	1.000	1.013	1.000	1.020	1.000	1.037
10	20835.000	21042.000	20827.000	21091.400	20784.400	21194.500	20717.000	21483.000
15	31658.000	31979.000	31630.000	32035.000	31483.000	32107.000	31248.000	32406.000
22.5	48966.000	49468.000	48863.000	49495.000	48320.000	49289.000	47475.000	49249.000
E. Winkelfehler								
1) Farbenfehler $_{D}\beta_{0,2} - {}_{F}\beta_{0,2}$								
0.000 485	— 1''010		— 1''013		— 1''020		— 1''037	
10	— 207.000		— 264.400		— 410.100		— 766.000	
15	— 321.000		— 405.000		— 624.000		— 1158.000	
22.5	— 502.000		— 632.000		— 831.000		— 1774.000	
2) Kugelgestaltfehler $\beta^*_{0,2} - \beta_{0,2}$								
0.000 485	0''000	— 0''010	0''000	— 0''013	0''000	— 0''020	0''000	— 0''037
10	— 174.000	— 381.000	— 166.000	— 430.400	— 123.400	— 533.500	— 56.000	— 822.000
15	— 602.900	— 922.100	— 573.100	— 978.100	— 426.100	—1050.100	—191.100	—1349.100
22.5	—2156.800	—2657.700	—2052.700	—2684.700	—1509.700	—2478.700	—664.700	—2438.700

F. Fehler der Brennweiten								
1) Auf Seite der Brennpunkte (Ende der Brennweite)								
a) Farbenfehler ${}_DA_2' - {}_FA_2'$	mm		mm		mm		mm	
0.000 485	+ 0.974		+ 1.234		+ 1.896		+ 3.483	
10	+ 0.957		+ 1.230		+ 1.892		+ 3.492	
15	+ 0.987		+ 1.232		+ 1.906		+ 3.503	
22.5	+ 0.977		+ 1.220		+ 1.904		+ 3.331	
b) Kugelgestaltfehler $A_{2\,Axe}' - A_{2\,Rand}'$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0 000
10	+ 1.071	+ 1.054	+ 1.026	+ 1.022	+ 0.834	+ 0.830	+ 0.506	+ 0.515
15	+ 2.419	+ 2.432	+ 2.345	+ 2.340	+ 1.886	+ 1.896	+ 1.151	+ 1.171
22.5	+ 5.656	+ 5.659	+ 5 456	+ 5.442	+ 4.372	+ 4.380	+ 2.644	+ 2.692
2) Auf Seite der Hauptpunkte (Anfang der Brennweite)								
a) Farbenvergrösserungsfehler ${}_DE - {}_FE$	mm		mm		mm		mm	
0.000 485	— 0.018		— 0.015		— 0.031		— 0.072	
10	— 0.020		— 0.017		— 0.034		— 0.070	
15	— 0 006		— 0.015		— 0.019		— 0.062	
22.5	— 0.003		— 0.015		— 0.019		— 0.057	
b) Verzerrung $E^* - E$	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0.000 485	0.000	— 0.018	+ 0.000	— 0.015	0.000	— 0.031	0.000	— 0.072
10	+ 0.229	+ 0.209	+ 0.223	+ 0.206	+ 0.233	+ 0.199	+ 0.231	+ 0.161
15	+ 0.491	+ 0 485	+ 0.507	+ 0.493	+ 0.502	+ 0.483	+ 0.511	+ 0.449
22.5	+ 1.086	+ 1.083	+ 1.089	+ 1.074	+ 1.093	+ 1.074	+ 1.107	+ 1.050

d. Einfluss der Wahl der Glasart auf die Fehler in den Brennweiten.

In der vorhergehenden Tabelle IV sind für vier Glasarten Linsen von gleicher Leistung, gleicher Dicke und gleicher Construction (nämlich gleiche Brechung an beiden Flächen) die Rechnungsresultate, welche ausser den in den früheren Fällen gerechneten Strahlen noch solche in der Höhe von 22.5^{mm} einfallende enthält, in ganz gleicher Reihenfolge, wie in den früheren Tabellen, in den Rubriken A. bis D. zusammengestellt.

Die zur Herstellung einer Linse verwendeten Gläser können sich einerseits durch die Grösse des Brechungsindex für die Farbe D, und andrerseits durch die Grösse der Zerstreuung unterscheiden. In unseren Beispielen wachsen sowohl die Brechungen als die Zerstreuungen für die in der Tabelle einander folgenden Linsen. Aendert sich die Brechung oder die Zerstreuung der gewählten Glasarten, so beeinflussen dieselben in bedeutendem Maasse die Endpunkte der Brennweiten, in geringerem die Anfangspunkte derselben. Bleibt die Brechung ungeändert während die Zerstreuung ändert, so ergiebt sich für Linsen von gleicher Leistung und gleicher Dicke keine Aenderung in den Radien der Linsen, und es wird nur der Farbenfehler bedeutend, der Farbenvergrösserungsfehler wenig ändern. Der Farbenfehler wird um so grösser, je stärker die Zerstreuung der gewählten Glasart ist. Aenderungen in dem Brechungsindex der Linie D bedingen bei gleicher Leistung und gleicher Dicke andere Radien der Linsen, und zwar längere bei grösserem Brechungsindex, kürzere bei geringerem. Indem die Radien länger werden, wird die Maximalöffnung grösser, der Kugelgestaltfehler wird um so kleiner, je grösser ${}_Dn$ ist.

Aus der Tabelle ist endlich noch zu sehen, dass für die schwächer brechenden Gläser der Kugelgestaltfehler bei dem Oeffnungshalbmesser von 22.5^{mm} grösser als der Farbenfehler wird, während bei der stärksten Glasart der Kugelgestaltfehler für diese Oeffnung kleiner als der Farbenfehler ist. Je stärkere Gläser angewendet werden, um so grösser wird die Oeffnung, bei welcher der Kugelgestaltfehler und der Farbenfehler gleich gross werden.

Die in den vier vorausgehenden Tabellen zusammengestellten Resultate lassen noch folgende allgemeine Folgerungen ziehen.

Zu Aenderungen am Ende der Brennweiten muss man hauptsächlich Aenderungen in den Radien der Linsen und der Glasarten benützen (wobei die Oeffnung der Linse als eine gegebene Voraussetzung zu betrachten ist), während die Dicke der Linsen das Element ist, mit welchem die Anfangspunkte der Brennweiten vorzugsweise geändert werden können. Der Einfluss der Dicken (Entfernung zwischen brechenden Flächen) ist ein um so grösserer, je ungleicher die Brechungen in beide Flächen vertheilt sind.

§ 8. Bilddurchmesser eines in der Axe gelegenen Objectpunktes, und Winkel, unter welchem der Durchmesser dieses Bildes vom zweiten Hauptpunkte aus erscheint.

Im Vorausgehenden haben wir gesehen, dass die von einem unendlich weit von der Linse entfernten, in der Axe gelegenen Objectpunkte ausgehenden Strahlen sich nicht in einem Punkte der Axe treffen, dass also dem Objectpunkte kein Bildpunkt, sondern eine Bildfläche entspricht; wobei man als richtigsten Ort, in welchem das Bild aufgefangen werden soll, diejenige zur Axe senkrechte Ebene (Einstellebene) annehmen wird, in welcher das Licht am meisten zusammengedrängt erscheint. Gauss[1]) und Bessel[2]) sprechen sich über die zweckmässigste Annahme der Einstellebene aus; ersterer in einem Briefe an Brandes, letzterer in seiner Untersuchung des Königsberger Heliometers. Beide sagen, dass bei dieser Annahme immerhin einige Willkürlichkeit herrsche, dass es aber das Beste sei, nach demselben Principe zu verfahren, das der Methode der kleinsten Quadrate zu Grunde liege. Danach ergiebt sich, dass die grösste Zusammendrängung des Lichtes auf einer die Axe senkrecht durchschneidenden Ebene da anzunehmen ist, wo das Product der auf jeden Punkt fallenden Lichtmenge und des Quadrates seiner Entfernung von der Axe ein Minimum wird. Bessel entwickelt auch die Formel für die Entfernung der Einstellebene vom Scheitel der letzten brechenden Fläche, nämlich:

$$\frac{7\,[A_2'\,\mathrm{tg}^2\,\beta_{02}\cos\eta_0\sin\eta_0]_0 + 32\,[A_2'\,\mathrm{tg}^2\,\beta_{02}\cos\eta_0\sin\eta_0]_{3.75}}{7\,[\mathrm{tg}^2\,\beta_{02}\cos\eta_0\sin\eta_0]_0 + 32\,[\mathrm{tg}^2\,\beta_{02}\cos\eta_0\sin\eta_0]_{3.75}}$$

$$\frac{+\,12[A_2'\,\mathrm{tg}^2\,\beta_{02}\cos\eta_0\sin\eta_0]_{7.5} + 32\,[A_2'\,\mathrm{tg}^2\,\beta_{02}\cos\eta_0\sin\eta_0]_{10.25}}{+\,12\,[\mathrm{tg}^2\,\beta_{02}\cos\eta_0\sin\eta_0]_{7.5} + 32\,[\mathrm{tg}^2\,\beta_{02}\cos\eta_0\sin\eta_0]_{10.25}}$$

$$\frac{+\,7\,[A_2'\,\mathrm{tg}^2\,\beta_{02}\cos\eta_0\sin\eta_0]_{15}}{7\,[\mathrm{tg}^2\,\beta_{02}\cos\eta_0\sin\eta_0]_{15}},$$

wobei β_{02} die Winkel der austretenden Strahlen mit der Axe, A_2' die Entfernung der Schnittpunkte dieser Strahlen mit der Axe und zwar vom Scheitel der letzten brechenden Fläche aus gezählt, und η_0 endlich die Oeffnungswinkel der ersten brechenden Fläche an der vom Randstrahl getroffenen Stelle bedeuten. Die der Klammer rechts unten beigesetzten Indices geben an, für welche Einfallshöhe die betreffenden Werthe einzusetzen sind.

Als Beispiel führen wir die Rechnung für die Linse an, welche gleiche Brechung an beiden Linsenflächen hat; es ist für diese bei:

H_0	$\beta_{0,2}$			η_0			A_2' mm
0.0	0°	0′	0″.0	0°	0′	0″.0	96.000
3.75	2	9	5.5	3	6	15.0	95.857
7.5	4	19	13.9	6	13	3.0	95.426
10.25	5	55	58.1	8	30	42.4	94.925
15.0	8	47	10.0	12	30	35.0	93.659

1) *Gehler's* physikalisches Wörterbuch; neu bearbeitet. Leipzig 1831. Bd. VI. Abth. 1. S. 437.

2) *Bessel*, Astronomische Untersuchungen. Königsberg 1841. Bd. I. S. 103.

Unter Anwendung der obigen Formel erhält man dann als Entfernung der Einstellebene von der letzten brechenden Fläche aus gerechnet

$$\overset{\text{mm}}{94.517}.$$

In dieser zur Axe senkrechten Ebene schneiden die angenommenen Strahlen in den Höhen:

$$\overset{\text{mm}}{0.0000}, \quad + \overset{\text{mm}}{0.0503}, \quad + \overset{\text{mm}}{0.0687}, \quad + \overset{\text{mm}}{0.0424} \text{ und } - \overset{\text{mm}}{0.1326};$$

vom zweiten Hauptpunkte aus erscheinen die Schnittpunkte unter den Winkeln:

$$+ 0^0\,0'\,0''\!.0, \; + 0^0\,1'\,46'', \; + 0^0\,2'\,24'', \; + 0^0\,1'\,29'' \text{ und } - 0^0\,4'\,38''.$$

In gleicher Weise sollte für die übrigen Linsen die richtigste Einstellebene bestimmt werden, um dann die in dieser Einstellebene erzeugten Bildflächen discutieren zu können. Diese Rechnung erfordert einen unverhältnissmässig grossen Aufwand, weshalb wir uns erlauben einen anderen, wenn auch nicht exacten Weg einzuschlagen, was um so mehr gerechtfertigt erscheint, als bei dem grossen unter Anwendung einer Linse auftretenden Bildfehler eine bedeutendere Genauigkeit nicht erforderlich ist. Die Hauptsache ist bei vergleichenden Rechnungen, stets dieselbe Methode zur Ermittelung der Einstellebene und damit des Durchmessers vom Bilde eines Punktes zu benützen, da bei Vergleichungsrechnungen zur Ermittelung der besten Construction es nicht sowohl auf die absoluten als auf die relativen Werthe ankommt. Gauss[1]) hat angegeben, dass dann, wenn bei einer Linsencombination der Axen- und der Randstrahl an gleicher Stelle die Axe treffen, der in $^2/_3$ des Oeffnungshalbmessers einfallende Strahl die grösste übrig bleibende Abweichung zeigt, so dass es in diesem Falle angezeigt ist, die durch den Schnittpunkt des austretenden oberen Randstrahles mit dem austretenden unteren $^2/_3$-Randstrahl gehende Ebene als Einstellebene zu benützen. Diese Regel wollen wir nun auch auf das von einer Linse entworfene Bild anwenden, obwohl hier der Axen- und der Randstrahl an verschiedenen Stellen die Axe treffen. Bedeuten ①[2]) und ② die vom Schnittpunkte des Randstrahles mit der Axe, beziehungsweise vom Schnittpunkte des $^2/_3$-Randstrahles mit der Axe aus gezählte Entfernung bis zum Schnittpunkte der Einstellebene mit der Axe, beide in der Richtung des einfallenden Lichtes positiv angenommen, so wird:

$$① - ② = {}_{^2/_3R}A_2' - {}_RA_2',$$

ferner ist:

$$H^* = ① \operatorname{tg} {}_R\beta_{02},$$

$$- H^* = ② \operatorname{tg} {}_{^2/_3R}\beta_{02}.$$

1) Ueber die achromatischen Doppelobjective, besonders in Rücksicht der vollkommneren Aufhebung der Farbenzerstreuung von *F. Gauss.* Zeitschr. für Astronomie von Bohnenberger und Lindenau. Tübingen 1817. Bd. IV. S. 345.

2) Wir geben den nur vorübergehend vorkommenden Abständen diese auffällige Bezeichnung, um jede Verwechslung zu vermeiden.

Mit Hülfe der eben gegebenen Gleichungen sind ①, ② und H^* zu bestimmen, es ist nämlich:

$$② = -\frac{{}_{^2/_3R}A_2' - {}_RA_2'}{1 + \frac{\operatorname{tg} {}_{^2/_3R}\beta_{02}}{\operatorname{tg} {}_R\beta_{02}}},$$

$$① = \frac{{}_{^2/_3R}A_2' - {}_RA_2'}{1 + \frac{\operatorname{tg} {}_R\beta_{02}}{\operatorname{tg} {}_{^2/_3R}\beta_{02}}},$$

$$H^* = ① \operatorname{tg} {}_R\beta_{02} = - ② \operatorname{tg} {}_{^2/_3R}\beta_{02}.$$

Die Entfernung der Einstellebene von der letzten brechenden Fläche erhält man nun durch die Werthe:

$${}_RA_2' + ① = {}_{^2/_3R}A_2' + ②.$$

Bei dieser Rechnung können wir Rand- und $^2/_3$-Randstrahlen für die Linie D oder für die Linie F annehmen, und erhalten somit für die beiden Farben zwei verschiedene Einstellebenen. Wenn Licht von beiden Farben als wirkend angenommen wird, findet sich eine dritte Einstellebene, in welcher das Gesammtbild aufzufangen ist, und zwar ergiebt sich dieselbe aus dem Durchschnitt des oberen stärker brechenden Randstrahles mit dem unteren schwächer brechenden $^2/_3$-Randstrahl. Der entsprechende Werth von H^* ist dabei immer der halbe Bilddurchmesser in der angenommenen Einstellebene[1]).

Als Beispiel wählen wir wieder die an beiden Flächen gleich stark brechende Linse; es ist für dieselbe:

$${}_{15}A_2' = \overset{\text{mm}}{93.659}; \quad {}_{10}A_2' = \overset{\text{mm}}{94.982}; \quad \log \operatorname{tg} {}_{15}\beta_{0,2} = 9.189\,10$$

und

$$\log \operatorname{tg} {}_{10}\beta_{02} = 9.005\,68.$$

Deshalb wird:

$$① - ② = 94.982 - 93.659 = \overset{\text{mm}}{1.323},$$

und ferner:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} {}_{10}\beta_{02} &= 9.005\,68 \\ \log \operatorname{tg} {}_{15}\beta_{02} &= \underline{9.189\,10} \\ \log \operatorname{tg} {}_{10}\beta_{02} - \log \operatorname{tg} {}_{15}\beta_{02} &= 9.816\,58 \end{aligned}$$

---

1) Zur Berechnung der Einstellebene kann man auch ein Näherungsverfahren einschlagen, das rascher zum Endresultate führt, als die Anwendung der eben angegebenen Formeln. Man erhält nämlich die Entfernung der Einstellebene vom Scheitel der letzten brechenden Fläche durch die Gleichung:

$${}_RA_2' + ① = {}_{^2/_3R}A_2' + ② = 0.4\,[{}_{^2/_3R}A_2' - {}_RA_2'].$$

Wir unterlassen es hier diese Rechnungsmethode zu benützen, da bei einer Linse die vorkommenden Fehler so gross werden können, dass es zweckmässiger ist, die genaue Rechnung beizubehalten. Bei den Betrachtungen im nächsten Capitel über Linsencombinationen werden wir auf die eben erwähnte angenähert richtige Rechnungsmethode nochmals zurückkommen.

$$\text{tg}\ {}_{10}\beta_{02} : \text{tg}\ {}_{15}\beta_{02} = \quad 0.655\,51$$
$$1 = \quad 1$$
$$1 + \frac{\text{tg}\ {}_{10}\beta_{02}}{\text{tg}\ {}_{15}\beta_{02}} = \quad 1.655\,51$$

$$\log - 1.323 = \quad 0.121\,56n$$
$$\log 1.655\,51 = \quad 0.218\,93$$
$$\log ② = \quad 9.902\,63n$$
$$② = -\ 0.799\,15$$
$$① = +\ 0.523\,85$$
$$① - ② = +\ 1.323$$

$$\log ② = \quad 9.719\,21$$
$$\log \text{tg}\ {}_{15}\beta_{02} = \quad 9.189\,10$$
$$\log H^* = \quad 8.908\,31$$

$$H^* = \quad 0.080\,97$$

$${}_{15}A_2' = \quad 93.659$$
$$+ ② = \quad 0.524$$

Einstellebene: = 94.183[1]) vom Scheitel der letzten
$E =$ 3.999 [Fläche aus
Einstellebene: = 98.182 vom zweiten Hauptpunkt aus.

Ferner können wir jetzt den Winkel rechnen, unter welchem der Bilddurchmesser von dem Hauptpunkte aus erscheint; bezeichnen wir die Hälfte des eben erwähnten Winkels durch μ, so erhält man, wie sofort aus der Fig. 51 erkenntlich:

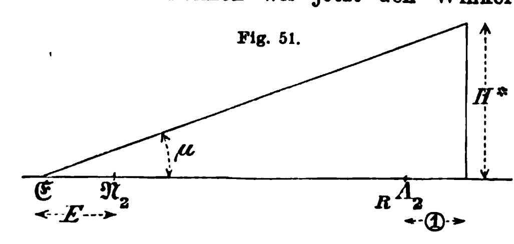


Fig. 51.

$$\text{tg}\ \mu = \frac{H^*}{{}_RA_2' + ① - E},$$

woraus dann μ zu berechnen ist, und der gesuchte Winkel, unter welchem der Bilddurchmesser vom Hauptpunkte aus erscheint, durch Multiplication mit 2 erhalten wird.

Für das obige Beispiel ist:

$${}_{15}A_2' + ① - E = 98.182;\ \text{also}$$
$$\log H^* = 8.908\,31$$
$$\log({}_{15}A_2' + ① - E) = 1.991\,03$$
$$\log \text{tg}\ \mu = 6.917\,28$$
$$\mu = 0^0\ 2'\ 50''.5\ \text{und}$$
$$2\mu = 0^0\ 5'\ 41''.$$

1) Nach dem oben angegebenen Näherungsverfahren ist:

$$0.4\,[{}^2/_3\,{}_RA_2' - {}_RA_2'] = 0.4 \times 1.323 = 0.529,$$

und

$${}_RA_2' = 93.659$$
$$0.4\,[{}^2/_3\,{}_RA_2' - {}_RA_2'] = 0.529$$
$$\text{Einstellebene} = 94.188,$$

also sehr nahe übereinstimmend mit dem genauen Werthe.

Es ist klar, dass der Winkel 2μ ein Maass für die Güte der Linsenconstruction ist. Wenn wir nämlich die Brennweite und Oeffnung für constant annehmen, so ist sowohl der Durchmesser des Bildes eines Punktes, als auch der Winkel, unter dem dieser vom zweiten Hauptpunkte aus erscheint, ein Maass für die Deutlichkeit, die erzielt ist. Aendert man den Maassstab des Systems (die Brennweite), ohne aber die Construction zu ändern, so ändert der Durchmesser des Bildes eines Punktes, während der Winkel, unter dem dieser vom zweiten Hauptpunkte aus erscheint, nicht ändert; es ist somit der Winkel 2μ dasjenige Element, durch welches die Güte einer Construction ausgedrückt wird, unabhängig vom Maassstabe, während der Durchmesser, den das Bild eines Punktes erreicht, aus der Construction und dem Maassstabe resultiert.

Wir stellen nun im Folgenden die für die verschiedenen Linsen gefundenen Bilddurchmesser und Winkel 2μ zusammen.

1. In der Tabelle V sind die für eine Linse von der Brennweite 100^{mm} und gleicher Brechung an beiden Flächen gewonnenen Resultate angegeben, welche den Einfluss der Linsenöffnung auf den Durchmesser und den Winkel, unter welchem das Bild eines Punktes erscheint, nachweisen lassen.

V. Einfluss der Linsenöffnung auf den Durchmesser und den Winkel, unter welchem das Bild eines Punktes erscheint.

Halbmesser der Linsenöffnung.	Einstellebene vom zweiten Hauptpunkte aus.			Bilddurchmesser ($2H^*$) in mm.			Bildwinkel vom zweiten Hauptpunkte aus.		
	D	*F*	*D* u. *F*	*D*	*F*	*D* u. *F*	*D*	*F*	*D* u. *F*
	mm	mm	mm	mm	mm	mm			
0.	100.000	98.751	99.376						
2.963	99.931	98.697	99.187	0.00102	0.00103	0.03044	0° 0′ 2″	0° 0′ 2″	0° 1′ 3″
4.444	99.832	98.612	99.101	0.00488	0.00411	0.04825	0 0 10	0 0 8	0 1 40
6.667	99.626	98.415	98.894	0.01344	0.01361	0.07867	0 0 28	0 0 28	0 2 44
10.000	99.198	97.971	98.448	0.04398	0.04666	0.14454	0 1 32	0 1 38	0 5 2
15.000	98.182	96.948	97.430	0.16193	0.16340	0.31433	0 5 41	0 5 48	0 11 6
22.500	95.758	94.533	95.001	0.5872	0.5927	0.8214	0 21 5	0 21 33	0 29 43

Es enthält die Tabelle vier Colonnen; in der ersten ist der Halbmesser der Linsenöffnung gegeben, in der zweiten die Entfernung der Einstellebene vom Hauptpunkte aus, in der dritten die Durchmesser der Bilder von Punkten in der Einstellebene, und in der vierten diese Durchmesser in Winkeln vom Hauptpunkte aus gesehen ausgedrückt. Als Einstellebene ist, wie wir schon oben angegeben, diejenige zur Axe senkrechte Ebene angenommen, in welcher der Schnittpunkt des oberen Randstrahles mit dem unteren $^2/_3$-Randstrahl liegt. Die drei letzten Colonnen haben je drei Abtheilungen; in der ersten sind die Werthe, welche für Licht in der Farbe *D*, in der zweiten solche für Licht von der Farbe *F*, und in der dritten die Werthe, wenn beide Farben gleichzeitig berücksichtigt werden. Man sieht dass die Werthe der Durchmesser im gleichen Verhältniss wie die Winkel, unter denen sie vom Hauptpunkte aus erscheinen, wachsen und beide etwa in gleichem Verhältnisse wie die Kugelgestalt-

fehler in Winkelfehlern (Tabelle I, E. 2) ausgedrückt, während die Kugelgestaltfehler in Längenabweichungen (Tabelle I, F, 2) viel langsamer wachsen. Es ist demnach der Ausspruch, welchen wir früher (Seite 101) thaten, vollkommen gerechtfertigt, dass nämlich die Winkelfehler eine richtigere Vorstellung von dem Einflusse der Fehler auf die Deutlichkeit der Bilder geben, als die Längenabweichungen. Man sieht ferner aus der Tabelle, dass die Werthe der dritten Untercolonne gegen jene der beiden ersten um so stärker differiren, je kleiner die wirksamen Oeffnungen sind, was vom Farbenfehler herrührt, der bei geringen Oeffnungen schon eine ziemliche Grösse hat, während der Kugelgestaltfehler noch fast Null ist.

2. In der Tabelle VI soll der Einfluss der Linsendicke auf den Durchmesser und den Winkel, unter welchem dieser vom Hauptpunkte aus erscheint, dargelegt werden. Zu diesem Zwecke sind die Rechnungen für Linsen von der Dicke 8^{mm}, 48^{mm}, 88^{mm} und 138.5^{mm} (Kugellinse) gleicher Oeffnung (15^{mm}) und gleicher wahrer Brennweite (100^{mm}) durchgeführt, und die Resultate in der Tabelle zusammengestellt.

VI. Einfluss der Linsendicke auf den Durchmesser und den Winkel, unter welchem das Bild eines Punktes erscheint.

Dicke der Linsen in mm.	Einstellebene vom Hauptpunkte aus.			Bilddurchmesser in mm.			Bildwinkel vom Hauptpunkte aus.		
	D	*F*	*D* u. *F*	*D*	*F*	*D* u. *F*	*D*	*F*	*D* u. *F*
	mm	mm	mm						
8	98.182	96.948	97.430	0.1619	0.1634	0.3143	0° 5′ 41″	0° 5′ 48″	0° 11′ 6″
48	98.447	97.245	97.682	0 1367	0.1364	0.2714	0 4 46	0 4 49	0 9 33
88	98.703	97.754	98.136	0.1150	0.1138	0.2314	0 4 0	0 4 0	0 8 7
138.5	99.019	98.212	98.531	0.0853	0.0848	0.1838	0 2 58	0 2 58	0 5 5

Diese Tabelle ist in gleicher Weise angelegt wie die vorausgehende. Man kann aus derselben folgern, dass mit zunehmender Linsendicke bis zur Kugel die Deutlichkeit immer bessert, und dass der Fehler sogar bis unter die Hälfte herabsinkt, dass also für gegebene Oeffnung und Brennweite mit einer Kugel als Lupe auch schon für Strahlen, die von einem Objectpunkte in der Axe ausgehen, ein besseres Resultat erzielt wird, als mit einer Linse von geringerer Dicke.

3. Um den Einfluss der Linsenconstruction auf den Bilddurchmesser und den Winkel, unter welchem dieser von dem Hauptpunkte aus erscheint, kennen zu lernen, sind die genannten Grössen für verschiedene Linsen von gleicher Brennweite (100^{mm}) und gleicher Oeffnung (15^{mm}) gerechnet, bei welchen die Vertheilung der Brechungen in die beiden Flächen von $\delta_0 = + 2.3$; $\delta_2 = - 1.3$ bis $\delta_0 = - 1.2$; $\delta_2 = + 2.2$ sich ändert.

Auch bei dieser Tabelle (VII) ist die Anordnung in der gleichen Weise wie bei den vorausgehenden. Es ergiebt sich nun aus dieser Tabelle, dass ein Minimum der Fehler eintritt, wenn die Brechung gleichmässig zwischen die beiden Linsenflächen vertheilt wird, also $\delta_0 = \delta_2 = 0.5$ ist

VII. Einfluss der Linsenconstruction auf den Durchmesser und den Winkel, unter welchem das Bild eines Punktes erscheint.

Ablenkungen der Linsen.		Einstellebene vom Hauptpunkte aus in mm.			Bilddurchmesser in mm.			Bildwinkel vom Hauptpunkte aus.		
δ_0	δ_2	D	F	D u. F	D	F	D u. F	D	F	D u. F
+ 2.3	— 1.3	46.995	46.561	46.637	8.0837	8.0179	8.1438	9° 49′ 53″	9° 50′ 32″	9° 58′ 48″
+ 2.0	— 1.0	64.911	64.173	64.385	4.2059	4.1671	4.3148	3 42 40	3 43 9	3 50 18
+ 1.770	— 0.770	74.539	73.641	73.929	2.7718	2.7425	2.8937	2 7 50	2 8 2	2 14 33
+ 1.531	— 0.531	82.859	81.841	82.195	1.7343	1.7186	1.8709	1 11 57	1 12 11	1 18 15
+ 1.0	— 0.0	95.114	93.925	94.387	0.4475	0.4435	0.5915	0 16 11	0 16 14	0 21 33
+ 0.654	+ 0.346	98 152	96.916	97.398	0.1646	0.1649	0.3132	0 5 45	0 5 50	0 11 3
+ 0.653	+ 0.347	98.146	96.910	97.391	0.1646	0.1651	0.3132	0 5 45	0 5 51	0 11 3
+ 0 5	+ 0.5	98.182	96.948	97.430	0.1619	0 1634	0 3143	0 5 41	0 5 48	0 11 6
+ 0.331	+ 0.669	97 268	96.015	96.494	0.2426	0.2464	0.3970	0 8 34	0 8 50	0 14 8
+ 0.160	+ 0.840	95.261	94.017	94.490	0.4259	0.4311	0.5823	0 15 22	0 15 46	0 21 10
+ 0.0005	+ 0.9995	92.401	91.165	91.629	0.6965	0.7024	0.8554	0 25 56	0 26 30	0 32 6
+ 0.0	+ 1.0	92.395	91.166	91 628	0.6966	0.7033	0.8553	0 25 56	0 26 32	0 32 6
— 0.376	+ 1.376	81.500	80.333	79.746	1.8142	1.8269	1.9813	1 16 31	1 18 10	1 25 25
— 1.0	+ 2.0	46.873	45 892	46.122	6.6349	6.6935	6.8398	8 5 48	8 20 31	8 28 52
— 1.2	+ 2.2	26 080	24.890	25.007	10.8828	11.0792	11.1985	23 34 14	25 5 44	25 14 30

VIII. Einfluss der Glasart auf den Durchmesser und Winkel, unter welchem das Bild eines Punktes erscheint.

Brechungsindices des Linsenglases.		Einstellebene vom Hauptpunkte aus.			Bilddurchmesser in mm.			Bildwinkel vom Hauptpunkte aus.		
D^{n_1}	F^{n_1}	D	F	D u. F	D	F	D u. F	D	F	D u. F
Oeffnungshalbmesser: 15mm.										
1.5159	1.5211	98.115	97.121	97.495	0.1651	0.1705	0.2871	0° 5′ 47″	0° 6′ 3″	0° 10′ 7″
1.5297	1.5364	98.182	96.948	97.430	0.1619	0.1634	0.3143	0 5 41	0 5 48	0 11 6
1.6255	1.6379	98.531	96.600	97.336	0.1284	0.1327	0.3638	0 4 29	0 4 43	0 12 51
1.9626	1.9981	99.106	95.535	96.829	0.0783	0.0826	0.4920	0 2 42	0 2 58	0 17 28
Oeffnungshalbmesser: 22.5mm.										
1.5159	1.5211	95.606	94.607	94.982	0.6109	0.6154	0.7986	0° 21′ 58″	0° 22′ 22″	0° 28′ 55″
1.5297	1.5364	95.758	94.533	95.001	0.5872	0.5927	0.8214	0 21 5	0 21 33	0 29 43
1.6255	1.6379	96.602	94.666	95.392	0.4652	0.4742	0.8279	0 16 33	0 17 13	0 29 50
1.9626	1.9981	97.945	94.353	95.690	0.2760	0.2919	0.9427	0 9 42	0 10 39	0 33 52

Die Fehler wachsen nach beiden Seiten hin rasch, und zwar werden die Fehler in den Fällen viel schneller wachsen, wenn die starken Brechungen an der zweiten Linsenfläche stattfinden. Es ist z. B. für $\delta_0 = +2.0$ und $\delta_2 = -1.0$ der Winkel, unter welchem der Durchmesser des Bildes vom Hauptpunkte aus erscheint, wenn die Farben D und F gleichzeitig berücksichtigt werden, $3^0\,50'\,18''$, während für $\delta_0 = -1.0$ und $\delta_2 = +2.0$ der gleiche Winkel einen Werth von $8^0\,28'\,52''$ annimmt.

4. Es kann endlich noch der Einfluss der zu den Linsen gewählten Glasart auf Bilddurchmesser und Winkel, unter welchem dieser vom Hauptpunkte aus erscheint, bestimmt werden; vier verschiedene Glassorten sind der Rechnung zu Grunde gelegt, wobei die Brennweite der Linsen wieder zu 100^{mm}, die Oeffnung sowohl zu 15^{mm} als auch zu 22.5^{mm} angenommen ist.

Die Anordnung dieser Tabelle (VIII) ist ganz ähnlich wie die der früheren Tabellen, es sind hier nur die Resultate, wie schon erwähnt, sowohl für einen Oeffnungshalbmesser von 15^{mm} als für einen solchen von 22.5^{mm} angegeben. Man sieht aus der Tabelle, dass für einfarbiges Licht die Fehler um so kleiner werden, je stärker brechend die Glasart der Linse ist, dass aber in unserem Falle für Licht von zweierlei Farbe die Fehler bei stärker brechender Glasart grösser sind, weil bei den angenommenen Gläsern die Zerstreuung mehr als der Brechung proportional zunimmt. Bei Benützung grösserer Oeffnungen ist die Zunahme dieses Fehlers eine geringere. Hieraus lässt sich auch schliessen, dass wenn die Brechung des Glases grösser, die Zerstreuung aber proportional oder kleiner wäre, mit stärkeren Gläsern deutlichere Bilder erzielt werden können.

§ 9. Formeln für die trigonometrische Durchrechnung von Strahlen ausser der Axe in der Axenebene.

In § 3 dieses Capitels haben wir angegeben, dass wir für einen seitlich von der optischen Axe gelegenen Bildpunkt zur Brechung vier Strahlen auswählen: 1. den Hauptstrahl, 2. den oberen, 3. den unteren Randstrahl und 4. einen um 90^0 von den letzteren abstehenden Randstrahl. Die drei ersteren liegen in einer Ebene, in welcher auch die Axe sich befindet, während der vierte ausserhalb der Axenebene gelegen ist. Vorerst wollen wir für die drei ersten Strahlen die Formeln angeben, wobei der Winkel τ_0, welchen der Hauptstrahl mit der Axe bildet, gegeben sein muss; ebenso wird in die Rechnung eingeführt die Entfernung des ersten Hauptpunktes ($E_{2,0}$) von der ersten brechenden Fläche, eine Grösse, welche aus der Durchrechnung der Linse in verkehrter Richtung (vergl. S. 105) gewonnen wurde. Es ist:

I. Wenn kein Radius sehr gross ist.	II. Wenn ein Radius gross ist.[2])
1) $\sin\varphi_0 = \dfrac{(E_{2,0} \mp R_0)\sin\tau_0}{\pm R_0}$ [1])	1) $\sin\varphi_0 = \dfrac{(E_{2,0} \mp R_0)\sin\tau_0}{\pm R_0}$ [1])
2) $\eta_0 = \varphi_0 + \tau_0$	2) $\eta_0 = \varphi_0 + \tau_0$
3) $H_0 = \pm R_0 \sin\eta_0$	3) $H_0 = \pm R_0 \sin\eta_0$

I. Wenn kein Radius sehr gross ist.

4) $\sin \eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0},$

5) $\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0,$

6) $\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}},$

7) $\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0',$

8) $\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0,$

9) $A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \alpha_0'},$

10) $\sin \varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1) \sin \alpha_0'}{\pm R_2},$

11) $\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_{+1}}{n_{+3}},$

12) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2',$

13) $\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0',$

14) $A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin \varphi_2'}{\sin \alpha_2'},$

15) $H_2^* = (A_2' - B_2^*) \operatorname{tg} \alpha_2',$ [3]

16) $X = \frac{\sin \varphi_0 \, R_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0}$ [4]

17) $V^2 = X^2 + Y^2$

18) $\frac{X}{V} = \cos \zeta_0$

19) $U_0 = V_0.$

II. Wenn ein Radius gross ist.[2]

4) $\sin \eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0},$

5) $\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0,$

6) $\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}},$

7) $\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0',$

8) $\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0,$

9) $A_0' = \frac{H_0}{\operatorname{tg} \alpha_0'} \pm 2 R_0 \sin^2 \frac{\eta_0}{2},$

10) $\sin \varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1) \sin \alpha_0'}{\pm R_2},$

11) $\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_{+1}}{n_{+3}},$

12) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2',$

13) $\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0',$

14) $\eta_2 = \varphi_2' + \alpha_2',$

15) $H_2 = H_0 - D_1,$

16) $A_2' = \frac{H_2}{\operatorname{tg} \alpha_2'} \pm 2 R_2 \sin^2 \frac{\eta_2}{2},$

17) $H_2^* = (A_2' - B_2^*) \operatorname{tg} \alpha_2',$ [3]

18) $X = \frac{\sin \varphi_0 \, R_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0}$ [4]

19) $V^2 = X^2 + Y^2$

20) $\frac{X}{V} = \cos \zeta_0$

21) $U_0 = V_0.$

III. Wenn die erste Fläche plan ist. [1]

1) $H_0 = E_{2,0} \operatorname{tg} \tau_0,$

2) $\varphi_0 = \alpha_0,$

IV. Wenn die zweite Fläche plan ist.

1) $\sin \varphi_0 = \frac{(E_{2,0} \mp R_0) \sin \tau_0}{\pm R_0},$ [1]

2) $\eta_0 = \varphi_0 + \tau_0,$

3) $H_0 = \pm R_0 \sin \eta_0,$

4) $\sin \eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0},$

5) $\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0,$

III. Wenn die erste Fläche plan ist.	IV. Wenn die zweite Fläche plan ist.
3) $\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$,	6) $\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$,
4) $\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$,	7) $\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$,
5) $\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$,	8) $\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$,
6) $A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \alpha_0'}$,	9) $A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \alpha_0'}$,
7) $\sin \varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1) \sin \alpha_0'}{\pm R_2}$,	10) $\varphi_2 = -\alpha_0'$,
8) $\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_{+1}}{n_{+3}}$,	11) $\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_{+1}}{n_{+3}}$,
9) $\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$,	
10) $\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$,	12) $\alpha_2' = \varphi_2'$,
	13) $A_2' = \frac{(A_0' - D_1) \operatorname{tg} \alpha_0'}{\operatorname{tg} \alpha_2'}$,
11) $A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin \varphi_2'}{\sin \alpha_2'}$,	14) $H_2 = A_2' \operatorname{tg} \alpha_2'$,
12) $H_2^* = (A_2' - B_2^*) \operatorname{tg} \alpha_2'$, [3]	15) $H_2^* = (A_2' - B_2^*) \operatorname{tg} \alpha_2'$, [3]
13) $X = \frac{\sin \varphi_0 \, R_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0}$, [4]	16) $X = \frac{\sin \varphi_0 \, R_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0}$, [4]
14) $V^2 = X^2 + Y^2$,	17) $V^2 = X^2 + Y^2$,
15) $\frac{X}{V} = \cos \zeta_0$,	18) $\frac{X}{V} = \cos \zeta_0$,
16) $U_0 = V_0$.	19) $U_0 = V_0$.

1) Diese Formeln dienen dazu, für den Hauptstrahl einen Näherungswerth von H_0 zu erhalten; mit diesem Werthe rechnet man bis zum Werthe von α_2', welcher mit $\tau_0 = \alpha_0$ identisch sein soll, wenn der Strahl thatsächlich ein Hauptstrahl, d. h. die Linse unter dem gleichen Winkel mit der Axe verlässt mit dem er eingetreten. Durch Probiren wird man bald den richtigen Werth von H_0 für den Hauptstrahl erhalten. Die entsprechenden Werthe für den oberen und unteren Randstrahl findet man mit Hilfe der leicht abzuleitenden Formeln:

$$\sin \varphi_0 = \frac{\frac{H_0'}{\sin \tau_0} + E_{2,0} \mp R_0}{\pm R_0} \sin \tau_0,$$

$$\eta_0 = \varphi_0 + \tau_0,$$

und

$$H_0 = \pm R_0 \sin \eta_0.$$

Hierbei ist H_0' der Radius des einfallenden Strahlenbüschels. Die Formeln von sin η_0 sind für den Hauptstrahl, den oberen und unteren Randstrahl vollkommen gleichmässig anzuwenden.

2) Die Höhenformeln sind auch dann anzuwenden, wenn man die Höhen, in welchen die Linsenflächen getroffen werden, kennen will.

3) Die Grösse B_2* ist die Entfernung der Einstellebene von der letzten brechenden Fläche aus gezählt.

4) Diese Formeln dienen zur Berechnung der Constanten, die für einen Strahl ausser der Axenebene in die Rechnung eingehen, sie werden am zweckmässigsten immer gleich der Berechnung der Strahlen in der Axenebene angefügt, weil hier die einzelnen in die Formeln eingehenden Werthe vorkommen, und schliessen sich an die Rechnung des Hauptstrahles an. Durch Y ist hierbei die Entfernung des seitlichen Strahles von der Axe aus bezeichnet.

§ 10. Rechnungsbeispiele für Strahlen ausser der Axe in der Axenebene.

Als Beispiel für die Rechnung wählen wir eine der auch in § 6 dieses Capitels benützten Linsen, nämlich die Sammellinse, bei welcher die Ablenkungen an beiden Flächen die gleichen sind. Wir rechnen nun zuerst den Näherungswerth der Einfallshöhe für den Hauptstrahl. § 6 hatten wir $E_{2,0} = + 1.281^{mm}$ [1]) gefunden, und ausserdem nehmen wir an $\tau_0 = - 6^0$, weshalb wir erhalten:

$$E_{2,0} = 1.281$$
$$\mp R_0 = - 69.250$$
$$E_{2,0} \mp R_0 = - 67.969$$

$$\log(E_{2,0} \mp R_0) = 1.832\,31n$$
$$\log(\sin\tau_0) = 9.019\,23n$$
$$\log(1 : \pm R_0) = 8.159\,58$$
$$\log(\sin\varphi_0) = 9.011\,12$$

$$\varphi_0 = 5^0\ 53'\ 18''.7$$
$$\tau_0 = -6\quad 0\quad 0$$
$$\eta_0 = -0\quad 6\quad 41.3$$

$$\log(\sin\eta_0) = 7.288\,74n$$
$$\log(\pm R_0) = 1.840\,42$$
$$\log H_0 = 9.129\,16n$$

$$H_0 = - 0.134\,64$$

1) Hinsichtlich des Vorzeichens von $E_{2,0}$ sei erwähnt, dass bei der Durchrechnung in § 6 für $E_{2,0}$ der Werth — 1.281 sich ergab, d. h. es lag $E_{2,0}$ von der letzten brechenden Fläche aus der Richtung des einfallenden Lichtes entgegen, also in dem Innern der Linse. Lässt man das Licht, wie in unserem jetzigen Falle, von der andern Seite einfallen, so muss $E_{2,0} = + 1.281$ genommen werden.

Mit diesem Näherungswerthe $H_0 = -0.134\,64$ durchgerechnet findet man, dass α_2' nicht vollkommen mit $\tau_0 = \alpha_0$ übereinstimmt. Durch Probieren bis Uebereinstimmung erzielt, findet man den genauen Werth

$$H_0 = -\overset{\text{mm}}{0.134\,35}.$$

Die Einfallshöhen des unteren und oberen Randstrahles ergeben sich durch folgende Rechnung.

	Unterer Randstrahl.	Oberer Randstrahl.
$\log H_0'$	1.176 09 *n*	1.176 09
$\log (1 : \sin \tau_0)$	0.980 77 *n*	0.980 77 *n*
$\log (H_0' : \sin \tau_0)$	2.156 86	2.156 86 *n*
$H_0' : \sin \tau_0$	143.502	— 143.502
$E_{2,0}$	1.281	1.281
$\mp R_0$	— 69.250	— 69.250
$\frac{H_0'}{\sin \tau_0} + E_{2,0} \mp R_0$	75.533	— 211.471
$\log \left(\frac{H_0'}{\sin \tau_0} + E_{0,2} \mp R_0\right)$	1.878 14	2.325 25 *n*
$\log \sin \tau_0$	9.019 23 *n*	9.019 23 *n*
$\log (1 : \pm R_0)$	8.159 58	8.159 58
$\log \sin \varphi_0$	9.056 95 *n*	9.504 06
φ_0	— 6° 32′ 48″	18° 36′ 52″
$-\tau_0$	— 6 0 0	— 6 0 0
η_0	— 12 32 48	12 36 52
$\log \sin \eta_0$	9.336 93 *n*	9.339 23
$\log \pm R_0$	1.840 42	1.840 42
$\log H_0$	1.177 35 *n*	1.179 65
H_0	— 15.0435 mm	15.1234 mm

Im Folgenden geben wir nun die weitere Durchrechnung des Hauptstrahles, des unteren und oberen Randstrahles für die Linie D, wobei wir bemerken, dass $B_2{}^*$ in unseren Falle (vgl. S. 122) gleich 94.180^{mm} und $Y = 15.0^{\text{mm}}$ ist.

Crown: $_{D}n_{+1} = 1.529\,64$, $\log {}_{D}n_{+1} = 0.184\,59$, $\tau_0 = -6°$; $D_1 = 8.0$; $R_0 = 69.250$ *O. Z.* $\log R_0 = 1.840\,42$ *O. Z.*; $R_2 = 216.195$ *U. Z.* $\log R_2 = 2.334\,85$ *U. Z.*

	Hauptstrahl.	Unterer Randstrahl.	Oberer Randstrahl.
H_0	— 0.134 35	— 15.0435	+ 15.1234
$\log H_0$	9.128 24 *n*	1.177 35 *n*	1.179 65
$\log (1 : \pm R_0)$	8.159 58	8.159 58	8.159 58
$\log \sin \eta_0$	7.287 82 *n*	9.336 93 *n*	9.339 23
η_0	— 0° 6′ 40″.2	— 12° 32′ 48″	12° 36′ 52″
$-\tau_0 = -\alpha_0$	6 0 0	6	6
φ_0	5 53 19.8	— 6 32 48	18 36 52

Crown: ${}_D n_{+1} = 1.529\,64$, $\log {}_D n_{+1} = 0.184\,59$, $\tau_0 = -6^0$ $D_1 = 8.0$ $R_0 = 69.250$ *O. Z.* $\log R_0 = 1.840\,42$ *O. Z.* $R_2 = 216.195$ *U. Z.* $\log R_2 = 2.334\,85$ *U. Z.*

	Hauptstrahl.	Unterer Randstrahl.	Oberer Randstrahl.
$\log \sin \varphi_0$	9.011 14	9.056 95 *n*	9.504 06
$\log (1 : n_{+1})$	9.815 41	9.815 41	9.815 41
$\log \sin \varphi_0'$	8.826 55	8.872 36 *n*	9.319 47
φ_0	5° 53′ 19″.8	— 6° 32′ 48″	18° 36′ 52″
$-\varphi_0'$	— 3 50 45.3	4 16 28	— 12 2 41
δ_0	2 2 34.5	— 2 16 20	6 34 11
α_0	— 6 0 0	— 6 0 0	— 6 0 0
α_0'	— 3 57 25.5	— 8 16 20	0 34 11
$\log \sin \alpha_0'$	8.838 91 *n*	9.157 99 *n*	7.997 53
$\log (1 : \sin \alpha_0')$	1.161 09 *n*	0.842 01 *n*	2.002 47
$\log \sin \varphi_0'$	8.826 55	8.872 36 *n*	9.319 47
$\log (\pm R_0)$	1.840 42	1.840 42	1.840 42
$\log (A_0' \mp R_0)$	1.828 06 *n*	1.554 79	3.162 36
$A_0' \mp R_0$	— 67.307	35.875	1453.316
$\pm R_0 \mp R_2 - D_1$	277.447	277.447	277.447
$A_0' \mp R_2 - D_1$	210.140	313.322	1730.763
$\log(A_0' \mp R_2 - D_1)$	2.322 51	2.495 99	3.238 24
$\log \sin \alpha_0'$	8.838 91 *n*	9.157 99 *n*	7.997 53
$\log (1 : \pm R_2)$	7.665 15 *n*	7.665 15 *n*	7.665 15 *n*
$\log \sin \varphi_2$	8.826 57	9.319 13	8.900 92 *n*
$\log n_{+1}$	0.184 59	0.184 59	0.184 59
$\log \sin \varphi_2'$	9.011 16	9.503 72	9.085 51 *n*
φ_2	3° 50′ 45″.9	12° 2′ 7″	— 4° 33′ 56″.5
$-\varphi_2'$	— 5 53 20.7	— 18 35 57	6 59 37.5
δ_2	— 2 2 34.8	— 6 33 50	2 25 41
α_0'	— 3 57 25.5	— 8 16 20	0 34 11
α_2'	— 6 0 0.3	— 14 50 10	2 59 52
$\log \sin \alpha_2'$	9.019 24 *n*	9.408 33 *n*	8.718 48
$\log 1 : \sin \alpha_2'$	0.980 76 *n*	0.591 67 *n*	1.281 52
$\log \sin \varphi_2'$	9.011 16	9.503 72	9.085 51 *n*
$\log \pm R_2$	2.334 85 *n*	2.334 85 *n*	2.334 85 *n*
$\log (A_2' \mp R_2)$	2.326 77	2.430 24	2.701 88
$A_2' \mp R_2$	212.212	269.302	503.362
$\pm R_2 - B_2^*$	— 310.375	— 310.375	— 310.375
$A_2' - B_2^*$	98.163	— 41.073	192.987

Crown: $_D n_{+1} = 1.529\,64$, $\log\, _D n_{+1} = 0.184\,59$ $\quad D_1 = 8.0 \quad R_0 = 69.250$ *O. Z.* $\log R_0 = 1.840\,42$ *O. Z.*
$\tau_0 = -6^0$ $\quad R_2 = 216.195$ *U. Z.* $\log R_2 = 2.334\,85$ *U. Z.*

	Hauptstrahl.	Unterer Randstrahl.	Oberer Randstrahl.
$\log (A_2' - B_2^*)$	1.991 95*n*	1.613 56*n*	2.285 53
$\log \operatorname{tg} \alpha_2'$	9.021 63*n*	9.423 06*n*	8.719 07
$\log H_2^*$	1.013 58	1.036 62	1.004 60
	mm	mm	mm
H_2^*	10.3176	10.8798	10.1065
$\log \sin \varphi_0$	9.011 14		
$\log \pm R_0$	1.840 42		
$\log \operatorname{tg} \alpha_0$	9.021 62		
$\log 1 : \sin \alpha_0$	0.980 77		
$\log X$	0.853 95		
$\log X^2$	1.707 90		
X^2	51.039		
Y^2	225.0		
V^2	276.039		
$\log (V^2)$	2.440 97		
$\log V$	1.220 48		
$\log (1 : V)$	8.779 52		
$\log X$	0.853 95		
$\log \cos \zeta_0$	9.633 47		
ζ_0	64° 31′ 46″		
$U_0 = V$	16.614		

§ 11. Formeln für die Durchrechnung von Strahlen ausser der Axenebene.

Bevor wir die für den Hauptstrahl, den unteren und oberen Randstrahl gewonnenen Resultate verwerthen, wollen wir noch einen vierten, von dem seitlich von der Axe gelegenen Objectpunkte ausgehenden Strahl, nämlich den im gleichen Abstande vom oberen und unteren Randstrahle befindlichen seitlichen Randstrahl ebenfalls durch die Linse rechnen, um dadurch einen vollkommenen Aufschluss über die Bildfläche des erwähnten Objectpunktes zu gewinnen. Die in den Formeln vorkommenden Grössen ζ_0 und U_0 sind aus der Rechnung der Strahlen in der Axenebene bekannt, und π_0 ist 0^0 oder 180^0 zu nehmen, je nachdem der seitlich von der Axe gelegene Objectpunkt über oder unter der Axe angenommen ist. Die Formeln sind:

I. Wenn kein Radius unendlich lang ist.	II. Wenn die erste Fläche plan ist.	III. Wenn die zweite Fläche plan ist.
$\cos\lambda_0 = \mp \sin\tau_0 \cos(\pi_0 - \zeta_0)$ [1]	$\cos\lambda_0 = \mp \sin\tau_0 \cos(\pi_0 - \zeta_0)$	$\cos\lambda_0 = \mp \sin\tau_0 \cos(\pi_0 - \zeta_0)$
$\sin\varphi_0 = \frac{U_0 \sin\lambda_0}{R_0}$	$\varphi_0 = \tau_0$	$\sin\varphi_0 = \frac{U_0 \sin\lambda_0}{R_0}$
$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\lambda_0' = \lambda_0 + (\varphi_0 - \varphi_0')$	$\lambda_0' = \lambda_0 + (\varphi_0 - \varphi_0')$	$\lambda_0' = \lambda_0 + (\varphi_0 - \varphi_0')$
$U_0' = \frac{R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\lambda_0'} = U_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}} \frac{\sin\lambda_0}{\sin\lambda_0'}$	$U_0' = U_0$	$U_0' = \frac{R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\lambda_0'} = U_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}} \frac{\sin\lambda_0}{\sin\lambda_0'}$
$\sin\tau_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0) =$ $= \frac{\sin\lambda_0'}{\sin\lambda_0} \sin\tau_0 \sin(\pi_0 - \zeta_0)$	$\tau_0' = \varphi_0'$	$\sin\tau_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0) =$ $= \frac{\sin\lambda_0'}{\sin\lambda_0} \sin\tau_0 \sin(\pi_0 - \zeta_0)$
$\sin\tau_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) = \mp \cos\lambda_0'$	$\pi_0' = \pi_0$	$\sin\tau_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) = \mp \cos\lambda_0'$
[2] $\operatorname{tg}\tau_0' = \operatorname{tg}\tau_0 \frac{\sin(\pi_0 - \zeta_0)}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$ $\pm \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0')}{\sin(\pi_0 - \pi_0')} = \frac{\sin\lambda_0 \sin\tau_0'}{\sin(\pi_0 - \zeta_0)}$ $= \frac{\sin\lambda_0' \sin\tau_0}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$	[2] $\sin\lambda_0 \sin\tau_0' = \sin\lambda_0' \sin\tau_0$	[2] $\operatorname{tg}\tau_0' = \operatorname{tg}\tau_0 \frac{\sin(\pi_0 - \zeta_0)}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$ $\pm \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0')}{\sin(\pi_0 - \pi_0')} = \frac{\sin\lambda_0 \sin\tau_0'}{\sin(\pi_0 - \zeta_0)} =$ $= \frac{\sin\lambda_0' \sin\tau_0}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$
$\sin\varepsilon_0 = \sin\tau_0' \sin\pi_0'$	$\sin\varepsilon_0 = \sin\tau_0' \sin\pi_0'$	$\sin\varepsilon_0 = \sin\tau_0' \sin\pi_0'$
$\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0') \sin(\varphi_0 + \varphi_0')}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_0'} = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$	$\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0') \sin(\varphi_0 + \varphi_0')}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_0'} = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$	$\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0') \sin(\varphi + \varphi_0')}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_0'} = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$

1) Vergleiche Beilage IV.
2) Diese Formeln dienen als Controlle.

I. Wenn kein Radius unendlich lang ist.	II. Wenn die erste Fläche plan ist.	III. Wenn die zweite Fläche plan ist.
$\tau_2 = \tau_0'$	$\tau_2 = \tau_0$	$\tau_2 = \tau_0$
$\pi_2 = \pi_0'$	$\pi_2 = \pi_0'$	$\pi_2 = \pi_0'$
$C_1 = D_1 \mp R_0 \pm R_2$	$C_1 = D_1 \pm R_2$	$C_1 = D_1 \mp R_0 \pm R_2$
$U_2 \sin(\pi_0' - \zeta_2) = U_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0)$	$U_2 = U_0'$	$U_2 \sin(\pi_0' - \zeta_2) = U_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0)$
$U_2 \cos(\pi_0' - \zeta_2) =$	$U_2 [\cos(\pi_0' - \zeta_2) - \cos(\pi_0' - \zeta_0)]$	$U_2 \cos(\pi_0' - \zeta_2) =$
$= U_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) - C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$	$= - C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$	$= U_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) - C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$
$\frac{C_1 \operatorname{tg} \tau_0'}{\sin(\zeta_0 - \zeta_2)} = \frac{U_2}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)} = \frac{U_0'}{\sin(\pi_0' - \zeta_2)}$ [2]	$\frac{C_1 \operatorname{tg} \tau_0'}{\sin(\zeta_0 - \zeta_2)} = \frac{U_2}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)} = \frac{U_0'}{\sin(\pi_0' - \zeta_2)}$ [2]	$\frac{C_1 \operatorname{tg} \tau_0'}{\sin(\zeta_0 - \zeta_2)} = \frac{U_2}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)} = \frac{U_0'}{\sin(\pi_0' - \zeta_2)}$ [2]
$\cos \lambda_2 = \mp \sin \tau_2 \cos(\pi_2 - \zeta_2)$	$\cos \lambda_2 = \mp \sin \tau_2 \cos(\pi_2 - \zeta_2)$	$\cos \lambda_2 = \mp \sin \tau_2 \cos(\pi_2 - \zeta_2)$
$\sin \varphi_2 = \frac{U_2 \sin \lambda_2}{R_2}$	$\sin \varphi_2 = \frac{U_2 \sin \lambda_2}{R_2}$	$\varphi_2 = \tau_2$
$\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$	$\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$	$\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$
$\lambda_2' = \lambda_2 + (\varphi_2 - \varphi_2')$	$\lambda_2' = \lambda_2 + (\varphi_2 - \varphi_2)$	$\lambda_2' = \lambda_2 + (\varphi_2 - \varphi_2')$
$U_2' = \frac{R_2 \sin \varphi_2'}{\sin \lambda_2'} = U_2 \frac{n_1}{n_3} \frac{\sin \lambda_2}{\sin \lambda_2'}$	$U_2' = \frac{R_2 \sin \varphi_2'}{\sin \lambda_2'} = U_2 \frac{n_1}{n_3} \frac{\sin \lambda_2}{\sin \lambda_2'}$	$U_2' = U_2$

2) Diese Formeln dienen als Controlle.

$$\sin \tau_2' \sin (\pi_2' - \zeta_2) = = \frac{\sin \lambda_2'}{\sin \lambda_2} \sin \tau_2 \sin (\pi_2 - \zeta_2)$$

$$\sin \tau_2' \cos (\pi_2' - \zeta_2) = \mp \cos \lambda_2'$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \tau_2' = \operatorname{tg} \tau_2 \frac{\sin (\pi_2 - \zeta_2)}{\sin (\pi_2' - \zeta_2)} \\ \pm \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_2')}{\sin (\pi_2 - \pi_2')} = \frac{\sin \lambda_2 \sin \tau_2'}{\sin (\pi_2 - \zeta_2)} = \\ \quad = \frac{\sin \lambda_2' \sin \tau_2}{\sin (\pi_2' - \zeta_2)} \\ \sin \varepsilon_2 = \sin \tau_2' \sin \pi_2' \\ \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_2') \sin (\varphi_2 + \varphi_2')}{\sin \varphi_2 \sin \varphi_2'} = \\ \quad = 2 \operatorname{cotg} 2\omega \end{array} \right] \text{2)}$$

$$C_3 = B_2^* \mp R_2$$

$$U_4 \sin (\pi_2' - \zeta_4) = U_2' \sin (\pi_2' - \zeta_2)$$

$$U_4 \cos (\pi_2' - \zeta_4) = = U_2' \cos (\pi_2' - \zeta_2) - C_3 \operatorname{tg} \tau_2'$$

$$\frac{C_3 \operatorname{tg} \tau_2'}{\sin(\zeta_2 - \zeta_4)} = \frac{U_4}{\sin(\pi_2' - \zeta_2)} = \frac{U_2'}{\sin(\pi_2' - \zeta_4)} \text{2)}$$

$$\sin \tau_2' \sin (\pi_2' - \zeta_2) = = \frac{\sin \lambda_2'}{\sin \lambda_2} \sin \tau_2 \sin (\pi_2 - \zeta_2)$$

$$\sin \tau_2' \cos (\pi_2' - \zeta_2) = \mp \cos \lambda_2'$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \tau_2' = \operatorname{tg} \tau_2 \frac{\sin (\pi_2 - \zeta_2)}{\sin (\pi_2' - \zeta_2)} \\ \pm \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_2')}{\sin (\pi_2 - \pi_2')} = \frac{\sin \lambda_2 \sin \tau_2'}{\sin (\pi_2 - \zeta_2)} = \\ \quad = \frac{\sin \lambda_2' \sin \tau_2}{\sin (\pi_2' - \zeta_2)} \\ \sin \varepsilon_2 = \sin \tau_2' \sin \pi_2' \\ \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_2') \sin (\varphi_2 + \varphi_2')}{\sin \varphi_2 \sin \varphi_2'} = \\ \quad = 2 \operatorname{cotg} 2\omega \end{array} \right] \text{2)}$$

$$C_3 = B_2^* \mp R_2$$

$$U_4 \sin (\pi_2' - \zeta_4) = U_2' \sin (\pi_2' - \zeta_2)$$

$$U_4 \cos (\pi_2' - \zeta_4) = = U_2' \cos (\pi_2' - \zeta_2) - C_3 \operatorname{tg} \tau_2'$$

$$\frac{C_3 \operatorname{tg} \tau_2'}{\sin(\zeta_2 - \zeta_4)} = \frac{U_4}{\sin(\pi_2' - \zeta_2)} = \frac{U_2'}{\sin(\pi_2' - \zeta_4)} \text{2)}$$

$$\tau_2' = \varphi_2'$$

$$\pi_2 = \pi_2'$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin \lambda_2 \sin \tau_2' = \sin \lambda_2' \sin \tau_2 \\ \sin \varepsilon_2 = \sin \tau_2' \sin \pi_2' \\ \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_2') \sin (\varphi_2 + \varphi_2')}{\sin \varphi_2 \sin \varphi_2'} = \\ \quad = 2 \operatorname{cotg} 2\omega \end{array} \right] \text{2)}$$

$$C_3 = B_2^* \mp R_2$$

$$U_4 \sin (\pi_2' - \zeta_4) = U_2' \sin (\pi_2' - \zeta_2)$$

$$U_4 \cos (\pi_2' - \zeta_4) = = U_2' \cos (\pi_2' - \zeta_2) - C_3 \operatorname{tg} \tau_2'$$

$$\frac{C_3 \operatorname{tg} \tau_2'}{\sin(\zeta_2 - \zeta_4)} = \frac{U_4}{\sin(\pi_2' - \zeta_2)} = \frac{U_2'}{\sin(\pi_2' - \zeta_4)} \text{2)}$$

2) Diese Formeln dienen als Controlle.

§ 12. Rechnungsbeispiel für Strahlen ausser der Axenebene.

Wir geben im Folgenden als Rechnungsbeispiel die Durchrechnung des seitlichen Randstrahles der Farbe D für die gleiche auch in § 10 zu Grunde gelegte Linse.

Crown: $_D n_{+1} = 1.529\,64$; $\log {_D n_{+1}} = 0.184\,59$
$\tau_0 = 6^\circ$; $\zeta_0 = 64^\circ\,31'\,56''$; $\pi_0 = 180^\circ$;
$\pi_0 - \zeta_0 = 115^\circ\,28'\,4''$; $U_0 = 16.614$.
$D_1 = 8$.
$R_0 = 69.250$ *O. Z.* $\log R_0 = 1.840\,42$ *O. Z.*
$R_2 = 216.195$ *U. Z.* $\log R_2 = 2.334\,85$ *U. Z.*

$\log \mp \sin \tau_0$	$9.019\,23n$
$\log \cos (\pi_0 - \zeta_0)$	$9.633\,47n$
$\log \cos \lambda_0$	$8.652\,70$
λ_0	$87^\circ\,25'\,26''$
$\log \sin \lambda_0$	$9.999\,56$
$\log 1 : R_0$	$8.159\,58$
$\log U_0$	$1.220\,48$
$\log \sin \varphi_0$	$9.379\,62$
$\log n_{-1} : n_{+1}$	$9.815\,41$
$\log \sin \varphi_0'$	$9.195\,03$
φ_0	$13^\circ\,52'\,2''$
φ_0'	$9\quad 0\quad 53$
$\varphi_0 - \varphi_0'$	$4\quad 51\quad 9$
λ_0	$87\quad 25\quad 26$
λ_0'	$92\quad 16\quad 35$
$\log \sin \lambda_0'$	$9.999\,66$
$\log \cos \lambda_0'$	$8.599\,01n$
$\varphi_0 + \varphi_0'$	$22^\circ\,52'\,55''$
$\log \sin (\varphi_0 + \varphi_0')$	$9.589\,76$
$\log \sin (\varphi_0 - \varphi_0')$	$8.927\,32$
$\log 1 : \sin \varphi_0$	$0.620\,38$
$\log 1 : \sin \varphi_0'$	$0.804\,97$
$\log 2 \operatorname{cotg} 2\omega$	$9.942\,43$
$\log R_0$	$1.840\,42$
$\log \sin \varphi_0'$	$9.195\,03$
$\log 1 : \sin \lambda_0'$	$0.000\,34$
$\log U_0'$	$1.035\,79$
$\log \sin \lambda_0 : \sin \lambda_0'$	$9.999\,90$
$\log n_{-1} : n_{+1}$	$9.815\,41$
$\log U_0$	$1.220\,48$
$\log U_0'$	$1.035\,79$
$\log \sin \lambda_0' : \sin \lambda_0$	$0.000\,10$
$\log \sin \tau_0$	$9.019\,23$
$\log \sin (\pi_0 - \zeta_0)$	$9.955\,61$
$\log \sin \tau_0' \sin (\pi_0' - \zeta_0)$	$8.974\,94$
$- \log \mp \cos \lambda_0'$	$8.599\,01$
$\log \operatorname{tg} (\pi_0' - \zeta_0)$	$0.375\,93$

$(\pi_0' - \zeta_0)$	$67^\circ\,10'\,44''$
ζ_0	$64\quad 31\quad 56$
π_0'	$131\quad 42\quad 40$
π_0	$180\quad 0\quad 0$
$\pi_0 - \pi_0'$	$48\quad 17\quad 20$
$\log \sin (\pi_0' - \zeta_0)$	$9.964\,60$
$\log \cos (\pi_0' - \zeta_0)$	$9.588\,67$
$\log \sin \tau_0' \sin (\pi_0' - \zeta_0)$	$8.974\,94$
$\log 1 : \sin (\pi_0' - \zeta_0)$	$0.035\,40$
$\log \sin \tau_0'$	$9.010\,34$
$\log \operatorname{tg} \tau_0$	$9.021\,62$
$\log \sin (\pi_0 - \zeta_0)$	$9.955\,61$
$\log 1 : \sin (\pi_0' - \zeta_0)$	$0.035\,40$
$\log \operatorname{tg} \tau_0'$	$9.012\,63$
$\log \sin \lambda_0$	$9.999\,56$
$\log \sin \tau_0'$	$9.010\,34$
$\log 1 : \sin (\pi_0 - \zeta_0)$	$0.044\,39$
	$9.054\,29$
$\log \sin \lambda_0'$	$9.999\,66$
$\log \sin \tau_0$	$9.019\,23$
$\log 1 : \sin (\pi_0' - \zeta_0)$	$0.035\,40$
	$9.054\,29$
$\log \sin (\varphi_0 - \varphi_0')$	$8.927\,32$
$- \log \sin (\pi_0 - \pi_0')$	$9.873\,04$
	$9.054\,28$
$\log \sin \tau_0'$	$9.010\,34$
$\log \sin \pi_0'$	$9.873\,04$
$\log \sin \varepsilon_0$	$8.883\,38$
$C_1 = \pm R_0 \mp R_2 + D_1$	$-\,277.447$
$\log U_0'$	$1.035\,79$
$\log \cos (\pi_0' - \zeta_0)$	$9.588\,67$
$\log U_0' \cos (\pi_0' - \zeta_0)$	$0.624\,46$
$\log (-C_1)$	$2.443\,18$
$\log \operatorname{tg} \tau_0'$	$9.012\,63$
$\log (-C_1 \operatorname{tg} \tau_0')$	$1.455\,81$

Crown: ${}_D^n{}_{+1} = 1.529\,64$; $\log {}_D^n{}_{+1} = 0.184\,59$ $D_1 = 8.$ $R_0 = 69.250\;O.\,Z.$ $\log R_0 = 1.840\,42\;O.\,Z.$
$\tau_0 = 6^0$; $\zeta_0 = 64^0\;31'\;56''$; $\pi_0 = 180^0$; $R_2 = 216.195\;U.\,Z.$ $\log R_2 = 2.334\,85\;U.\,Z.$
$\pi_0 - \zeta_0 = 115^0\;28'\;4''$; $U_0 = 16.614$.

$U_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0)$	4.211 73
$- C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$	28.563 4
$U_2 \cos(\pi_0' - \zeta_2)$	32.775 1
$\log U_0'$	1.035 79
$\log \sin(\pi_0' - \zeta_0)$	9.964 60
$\log U_2 \sin(\pi_0' - \zeta_2)$	1.000 39
$- \log U_2 \cos(\pi_0' - \zeta_2)$	1.515 54
$\log \operatorname{tg}(\pi_0' - \zeta_2)$	9.484 85
$\pi_0' - \zeta_2$	16° 58′ 55″
π_0'	131 42 40
ζ_2	114 43 45
ζ_0	64 31 56
$\zeta_0 - \zeta_2$	50 11 49
$\log \sin(\pi_0' - \zeta_2)$	9.465 49
$\log \cos(\pi_0' - \zeta_2)$	9.980 64
$\log U_2 \sin(\pi_0' - \zeta_2)$	1.000 39
$\log 1 : \sin(\pi_0' - \zeta_2)$	0.534 51
$\log U_2$	1.534 90
$\log 1 : \sin(\pi_0' - \zeta_0)$	0.035 40
	1.570 30
$\log U_0'$	1.035 79
$\log 1 : \sin(\pi_0' - \zeta_2)$	0.534 51
	1 570 30
$\log C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$	1.455 81
$\log 1 : \sin(\zeta_0 - \zeta_2)$	0.114 50
	1.570 31
$\log \mp \sin \tau_2$	9.010 34
$\log \cos(\pi_2 - \zeta_2)$	9.980 64
$\log \cos \lambda_2$	8.990 98
λ_2	84° 22′ 45″
$\log \sin \lambda_2$	9.997 91
$\log 1 : R_2$	7.665 15
$\log U_2$	1.534 90
$\log \sin \varphi_2$	9.197 96
$\log n_1 : n_3$	0.184 59
$\log \sin \varphi_2'$	9.382 55
$\varphi_2,$	9° 4′ 34″
φ_2'	13 57 47
$\varphi_2 - \varphi_2'$	− 4 53 13
λ_2	84 22 45
λ_2'	79 29 32
$\log \sin \lambda_2'$	9.992 66
$\log \cos \lambda_2'$	9.260 95

$\varphi_2 + \varphi_2'$	23° 2′ 21
$\log \sin(\varphi_2 + \varphi_2')$	9.592 58
$\log \sin(\varphi_2 - \varphi_2')$	8.930 39
$\log 1 : \sin \varphi_2$	0.802 04
$\log 1 : \sin \varphi_2'$	0.617 45
$\log 2 \operatorname{cotg} 2\omega$	9.942 46
$\log R_2$	2.334 85
$\log \sin \varphi_2'$	9.382 55
$\log 1 : \sin \lambda_2'$	0.007 34
$\log U_2'$	1.724 74
$\log \sin \lambda_2 : \sin \lambda_2'$	0.005 25
$\log n_1 : n_3$	0.184 59
$\log U_2$	1.534 90
$\log U_2'$	1.724 74
$\log \sin \lambda_2' : \sin \lambda_2$	9.994 75
$\log \sin \tau_2$	9.010 34
$\log \sin(\pi_0' - \zeta_2)$	9.465 49
$\log \sin \tau_2' \sin(\pi_2' - \zeta_2)$	8.470 58
$- \log \mp \cos \lambda_2'$	9.260 95
$\log \operatorname{tg}(\pi_2' - \zeta_2)$	9.209 63
$\pi_2' - \zeta_2'$	9° 12′ 16″
ζ_2'	114 43 45
π_2'	123 56 1
π_2	131 42 40
$\pi_2 - \pi_2'$	7 46 39
$\log \sin(\pi_2' - \zeta_2')$	9.204 01
$\log \cos(\pi_2' - \zeta_2')$	9.994 37
$\log \sin \tau_2' \sin(\pi_2' - \zeta_2')$	8.470 58
$\log 1 : \sin(\pi_2' - \zeta_2)$	0.795 99
$\log \sin \tau_2'$	9.266 57
$\log \operatorname{tg} \tau_2$	9.012 63
$\log \sin(\pi_0' - \zeta_2)$	9.465 49
$\log 1 : \sin(\pi_2' - \zeta_2)$	0.795 99
$\log \operatorname{tg} \tau_2'$	9.274 11
$\log \sin \lambda_2$	9.997 91
$\log \sin \tau_2'$	9.266 57
$\log 1 : \sin(\pi_2 - \zeta_2)$	0.534 51
	9.798 99
$\log \sin \lambda_2'$	9.992 66
$\log \sin \tau_2$	9.010 34
$\log 1 : \sin(\pi_2' - \zeta_2)$	0.795 99
	9.799 99

Crown: ${}_D n_{+1} = 1.529\,64$; $\log {}_D n_{+1} = 0.184\,59$
$\tau_0 = 6^\circ$; $\zeta_0 = 64^\circ\ 31'\ 56''$; $\pi_0 = 180^\circ$; $D_1 = 8.$ $R_0 = 69.250$ *O. Z.* $\log R_0 = 1.840\,42$ *O. Z.*
$\pi_0 - \zeta_0 = 115^\circ\ 28'\ 4''$; $U_0 = 16.614.$ $R_2 = 216.195$ *U. Z.* $\log R_2 = 2.334\,85$ *U. Z.*

$\log \sin (\varphi_2 - \varphi_2')$	8.930 39	$\pi_2' - \zeta_4$	126° 11′ 29″
$-\log \sin (\pi_2 - \pi_2')$	9.131 38	π_2'	123 56 1
	9.799 01	$-\zeta_4$	2 15 28
$\log \sin \tau_2'$	9.266 57	ζ_2	114 43 45
$\log \sin \pi_2'$	9.918 91	$\zeta_2 - \zeta_4$	116 59 13
$\log \sin \varepsilon_2$	9.185 48	$\log \sin (\pi_2' - \zeta_4)$	9.906 90
$C_3 = B_2^* \mp R_2$	311.648	$\log \cos (\pi_2' - \zeta_4)$	9.771 21
$\log U_2'$	1.724 74	$\log U_4 \sin (\pi_2' - \zeta_4)$	0.928 75
$\log \cos (\pi_2' - \zeta_2')$	9.994 37	$\log 1 : \sin (\pi_2' - \zeta_4)$	0.093 10
$\log U_2' \cos (\pi_2' - \zeta_2')$	1.719 11	$\log U_4$	1.021 85
$\log (- C_3)$	2.493 66*n*	$\log 1 : \sin (\pi_2' - \zeta_2)$	0.795 99
$\log \operatorname{tg} \tau_2'$	9.274 11		1.817 84
$\log (- C_3 \operatorname{tg} \tau_2')$	1.767 77*n*	$\log U_2'$	1.724 74
$U_2' \cos (\pi_2' - \zeta_2')$	52.3738	$\log 1 : \sin (\pi_2' - \zeta_4)$	0.093 10
$- C_3 \operatorname{tg} \tau_2'$	− 58.5828		1.817 84
$U_4 \cos (\pi_2' - \zeta_4)$	− 6.2095		
$\log U_2'$	1.724 74	$\log C_3 \operatorname{tg} \tau_2'$	1.767 77*n*
$\log \sin (\pi_2' - \zeta_2)$	9.204 01	$\log 1 : \sin (\zeta_2 - \zeta_4)$	0.050 07*n*
$\log U_4 \sin (\pi_2' - \zeta_4)$	0.928 75		1.817 84
$-\log U_4 \cos (\pi_2' - \zeta_4)$	0.793 06*n*		
$\log \operatorname{tg} (\pi_2' - \zeta_4)$	0.135 69*n*	U_4	10.5160

§ 13. Fehler in den Vereinigungsweiten der Strahlen, die von einem seitlich von der Axe gelegenen Objectpunkte ausgehen.

In Cap. III. § 2. S. 65 haben wir angegeben, dass wenn das Bild eines seitlich von der Axe gelegenen Objectpunktes deutlich und unverzerrt sein soll, die drei aus dem Büschel gewählten Strahlen, der obere, untere und der seitliche, den Hauptstrahl an derselben Stelle schneiden müssen, und die Entfernung dieses Durchschnittes vom Hauptpunkte gleich der wahren Brennweite, und endlich der Hauptstrahl so austreten muss, als käme er von dem zweiten Hauptpunkte. Wir wollen untersuchen, welche Fehler bei dem unserer Rechnung zu Grunde liegenden Beispiele auftreten. Wir stellen zuerst die Resultate der Durchrechnung des Hauptstrahles, oberen, unteren und seitlichen Randstrahles für die schon mehrmals als Beispiel benützte Linse von gleicher Brechung an beiden Linsenflächen in folgender Tabelle (IX) zusammen. Es sind in derselben für den Hauptstrahl, den oberen und unteren Strahl die Schnittpunkte mit der zur Axe senkrechten Ebene, welche in der Entfernung 95.453^{mm} hinter dem Scheitel der letzten brechenden Fläche, also 311.648^{mm} von der letzten Mittelpunktsebene, errichtet ist, und zwar durch ihre Abstände (H_2^*) von der Axe, und die Winkel (α_2') der austretenden Strahlen mit der Axe, sowohl für die Strahlen der Farbe D, wie der Farbe F gegeben. [In der gewählten zur Axe senkrechten Ebene

IX. Strahlen ausser der Axe in der Axenebene.

Für $B_2^* = 95.453^{mm}$	D		F	
H_0	H_2^*	α_2'	H_2'	α_2'
mm	mm		mm	
15.0	10.040	+ 2° 59′ 52″	9.846	+ 3° 6′ 40″
10.0	10.274	− 0 4 9	10.144	+ 0 0 19
6.6667	10.354	− 2 3 52	10.268	− 2 0 54
4.4444	10.391	− 3 23 4	10.333	− 3 20 53
2.9630	10.412	− 4 15 12	10.374	− 4 14 3
0 0	10.452	− 6 0 0	10.453	− 6 0 18
− 2.9630	10.499	− 7 42 13	10.534	− 7 43 32
− 4.4444	10.532	− 8 33 31	10.588	− 8 35 30
− 6.6667	10.602	− 9 50 57	10.687	− 9 53 56
− 10.0	10.767	− 11 48 35	10.900	− 11 53 5
− 15.0	11.217	− 14 50 10	11.426	− 14 57 3

X. Strahlen ausser der Axenebene.

Für $B_2^* = 95\,453^{mm}$	D				F			
H_0	U_4	ζ_4	π_2'	τ_2'	U_4	ζ_4	π_2'	τ_2'
	mm				mm			
15	10.516	− 2° 15′ 28″	123° 56′ 1″	10° 38′ 46″	10.527	− 3° 21′ 9″	123° 35′ 44″	10° 44′ 27″
10	10.477	− 0 45 25	135 46 15	8 20 17	10.477	− 1 27 1	135 24 45	8 23 25
6.6667	10.463	− 0 17 27	147 13 20	7 7 24	10.462	− 0 45 16	146 53 39	7 9 7
4.4444	10.456	− 0 7 42.5	156 50 22	6 31 15	10.455	− 0 26 8.5	156 34 43	6 32 2
2.9630	10.453	− 0 4 4.2	164 6 15	6 14 10	10.453	− 0 17 7	163 20 20	6 17 33

sollte der Bildpunkt liegen, sie ist hinter dem Hauptpunkte in einer Entfernung $100 \times \cos 6^0 = 99.452^{mm}$, und befindet sich demnach hinter der letzten brechenden Fläche in der Entfernung

$$B_2^* = \overset{mm}{99.452} - \overset{mm}{3.999} = \overset{mm}{94.453}].$$

Wie für die Randstrahlen sind die gleichen Werthe auch für die $^2/_3$, $^4/_9$, $^8/_{27}$ und $^{16}/_{81}$-Randstrahlen in der Tabelle enthalten. Für den seitlichen Strahl ist in Tabelle X angegeben der Winkel (τ_2'), welchen der austretende Strahl mit einer zur Axe gezogenen Parallele bildet, ferner der Winkel (π_2'), welchen die Projection des austretenden Strahles in der oben erwähnten zur Axe senkrechten Ebene mit der in dem getroffenen Punkte nach Oben errichteten Geraden bildet, U_4 den in der gedachten Ebene gelegenen Radiusvector, den Abstand des Schnittpunktes des austretenden Strahles mit jener Ebene von der Axe aus und endlich ζ_4 den Winkel, den der Radiusvector U_4 mit der Richtung nach Oben bildet.

Beachtet man, dass die rechtwinkligen Coordinaten X und Y der Schnittpunkte in der Bildebene sich aus den Formeln $X = U_4 \sin \zeta_4$ und $Y = U_4 \cos \zeta_4$ ergeben, so erhält man:

XI. Strahlen ausser der Axenebene.

Für $B_2^* = 95.453^{mm}$	D		F	
H_0	X	Y	X	Y
15	— 0.414	10.508	— 0.616	**10.509**
10	— 0.138	10.500	— 0.265	**10.474**
6.667	— 0.053	10.462	— 0.138	**10.464**
4.444	— 0.023	10.456	— 0.080	**10.455**
2.963	— 0.012	10.453	— 0.052	**10.454**

Bevor wir diese beiden Tabellen verwerthen, wollen wir für den Bildpunkt des seitlich von der Axe gelegenen Objectpunktes und zwar für eine vollkommen richtig zeigende Linse, die Höhe H_2^* über der Axe, und die Winkel (α_2') der den Bildpunkt treffenden austretenden Strahlen, die ausser der Axe in der Axenebene eingefallen waren, berechnen. Die Resultate sind in der Tabelle XII zusammengestellt, während die Tabelle XIII die Werthe U_4, ζ_4, π_2' und τ_2' für die den Bildpunkt treffenden Strahlen ausser der Axenebene enthält.

XII. Strahlen ausser der Axe in der Axenebene.

Für $B_2^* = 95.453^{mm}$, sowohl für D wie F.		
H_0	H_2^*	α_2'
	mm	
15.0	10.452	+ 2° 37′ 48″
10.0	10.452	— 0 15 36
6.6667	10.452	— 2 10 37
4.4444	10.452	— 3 27 9
2.9630	10.452	— 4 18 5
0	10.452	— 6 0 0
— 2.9630	10.452	— 7 41 52
— 4.4444	10.452	— 8 32 48
— 6.6667	10.452	— 9 49 21
— 10.0	10.452	— 11 44 23
— 15.0	10.452	— 14 37 47

XIII. Strahlen ausser der Axenebene.

Für $B_2^* = 95.453^{mm}$, sowohl für D wie F.

H_0	U_4	ζ_4	π_2'	τ_2'
15.0	10.452	0° 0′ 0″	124° 52′ 38″	10° 31′ 57″
10.0	10.452	0 0 0	136 16 6	8 19 2
6.6667	10.452	0 0 0	147 27 15	7 7 23
4.4444	10.452	0 0 0	156 57 35	6 31 19
2.9630	10.452	0 0 0	164 10 27	6 14 14
0.0	10.452	0 0 0	180 0 0	0 0 0

Die in den vorausgehenden Tabellen enthaltenen Zahlen können dazu dienen, sowohl die idealen Werthe (für eine vollkommen richtig zeigende Linse), als auch die für die betrachtete wirkliche Linse geltenden Werthe der Vereinigungsweiten auf dem Hauptstrahle, und zwar vom Hauptpunkte aus gezählt, sodann die Oeffnungswinkel vom Hauptstrahle aus, und endlich die auf den Hauptstrahl projicirten Anfangspunkte der Vereinigungsweiten zu berechnen. Die Resultate sind in der Tabelle XIV unter 1), 2) und 3) angegeben, und dann unter 4), 5) und 6) die hieraus abgeleiteten Fehler zusammengestellt.

Eine eingehendere Discussion dieser in der auf S. 142 befindlichen Tabelle zusammengestellten Fehler in den Vereinigungsweiten und in den Winkeln der austretenden Strahlen ist wohl zu unterlassen, da übersichtliche Resultate doch nicht ausgesprochen werden können. Es sind selbst bei der in ihrer Wirkung günstigsten Linse, die an beiden Flächen um gleiche Grössen ablenkt, die Bildfehler, welche für einen zur Axe schief einfallenden Strahlenbüschel sich ergeben, sehr bedeutend; und da diese Fehler alle gleichzeitig auftreten, können sie nicht mehr in einfacher Weise dargestellt werden. Es ist z. B. eine Bildfläche nicht anzugeben, da einem Objectpunkte ein Bildpunkt nicht entspricht.

Zur Orientirung über die durch die Linse entworfenen Bilder werden am besten einige Zeichnungen dienen können. Auf der ersten Tafel Fig. 52 ist die Lage des Hauptstrahles der oberen und unteren Randstrahlen für einen einfallenden Lichtbüschel von 15, 10, 6.667, 4.444 und 2.963^{mm} Oeffnungsradius in der verticalen Axenebene gezeichnet, und zwar für die Farbe D (diese Strahlen sind durch ausgezogene Linien dargestellt) und für die Farbe F (die Strahlen dieser Farbe sind mit punktirten Linien gezeichnet). Hierbei ist auch die Schnittlinie der angenommenen Bildebene (in der Entfernung 311.648^{mm} vom letzten Radiusmittelpunkte) mit der verticalen Axenebene gezeichnet, und ferner der Schnitt einer zweiten verticalen Bildebene (in der Entfernung 308.648^{mm} vom letzten Radiusmittelpunkte) mit der Axenebene angegeben; in dieser Ebene schneiden, wie sofort ersichtlich, die Strahlen die Bildebene in viel geringerem gegenseitigem Abstande, es wird somit hier die entstehende Bildfläche kleiner, wenn nicht die seitlichen Strahlen wesentlich ungünstiger sich gestalten, was nicht der Fall ist, wie man sich durch Berechnung der Schnittpunkte eines seitlichen Strahles überzeugen kann.

Für diese beiden Ebenen sind auch die entstehenden Bilder gezeichnet. In Fig. 53 ist die Bildfläche in der Ebene, deren Entfernungen

XIV. Fehler in den Brennweiten für einen seitlich von der Axe gelegenen Bildpunkt.

	+ 15.0	+ 10.0	+ 6.6667	+ 4.4444	+ 2.9630	— 2.9630	— 4.4444	— 6.6667	— 10.0	— 15.0
1) Vereinigungsweiten auf dem Hauptstrahle vom Hauptpunkte aus:										
a) ideale Werthe:	mm 100.0	mm 100.0	mm 100.0	mm 100.0	mm 100.0	mm 100.0	mm 100.0	mm 100.0	mm 100.0	mm 100.0
b) wirkliche Werthe: *D*	97.382	98.270	98.574	98.665	98.680	98.421	98.210	97.769	96.892	95.027
F	96.173	97.056	97.352	97.428	97.469	97.276	96.992	96 544	95.630	93.740
2) Oeffnungswinkel vom Hauptstrahle aus:										
a) ideale Werthe:	30983″	20674″	13789″	9200″	6137″	6155″	9242″	13886″	20887″	31484″
b) wirkliche Werthe: *D*	32392	21351	14168	9416	6288	6133	9211	13857	20915	31810
F	32800	21581	14346	9547	6357	6212	9330	14036	21185	32223
3) Anfangspunkte der Vereinigungsweiten projicirt auf den Hauptstrahl										
a) ideale Werthe:	mm + 2.681	mm + 1.545	mm + 0.924	mm + 0.566	mm + 0.356	mm — 0.270	mm — 0.355	mm — 0.475	mm — 0 550	mm — 0.432
b) wirkliche Werthe: *D*	+ 2.296	+ 1.333	+ 0.831	+ 0.526	+ 0.345	— 0.279	— 0.409	— 0.572	— 0.769	— 0.956
F	+ 2.209	+ 1.350	+ 0.845	+ 0.544	+ 0.358	— 0.266	— 0.394	— 0.554	— 0.753	— 0.943
4) Fehler in den Vereinigungsweiten für: *D*	mm 2.618	mm 1.720	mm 1.426	mm 1.335	mm 1.310	mm 1.579	mm 1.790	mm 2.231	mm 3.108	mm 4.973
F	3.827	2.944	2.648	2.572	2.531	2.723	3.008	3.456	4.370	6.260
5) Fehler in den Oeffnungswinkeln für: *D*	— 1409″	— 677″	— 379″	— 216″	— 149″	+ 22″	+ 31″	+ 29″	— 28″	— 326″
F	— 1817	— 907	— 557	— 347	— 220	— 57	— 88	— 150	— 298	— 739
6) Fehler in den Anfangspunkten der Vereinigungsweiten für: *D*	mm + 0.584	mm + 0.213	mm + 0.088	mm + 0.041	mm + 0.012	mm + 0.012	mm + 0.042	mm + 0.095	mm + 0.222	mm + 0.523
F	+ 0.474	+ 0.194	+ 0.076	+ 0.021	— 0.004	— 0.004	+ 0.027	+ 0.076	+ 0.206	+ 0.511

XV. Farbe der Linie *D*.

	15^{mm}		10^{mm}		6.667^{mm}		4.444^{mm}		2.963^{mm}		Hauptstrahl.
	X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	
Oberer Randstrahl	10.040		10.274		10.354		10.391		10.412		
Unterer Randstrahl	11.217		10.767		10.602		10.532		10.499		10.452
Seitl. Randstrahl	10.508	— 0.414	10.500	— 0.138	10.462	— 0.053	10.456	— 0.023	10.453	— 0.012	

Farbe der Linie *F*.

	15^{mm}		10^{mm}		6.667^{mm}		4.444^{mm}		2.963^{mm}		Hauptstrahl.
	X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	
Oberer Randstrahl	9.846		10.144		10.268		10.333		10.374		
Unterer Randstrahl	11.426		10.900		10.687		10.588		10.534		10.453
Seitl. Randstrahl	10.527	— 0.616	10.477	— 0.265	10.462	— 0.138	10.455	— 0.080	10.450	— 0.052	

XVI. Farbe der Linie *D*.

	15^{mm}		10^{mm}		6.667^{mm}		4.444^{mm}		2.963^{mm}		Hauptstrahl.
	X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	
Oberer Randstrahl	10.250		10.269		10.210		10.155		10.116		
Unterer Randstrahl	10.158		9.931		9.908		9.930		9.958		10.032
Seitl. Randstrahl	10.193	0.053	10.161	0.168	10.147	0.150	10.141	0.111	10.138	0.077	

Farbe der Linie *F*.

	15^{mm}		10^{mm}		6.667^{mm}		4.444^{mm}		2.963^{mm}		Hauptstrahl.
	X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	
Oberer Randstrahl	10.063		10.144		10.127		10.099		10.077		
Unterer Randstrahl	10.358		10.058		9.989		9.984		9.991		10.032
Seitl. Randstrahl	10.194	— 0.142	10.159	0.045	10.146	0.068	10.139	0.057	10.137	0.043	

von der letzten Mittelpunktsebene 311.648^{mm} beträgt, in 100maliger Vergrösserung gezeichnet. Die Zahlen, nach welchen die Zeichnung entworfen, sind in der kleinen Tabelle XV (S. 143) zusammengestellt.

Man erkennt aus diesen Zahlen sofort, dass alle Strahlen sich gekreuzt haben, indem die oberen Randstrahlen die Bildebene tiefer als die unteren Randstrahlen treffen, und auch die seitlichen Strahlen auf der Seite des Hauptstrahles treffen, die ihrer anfänglichen Lage entgegengesetzt ist. In der Zeichnung sind die anfänglich auf dem Mantel eines kreisförmigen Büschels gelegenen Strahlen durch Curven verbunden und zur Orientirung die auf die Linse einfallenden Strahlenbüschel im Schnitte mit einer zur Linsenaxe senkrechten Ebene [und zwar in zweimaliger Vergrösserung] wiedergegeben, und dabei die Schnittpunkte mit den fortlaufenden Zahlen 1, 2 ... bis 20 bezeichnet. In dem 200 mal vergrösserten Bilde sind dann die entsprechenden Schnittpunkte der gelben Strahlen ebenfalls mit 1, 2 ... bis 20 und die der blauen mit 1′, 2′ ... bis 20′ bezeichnet.

In Fig. 54 ist dann die Bildfläche in der Entfernung 308.648^{mm} von der letzten Mittelpunktsebene, ebenfalls in 200maliger Vergrösserung gezeichnet. Die Coordinaten der Schnittpunkte der Strahlen mit dieser Ebene sind in der kleinen Tabelle XVI (S. 143) zusammengestellt, und zwar in ganz gleicher Weise wie bei der vorausgehenden Tabelle.

In dieser Zeichnung sind die Schnittpunkte der einzelnen Strahlen in ganz gleicher Weise wie in der vorangehenden bezeichnet. Es ist leicht zu erkennen, dass die Bildflächen in dieser Ebene bedeutend kleiner als in der ersteren sind, und dass ein Schneiden der Strahlen hierbei noch nicht stattgefunden hat.

V. Capitel.

Achromatische zweilinsige Objective.

§ 1. Voraussetzungen für die Berechnung zweilinsiger Objective.

Im vorausgehenden Capitel haben wir gezeigt, was mit einfachen Linsen geleistet werden kann, und welche Fehler in dem von ihnen entworfenen Bilde bleiben. Wir haben nämlich (Cap. IV. § 7. c) für Linsen aus gleichem Glase, gleicher Oeffnung und gleicher wahrer Brennweite, sowie von gleicher, durch die verlangte Oeffnung bedingten Dicke, verschiedene Formen berechnet, indem wir durch verschiedene Vertheilung der Brechung in die beiden Linsenflächen die Halbmesser der Linsen variirten; wir stellten sodann fest, worin sich die von diesen Linsen entworfenen Bilder unterscheiden. Hierbei zeigte sich, dass die Deutlichkeit des Bildpunktes in der Axe durch zwei Fehler sehr leidet, nämlich durch den Farben- und den Kugelgestaltfehler; und dass diese zwar auf ein Minimum gebracht, aber nicht gehoben werden können. Durch die ge-

machten Annahmen ist über alle Elemente einer Linse, mit Ausnahme der beiden Radien verfügt, und es kann deshalb bei einem bestimmten Werthe des ersten Radius durch den zweiten Radius nur eine Bedingung, die Einhaltung der wahren Brennweite, erfüllt werden.

Bei Hinzufügung einer zweiten Linse wollen wir die Glassorten so wählen, dass sie ein Achromatisiren der Linsencombination ermöglichen; es sollen ferner die zu berechnenden Linsencombinationen gleiche Oeffnung und gleiche wahre Brennweite erhalten; die Dicke der positiven Linse entspreche der verlangten Oeffnung und sei für alle gleich gross, die der negativen Linse ist durch die nothwendige Festigkeit derselben bedingt, und wird ebenfalls für alle gleich gross angenommen; endlich soll der Abstand beider Linsen möglichst klein gemacht werden. Durch eine solche Linsencombination aus zwei Linsen können nun zwei weitere Bedingungen, entsprechend den neu hinzugekommenen beiden Radien erfüllt werden, also ausser der Einhaltung der wahren Brennweite die Hebung des Farben- und Kugelgestaltfehlers.

Um bei Festhaltung positiver wahrer Brennweite ein Linsensystem achromatisiren zu können, ist es nothwendig, dass die hierzu verwendeten Gläser die Zerstreuung in anderer Weise ändern als die Brechung; denn wäre Brechung und Zerstreuung der Gläser proportional geändert, so müsste die negative Linse, um einen gleich grossen Farbenfehler wie die positive zu erzeugen, auch gleich grosse, entgegengesetzte wahre Brennweite haben, und die Linsencombination würde ein Planglas, ihre totale Ablenkung zu Null und ihre Gesammt-Brennweite unendlich gross. Von der Unproportionalität der Zerstreuung im Vergleich zur Brechung hängt es ab, ein wie grosser Theil der Brechung, welche die positive Linse leistet, übrig bleibt, wenn durch eine negative Linse aus stärker zerstreuendem Glase der Farbenfehler gehoben werden soll. Darnach ist klar, dass für Glassorten von stärkerem Unterschied in der Zerstreuung schwächer brechende, für solche mit geringerem Unterschiede dagegen stärker brechende Linsen verwendet werden müssen, um achromatische Combinationen von gleicher wahrer Brennweite herstellen zu können.

Bekanntlich sind die Spectra verschiedener Gläser in ihren einzelnen Theilen nicht streng proportional, deshalb sind die mit solchen Gläsern erzielten Achromate nicht streng achromatisch; es werden vielmehr stets nur zwei Farben gewählt werden können, für welche die Bedingung des Achromatismus strenge erfüllt ist. Die Wahl dieser Farben ist bedingt durch den Zweck, dem ein achromatisches Objectiv dienen soll (vergl S. 33).

Wir wählen für die weiteren Betrachtungen zwei Glassorten aus, welche den am meisten im Handel vorkommenden entsprechen, und berechnen dadurch achromatische Objective, dass wir eine positive Linse aus Crownglas und eine negative aus Flintglas so zusammensetzen, dass die Combination die geforderte positive Brennweite, und die Einzellinsen gleich grosse, aber entgegengesetzte Farbenfehler und Kugelgestaltfehler haben.

Es lässt sich die Herstellung gleicher wahrer Brennweiten und der Achromasie in allen Fällen erreichen, indem zu jeder Crownglaslinse eine Flintglaslinse und zu jeder Flintglaslinse eine Form der Crownglaslinse gefunden werden kann, welche diesen Bedingungen entspricht; anders

verhält es sich mit der Hebung des Kugelgestaltfehlers. Dieser hat bekanntlich darin seinen Grund, dass die Brechung nicht dem Einfallswinkel proportional, sondern dem Sinus des Einfallswinkels proportional erfolgt, und es werden deshalb an sphärischen Flächen die Brechungen nicht den Einfallshöhen proportional, sondern rascher als der Zunahme der Einfallshöhen entsprechend wachsen. Hieraus folgt, dass der Kugelgestaltfehler einer Linse um so grösser sein muss, je ungleicher die Brechung der Linse in die beiden Flächen vertheilt ist, und dass er in dem Falle ein Minimum erreicht, wenn die Brechung an beiden Flächen im selben Sinne und gleich gross ist. Beachten wir ferner, dass die Ablenkung der positiven Linse immer grösser sein muss als die der negativen, wenn ein positives achromatisches System erhalten werden soll, so folgt daraus, dass das Minimum des Kugelgestaltfehlers bei der positiven gleichbrechenden Linse einen grösseren Werth erhält, als das Minimum des Kugelgestaltfehlers in der Flintglaslinse mit gleich stark brechenden Flächen. Der Kugelgestaltfehler kann aber nur gehoben werden, wenn die Fehler bei den Linsen gleich gross und entgegengesetzt sind. Es kann deshalb zu jeder Crownglaslinse eine Flintglaslinse gefunden werden, welche den Kugelgestaltfehler hebt, weil der Fehler der einfachen gleichbrechenden Flintglaslinse kleiner ist und durch ungleiches Vertheilen der Brechungen stets auf die Grösse des Fehlers der Crownglaslinse gebracht werden kann, während zu einer gleichbrechenden Flintglaslinse sich keine Crownglaslinse finden lässt, welche einen eben so kleinen aber entgegengesetzten Fehler hätte. Nur jene Flintglaslinsen können in Systemen, welche den Kugelgestaltfehler heben sollen, verwendet werden, die in Folge ungleicher Vertheilung der Brechung in beide Flächen einen Kugelgestaltfehler geben, der mindestens ebenso gross ist, als der der gleichbrechenden Crownglaslinse oder grösser.

Die verschiedenen möglichen Linsencombinationen zerfallen nun in zwei Gruppen, je nachdem die Crownglaslinse oder die Flintglaslinse vorausgestellt wird. Durch die gewählten Glassorten ist immer die Stärke der Ablenkung beider Linsen bedingt, wenn dieselben zu einem achromatischen Objective vereinigt werden sollen. Kennt man diese Grössen, so kann man den ersten Radius der vorausstehenden Linse willkürlich annehmen, und die Wahl des zweiten Radius ist so zu treffen, dass die von der Linse geforderte Leistung erzielt wird. Ist die Vorderlinse aus Crownglas, so lässt sich zu jeder Form, deren Halbmesser ohne Ueberschreitung der vorgeschriebenen Dicke noch die verlangte Oeffnung geben, zwei Flintglaslinsen rechnen, welche Kugelgestalt- und Farbenfehler heben, indem die stärkere Zerstreuung einmal mit der ersten, das anderemal mit der zweiten Fläche geleistet wird. Stehen dagegen die Flintglaslinsen voraus, so fallen alle jene Formen aus, bei denen der Kugelgestaltfehler kleiner ist, als ihn die gleich brechende Crownglaslinse bedingt, und die beiden Fälle von Flintglaslinsen, die den Fehler ebenso gross haben als die gleichbrechende Crownglaslinse, gestatten die Anwendung nur einer Crownglaslinse, nämlich der gleichbrechenden, während alle Flintglaslinsen mit grösserem Kugelgestaltfehler durch zwei Crowngläser zu Objectiven combinirt werden können, welche bei Einhaltung der vorgeschriebenen Brennweite den Farben- und Kugelgestaltfehler heben.

§ 2. Berechnung zweilinsiger Objective.

Als Beispiel für die Berechnung der zweilinsigen achromatischen Objective, die auch frei vom Kugelgestaltfehler sind, wählen wir ein Objectiv mit Crown voraus, und zwar aus nachstehenden Glassorten. Es sei: ${}_Dn = 1.518\,06$ und ${}_Vn = 1.533\,56$ für das Crownglas und ${}_Dn' = 1.613\,58$ und ${}_Vn' = 1.642\,52$ für das Flintglas. Die Dimensionen des Objectives sollen folgende sein: der Oeffnungshalbmesser betrage 30^{mm} und die wahre Brennweite 720^{mm}, die positive Linse habe in der Mitte die Dicke 8^{mm}, die negative Linse 5^{mm}, und endlich sei der Abstand beider Linsen 0.01^{mm}.

Bei Objectivformen, welche zwischen beiden Linsen eine positive Luftlinse einschliessen, muss der Abstand dieser der verlangten Oeffnung entsprechend angenommen werden, um nicht unmögliche Fälle in Rechnung zu bringen.

Wir wählen zur Berechnung der Radien des Objectives zwei parallel zur Axe einfallende Strahlen, der eine nahe der Axe gelegen (Axenstrahl), der andere nahe am Rande (Randstrahl). Von diesen als weisses Licht einfallenden Strahlen, die bei der ersten Brechung zersetzt werden, verfolgen wir zweierlei Farben, und zwar diejenige von der Linie D und eine von stärkerer Brechung im Violett. (Vergl. S. 33.) Für den Strahl von der Farbe D stellen wir die wahre Brennweite her, und heben wir auch den Kugelgestaltfehler. Es bedingt nun die Annahme des ersten Halbmessers des Linsensystems die Construction der Combination, die Feststellung des zweiten den Achromatismus, die richtige Wahl des dritten den Kugelgestaltfehler, während der vierte stets so angenommen werden muss, dass die wahre Brennweite den vorgeschriebenen Werth erhält. Anfänglich, bis der Farbenfehler gehoben werden soll, genügt es mit dem Axenstrahle allein zu rechnen und den Farbenfehler zu bestimmen, den die genähert richtigen Werthe ergeben; um den Farbenfehler zu heben, wird der zweite Radius in dem Sinne geändert, dass beide Linsen um gleich viel stärker brechend werden müssen, wenn der Farbenfehler nicht compensirt, schwächer, wenn er übercompensirt war. Ist in dieser Art der Farbenfehler gehoben, so wird der Randstrahl mit der Farbe D gerechnet, und damit der Kugelgestaltfehler bestimmt, er wird dann gehoben, indem die Brechungen zwischen die beiden Flächen anders vertheilt werden, ungleicher, wenn er nicht compensirt, gleicher, wenn er übercompensirt ist; hat hierbei der Farbenfehler etwas geändert, so geht man abermals zu dem zweiten Radius zurück, hält die Differenz zwischen dem 2ten und 3ten Radius wie in dem Falle mit gehobenem Kugelgestaltfehler und rechnet wieder durch, indem der vierte Radius zur Einhaltung der Brennweite benützt wird. Man muss mit der Aenderung bis an den ersten Radius zurückgehen, wenn man die Construction des Objectives ändern will, bis an den zweiten, wenn man den Farbenfehler, und den dritten, wenn man den Kugelgestaltfehler ändern will, dagegen wird durch den letzten Radius stets die wahre Brennweite erhalten.

Nachdem wir im Vorausgehenden den Gang der Berechnung in kurzen Zügen geschildert haben, wollen wir nun für das schon oben angegebene Beispiel die Durchrechnung im Folgenden wirklich durchführen.

Es sind die Voraussetzungen:

$H_0 = 30^{mm}$; $F_{0,6} = 720^{mm}$; $D_1 = 8.0^{mm}$; $D_3 = 0.01^{mm}$; $D_5 = 5.0^{mm}$;

$$_Dn = 1.518\,06; \quad \log {_Dn} = 0.181\,289,$$
$$_Vn = 1.533\,56; \quad \log {_Vn} = 0.185\,701,$$
$$_Dn' = 1.613\,58; \quad \log {_Dn'} = 0.207\,791,$$
$$_Vn' = 1.642\,52; \quad \log {_Vn'} = 0.215\,511.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$_Vn - {_Dn} = \Delta n = 0.015\,50; \quad \log \Delta n = 8.190\,332;$$
$$_Vn' - {_Dn'} = \Delta n' = 0.028\,94; \quad \log \Delta n' = 8.461\,499;$$
$$\log \frac{\Delta n'}{\Delta n} = 0.271\,167; \quad \frac{\Delta n'}{\Delta n} = 1.867\,11;$$
$$_Dn - 1 = 0.518\,06; \quad \log ({_Dn} - 1) = 9.714\,380;$$
$$_Dn' - 1 = 0.613\,58; \quad \log ({_Dn'} - 1) = 9.787\,871.$$

Wir wählen nun als Axenstrahl denjenigen, welcher nach Durchlaufung der Linsencombination mit der Axe einen Winkel von 1″ bildet, so dass für denselben $\beta_{0,6} = 1''$ ist. Da $\beta_{0,6} = \frac{H_0}{F_{0,6}}$, so haben wir als Einfallshöhe des Axenstrahles $H_0 = 720$ anzunehmen (vergl. S. 69), damit $\beta_{0,6} = \frac{H_0}{F_{0,6}} = \frac{720}{720} = 1$ wird. Die totale Ablenkung der Linsencombination, nämlich $\beta_{0,6}$ setzt sich aus den Ablenkungen der Einzellinsen, aus $\beta_{0,2}$ und $\beta_{4,6}$ zusammen, es muss also sein:

$$\beta_{0,2} + \beta_{4,6} = \beta_{0,6} = 1.$$

Damit die Linsencombination für Axenstrahlen ein achromatisches Bild liefere, müssen die Ablenkungen der Einzellinsen die näherungsweise richtigen Bedingungen (vergl. S. 24) erfüllen:

$$\beta_{0,2} = \frac{1}{1 - \frac{_Dn' - 1}{_Dn - 1}\,\frac{\Delta n}{\Delta n'}}, \quad \text{und} \quad \beta_{4,6} = -\frac{1}{\frac{_Dn - 1}{_Dn' - 1}\,\frac{\Delta n'}{\Delta n} - 1}.$$

Setzen wir hierin die obigen Werthe ein, so wird:

$$\beta_{0,2} = +\,2''734\,803, \quad \log \beta_{0,2} = 0.436\,926 \text{ und}$$
$$\beta_{4,6} = -\,1.734\,803, \quad \log \beta_{4,6} = 0.239\,250n.$$

Den ersten Radius der Linsencombination nehmen wir willkürlich an, wir setzen in unserem Beispiele voraus, dass $R_0 = 420.00^{mm}$ sei; mit Hülfe der für einen Axenstrahl gültigen Formel (vergl. S. 70):

$$R_0 = \frac{H_0\,({_Dn} - 1)}{\delta_0\,{_Dn}},$$

ist δ_0 und dann, da $\delta_0 + \delta_2 = \beta_{0,2}$, auch δ_2 auszumitteln, wobei wie schon erwähnt $H_0 = 720^{mm}$ zu setzen ist.

Es ist:

$$
\begin{aligned}
\log H_0 &= 2.857\,333 \\
\log ({}_D n - 1) &= 9.714\,380 \\
\log 1 : {}_D n &= 9.818\,711 \\
\log 1 : R_0 &= 7.376\,751 \\
\hline
\log \delta_0 &= 9.767\,175 \\
-\delta_0 &= -0.585\,026 \\
\beta_{0,2} &= 2.734\,803 \\
\hline
\delta_2 &= 2.149\,777 \\
\log \delta_2 &= 0.332\,393
\end{aligned}
$$

Der Radius R_2 ist aus der Formel:

$$R_2 = \frac{(H_0 - D_1\,\delta_0)\,({}_D n - 1)}{-\delta_2 + \delta_0\,({}_D n - 1)}$$

zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
\log D_1 &= 0.903\,090 \\
\log \delta_0 &= 9.767\,175 \\
\hline
\log D_1\,\delta_0 &= 0.670\,265 \\
-D_1\,\delta_0 &= -4.680\,206 \\
H_0 &= 720 \\
\hline
H_0 - D_1\,\delta_0 &= 715.319\,794 \\
\log (H_0 - D_1\,\delta_0) &= 2.854\,500 \\
\log ({}_D n - 1) &= 9.714\,380 \\
\hline
\log (H_0 - D_1\,\delta_0)({}_D n - 1) &= 2.568\,880 \\
\log \{1 : [-\delta_2 + \delta_0({}_D n - 1)]\} &= 9.733\,604\,n \\
\hline
\log R_2 &= 2.302\,484\,n \\
R_2 &= -200.671
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log \delta_0 &= 9.767\,175 \\
\log ({}_D n - 1) &= 9.714\,380 \\
\hline
\log \delta_0\,({}_D n - 1) &= 9.481\,555 \\
\delta_0\,({}_D n - 1) &= 0.303\,078 \\
-\delta_2 &= -2.149\,777 \\
\hline
-\delta_2 + \delta_0\,({}_D n - 1) &= -1.846\,699 \\
\log[-\delta_2 + \delta_0({}_D n - 1)] &= 0.266\,396\,n
\end{aligned}
$$

Den Radius R_4 nehmen wir etwas flacher an als den Radius R_2, damit die Linsenflächen bei geringem Abstande (0.01^{mm}) in der Mitte, am Rande sich nahe aneinander legen. Man macht z. B. den Radius R_4 um 5^{mm} grösser als R_2, also $R_4 = 200.671^{mm} + 5^{mm} = 205.671^{mm}$.

Unter Zugrundelegung der bisher gemachten Annahmen können wir einen Axenstrahl durch die Linsencombination trigonometrisch bis zum Austritt aus der dritten Fläche verfolgen, und es wird dann auch möglich, die bis dahin unbekannten Werthe von φ_6 und R_6 auszumitteln, da dieselben so zu wählen sind, dass die wahre Brennweite eingehalten wird. Die trigonometrische Rechnung führen wir nun gleichzeitig für den Axenstrahl von der Farbe D und für Violett durch, um den bei den angenommenen Constanten der Linsencombination übrig bleibenden Farbenfehler zu erhalten, wobei wir sechsstellige Logarithmen anwenden, da bei Benützung fünfstelliger Logarithmen der Farbenfehler in den Grenzen der Unsicherheit bleiben würde. Es ergiebt sich:

	Gelb:	Violett:
$\log H_0 =$	2.857 333	2.857 333
$\log 1 : \pm R_0 =$	7.376 751	7.376 751
$\log \varphi_0 =$	0.234 084	0.234 084
$\log 1 : n =$	9.818 711	9.814 299
$\log \varphi_0' =$	0.052 795	0.048 383
$\varphi_0 =$	1.714 289	1.714 289
$-\varphi_0' =$	− 1.129 263	− 1.117 849
$\delta_0 =$	0.585 026	0.596 440

	Gelb:	Violett:
$\log \delta_0 =$	9.767 175	9.775 567
$\log 1 : \delta_0 =$	0.232 825	0.224 433
$\log \varphi_0 =$	0.052 795	0.048 383
$\log \pm R_0 =$	2.623 249	2.623 249
$\log (A_0' \mp R_0) =$	2.908 869	2.896 065
$A_0' \mp R_0 =$	810.717	787.164
$\pm R_0 \mp R_2 - D_1 =$	612.671	612.671
$A_0' \mp R_2 - D_1 =$	1423.388	1399.835
$\log (A_0' \mp R_2 - D_1) =$	3.153 323	3.146 077
$\log \delta_0 =$	9.767 175	9.775 567
$\log 1 : \pm R_2 =$	7.697 516 *n*	7.697 516 *n*
$\log \varphi_2 =$	0.618 014 *n*	0.619 160 *n*
$\log n =$	0.181 289	0.185 701
$\log \varphi_2' =$	0.799 303 *n*	0.804 861 *n*
$\varphi_2 =$	— 4.149 674	— 4.160 638
$- \varphi_2' =$	6.299 455	6.380 593
$\delta_2 =$	2.149 781	2.219 955
$\delta_0 =$	0.585 026	0.596 440
$\beta_{0,2} =$	2.734 807	2.816 395
$\log \beta_{0,2} =$	0.436 927	0.449 694
$\log 1 : \beta_{0,2} =$	9.563 073	9.550 306
$\log \varphi_2' =$	0.799 303 *n*	0.804 861 *n*
$\log \pm R_2 =$	2.302 484 *n*	2.302 484 *n*
$\log (A_2' \mp R_2) =$	2.664 860	2.657 651
$(A_2' \mp R_2) =$	462.2320	454.6226
$\pm R_2 \mp R_4 - D_3 =$	4.99	4.99
$(A_2' \mp R_4 - D_3) =$	467.2220	459.6126
$\log (A_2' \mp R_4 - D_3) =$	2.669 523	2.662 392
$\log \beta_{0,2} =$	0.436 927	0.449 694
$\log 1 : \pm R_4 =$	7.686 828 *n*	7.686 828 *n*
$\log \varphi_4 =$	0.793 278 *n*	0.798 914 *n*
$\log 1 : n =$	9.792 209	9.784 489
$\log \varphi_4' =$	0.585 487 *n*	0.583 403 *n*
$\varphi_4 =$	— 6.212 666	— 6.293 816
$- \varphi_4' =$	3.850 233	3.831 802
$\delta_4 =$	— 2.362 433	— 2.462 014
$\beta_{0,2} =$	2.734 807	2.816 395
$\beta_{0,4} =$	0.372 374	0.354 381
$\log \beta_{0,4} =$	9.570 979	9.549 470
$\log 1 : \beta_{0,4} =$	0.429 021	0.450 530
$\log \varphi_4' =$	0.585 487 *n*	0.583 403 *n*
$\log \pm R_4 =$	2.313 172 *n*	2.313 172 *n*
$\log (A_4' \mp R_4) =$	3.327 680	3.347 105

Nun lassen sich auch die Werthe von φ_6 und R_6 berechnen, da ja die Formeln:

$$\delta_6 = \beta_{4,6} - \delta_4,$$

$$\varphi_6 = \frac{\delta_6}{1 - {}_D n}$$

und

$$R_6 = \frac{(A_4' - D_5)\,\beta_{0,4}}{\varphi_6 + \beta_{0,4}}$$

bestehen müssen, wobei die wahre Brennweite nur für die Farbe D einzuhalten ist, und deshalb bei dieser Rechnung allein die Farbe D Berücksichtigung findet. Wir erhalten:

$A_4' \mp R_4 =$	2126.572
$\pm R_4 =$	− 205.671
$A_4' =$	1920.901
$- D_5 =$	− 5
$A_4' - D_5 =$	1915.901
$\log (A_4' - D_5) =$	3.282 873
$\log \beta_{0,4} =$	9.570 979
$\log (A_4' - D_5)\,\beta_{0,4} =$	2.853 352
$\beta_{4,6} =$	− 1.734 807
$- \delta_4 =$	2.362 433
$\delta_6 =$	0.627 626

$\log \delta_6 =$	9.797 701
$\log 1 : (1 - n') =$	0.212 129 *n*
$\log \varphi_6 =$	0.009 830 *n*
$\varphi_6 =$	− 1.022 892
$\beta_{0,4} =$	0.372 374
$\varphi_6 + \beta_{0,4} =$	− 0.650 518
$\log (\varphi_6 + \beta_{0,4}) =$	9.813 259 *n*
$\log 1 : (\varphi_6 + \beta_{0,4}) =$	0.186 741 *n*
$\log (A_4' - D_5)\,\beta_{0,4} =$	2.853 352
$\log R_6 =$	3.040 093 *n*
$R_6 =$	− 1096.713

Da nun R_6 ebenfalls bekannt ist, können wir von der schon oben gefundenen Grösse: $(A_4' \mp R_4)$ an trigonometrisch durch die ganze Linsencombination rechnen, und zwar wieder für beide Farben:

$A_4 \mp R_4 =$	2126.572	2223.847
$\pm R_4 \mp R_6 - D_5 =$	886.042	886.042
$A_4' \mp R_6 - D_5 =$	3012.614	3109.889
$\log (A_4' \mp R_6 - D_5) =$	3.478 944	3.492 745
$\log \beta_{0,4} =$	9.570 979	9.549 470
$\log 1 : \pm R_6 =$	6.950 907 *n*	6.959 907 *n*
$\log \varphi_6 =$	0.009 830 *n*	0.002 122 *n*
$\log n' =$	0.207 791	0.215 511
$\log \varphi_6' =$	0.217 621 *n*	0.217 633 *n*
$\varphi_6 =$	− 1.022 892	− 1.004 898
$- \varphi_6' =$	1.650 521	1.650 567
$\delta_6 =$	0.627 629	0.645 669
$\beta_{0,4} =$	0 372 374	0.354 381
$\beta_{0,6} =$	1.000 003	1.000 050
$\log \beta_{0,6} =$	0.000 001	0.000 022
$\log 1 : \beta_{0,6} =$	9.999 999	9.999 978
$\log \varphi_6' =$	0.217 621 *n*	0.217 633 *n*
$\log \pm R_6 =$	3.040 093 *n*	3.040 093 *n*
$\log (A_6' \mp R_6) =$	3.257 713	3.257 704

$A_6' \mp R_6 =$	1810.143	1810.106
$\pm R_6 =$	1096.713	1096.713
$A_6' =$	713.430	713.393

$$\log H_0 = 2.857\,333$$
$$\log 1:\beta_{0,6} = 9.999\,999$$
$$\log F_{0,6} = 2.857\,332$$

$$F_{0,6} = 719.999$$

Die Linsencombination, deren Constante die Werthe $H_0 = 30^{mm}$; $F_{0,6} = 720^{mm}$; $D_1 = 8.0^{mm}$; $D_3 = 0.01^{mm}$; $D_5 = 5.0^{mm}$; $R_0 = 420.0^{mm}$ *O. Z.*, $R_2 = 200.67^{mm}$ *U. Z.*, $R_4 = 205.67^{mm}$ *U. Z.* und $R_6 = 1096.7^{mm}$ *U. Z.* haben, besitzt nach der Rechnung die richtige wahre Brennweite, nämlich $F_{0,6} = 720$, hat aber noch einen kleinen Farbenfehler ${}_DA_6' - {}_FA_6 = 713{,}430 - 713.393 = 0.037^{mm}$.

Dass ein Farbenfehler bleibt, hat seinen Grund darin, dass wir $\beta_{0,2}$ und $\beta_{4,6}$ mit Hülfe von Näherungsformeln bestimmten, somit den Farbenfehler der Crownglaslinse und den der Flintglaslinse zwar entgegengesetzt, aber nur nahe gleich gross gemacht haben. Aus der Rechnung sehen wir, dass der Farbenfehler der Linsencombination nicht compensirt ist, dass also der der Crownglaslinse vorherrscht; und um diesen Fehler zu heben, während die wahre Brennweite festgehalten bleibt, müssen wir beide Linsen um gleich viel stärker brechend machen, wobei dann der Farbenfehler der Flintglaslinse mehr ändert als jener der Crownglaslinse. Dadurch wird dann dem noch vorhandenen Fehler des Objectives entgegengewirkt, und es handelt sich jetzt nur darum, um wieviel die Brechung beider Linsen zu vermehren ist.

Wir benützen dazu ein Näherungsverfahren, wobei wir den Farbenvergrösserungsfehler vernachlässigen. Die Linsencombination besitzt bei einer Brennweite von 720^{mm} einen Farbenfehler von 0.037^{mm}, so dass der violette Strahl die Axe in der Entfernung 719.963^{mm} schneidet; der Winkel, den die beiden farbigen Strahlen bei angenommener gleicher Austrittshöhe (720^{mm}) mit einander bilden, ist dann

$$\frac{720}{719.963} - \frac{720}{720} = 1''0000\,514 - 1''0 = 0''0000\,514.$$

Die Crownglaslinse ergiebt bei einer Brechung für die Farbe D von $2''734\,807$ einen Farbenfehler von

$${}_V\beta_{0,2} - {}_D\beta_{0,2} = 2.816\,395 - 2.734\,807 = 0''081\,588,$$

und die Flintglaslinse für eine Brechung von $1''734\,807$ einen Farbenfehler von

$$({}_V\beta_{0,6} - {}_V\beta_{0,2}) - ({}_D\beta_{0,6} - {}_D\beta_{0,2}) = (1.000\,050 - 2.816\,395) -$$
$$- (1.000\,003 - 2.734\,807) = - 0.081\,541.$$

Für eine Ablenkung von $0''001$ ist der Farbenfehler der Crownglaslinse $\frac{0.081\,588}{2734.807} = 0''0000\,2987$, und der Flintglaslinse $\frac{0.081\,541}{1734.807} = 0''0000\,4700$. Es wird also, wenn man an der Crown- und an der Flintglaslinse die Brechung um je $0''001$ vergrössert, der Farbenfehler um

$$0.0000\,2987 - 0.0000\,4700 = 0''0000\,1713$$

geändert, und zwar übercompensirt. Der bei der Linsencombination noch vorhandene nicht compensirte Farbenfehler von 0''0000 514 wird demnach gehoben werden, wenn man die Brechung der Crown- und Flintglaslinse um $\frac{0.0000\,514 \times 0.001}{0\,0000\,1713} = 0''003\,001$ vermehrt; und es muss werden:

$$\beta_{0,2} = 2''734\,807 + 0''003\,001 = 2''737\,901,$$

und

$$\beta_{4,6} = -1.734\,807 - 0''003\,001 = -1''737\,901.$$

Da R_0 seinen Werth behalten soll, bleibt auch δ_0 ungeändert und δ_2 wird $\beta_{0,2} - \delta_0 = 2.737\,901 - 0.585\,026 = 2.152\,875$. R_2 wird bestimmt mit der Formel: $R_2 = \frac{(H_0 - D_1\,\delta_0)\,({}_Dn - 1)}{-\delta_2 + \delta_0\,({}_Dn - 1)}$.

$\delta_0\,({}_Dn - 1) =$	0 303 078	$\log(H_0 - D_1\,\delta_0)({}_Dn - 1) =$	2.568 880
$-\delta_2 =$	$-$2.152 875	$\log\{1 : [-\delta_2 + \delta_0({}_Dn - 1)]\} =$	9.732 876 *n*
$-\delta_2 + \delta_0\,({}_Dn - 1) =$	$-$1.849 797	$\log R_2 =$	2.301 756 *n*
$\log[-\delta_2 + \delta_0({}_Dn - 1)] =$	0.267 124 *n*	$R_2 =$	$-$200.3346

Der Radius R_4 wird wieder um 5^{mm} grösser als R_2, also gleich -205.3346^{mm} angenommen. Unter Zugrundelegung der nun gefundenen Constanten kann die trigonometrische Durchrechnung durch die Linsencombination ausgeführt werden, wobei wir wieder für beide Farben rechnen, um nachzuweisen, ob diese nun gewählte Linsencombination vollkommen achromatisch ist, oder noch einen Farbenfehler besitzt.

$A_0' \mp R_0 =$	810.717	787.164
$\pm R_0 \mp R_2 - D_1 =$	612.335	612.335
$A_0' \mp R_2 - D_1 =$	1423.052	1399.499
$\log(A_0' \mp R_2 - D_1) =$	3.153 221	3.145 973
$\log \delta_0 =$	9.767 175	9.775 567
$\log 1 : \pm R_2 =$	7.698 244 *n*	7.698 244 *n*
$\log \varphi_2 =$	0.618 640 *n*	0.619 784 *n*
$\log n =$	0.181 289	0.185 701
$\log \varphi_2' =$	0.799 929 *n*	0.805 485 *n*
$\varphi_2 =$	$-$4.155 660	$-$4.166 621
$-\varphi_2' =$	6.308 542	6.389 766
$\delta_2 =$	2.152 882	2.223 145
$\delta_0 =$	0.585 026	0.596 440
$\beta_{0,2} =$	2.737 908	2.819 585
$\log \beta_{0,2} =$	0.437 419	0.450 185
$\log 1 : \beta_{0,2} =$	9.562 581	9.549 815
$\log \varphi_2' =$	0.799 929 *n*	0.805 485 *n*
$\log \pm R_2 =$	2 301 756 *n*	2.301 756 *n*
$\log(A_2' \mp R_2) =$	2.664 266	2.657 056

$(A_2' \mp R_2) =$	461.6002	454.0002
$\pm R_2 \mp R_4 - D_3 =$	4.99	4.99
$A_2' \mp R_4 - D_3 =$	466.5902	458.9902
$\log (A_2' \mp R_4 - D_3) =$	2.668 936	2.661 803
$\log \beta_{0,2} =$	0.437 419	0.450 185
$\log 1 : \pm R_4 =$	7.687 538 *n*	7.687 538 *n*
$\log \varphi_4 =$	0.793 893 *n*	0.799 526 *n*
$\log 1 : n' =$	9.792 209	9.784 489
$\log \varphi_4' =$	0.586 102 *n*	0.584 015 *n*
$\varphi_4 =$	− 6.221 470	− 6.302 692
$-\varphi_4' =$	3 855 689	3.837 205
$\delta_4 =$	− 2.365 781	− 2.465 487
$\beta_{0,2} =$	2.737 908	2.819 585
$\beta_{0,4} =$	0.372 127	0.354 098
$\log \beta_{0,4} =$	9.570 691	9.549 123
$\log 1 : \beta_{0,4} =$	0.429 309	0.450 877
$\log \varphi_4' =$	0.586 102 *n*	0.584 015 *n*
$\log \pm R_4 =$	2.312 462 *n*	2.312 462 *n*
$\log (A_4' \mp R_4) =$	3.327 873	3.347 354

Die Bestimmung der neuen Werthe von φ_6, δ_6 und R_6 wird wie früher vorgenommen, es ist:

$A_4' \mp R_4 =$	2127.5167
$\pm R_4 =$	− 205.3346
$A_4' =$	1922.1821
$-D_5 =$	− 5
$A_4' - D_5 =$	1917.1821
$\log (A_4' - D_5) =$	3.282 663
$\log \beta_{0,4} =$	9.570 691
$\log (A_4' - D_5)\, \beta_{0,4} =$	2.853 354
$\beta_{4,6} =$	− 1.737 908
$-\delta_4 =$	2.365 781
$\delta_6 =$	0.627 873

$\log \delta_0 =$	9.797 872
$\log 1 : (1 - {}_Dn) =$	0.212 129 *n*
$\log \varphi_6 =$	0.010 001 *n*
$\varphi_6 =$	− 1.023 295
$\beta_{0,4} =$	0.372 127
$\varphi_6 + \beta_{0,4} =$	− 0.651 168
$\log (\varphi_6 + \beta_{0,4}) =$	9.813 693 *n*
$\log 1 : (\varphi_6 + \beta_{0,4}) =$	0.186 307 *n*
$\log (A_4' - D_5)\, \beta_{0,4} =$	2.853 354
$\log R_6 =$	3.039 661 *n*
$R_6 =$	− 1095.623

Nun lässt sich die Durchrechnung fortsetzen:

$A_4' \mp R_4 =$	2127.517	2225.123
$\pm R_4 \mp R_6 - D_5 =$	885.288	885.288
$A_4' \mp R_6 - D_5 =$	3012.805	3110.411
$\log (A_4' \mp R_6 - D_5) =$	3.478 971	3.492 818
$\log \beta_{0,4} =$	9.570 691	9.549 123
$\log 1 : \pm R_6 =$	6.960 339 *n*	6.960 339 *n*
$\log \varphi_6 =$	0.010 001 *n*	0.002 280 *n*
$\log n' =$	0.207 791	0.215 511
$\log \varphi_6' =$	0.217 792 *n*	0.217 791 *n*

$\varphi_6 =$	$-$ 1.023 295	$-$ 1.005 264
$-\varphi_6' =$	1.651 171	1.651 167
$\delta_0 =$	0.627 876	0.645 903
$\beta_{0,4} =$	0.372 127	0.354 098
$\beta_{0,6} =$	1.000 003	1.000 001
$\log \beta_{0,6} =$	0.000 001	0.000 000
$\log 1 : \beta_{0,6} =$	9.999 999	0.000 000
$\log \varphi_6' =$	0.217 792 *n*	0.217 791 *n*
$\log \pm R_6 =$	3.039 661 *n*	3.039 661 *n*
$\log (A_6' \mp R_6) =$	3.257 452	3.257 452
$A_6' \mp R_6 =$	1809.056	1809.056
$\pm R_6 =$	1095.623	1095.623
$A_6' =$	713.433	713.433
$\log H_0 =$	2.857 333	
$\log 1 : \beta_{0,6} =$	9.999 999	
$\log F_{0,6} =$	2.857 332	
$F_{0,6} =$	719.999	

Die Rechnung ergiebt, dass die nun angenommene Linsencombination achromatisch ist; es ist jetzt zu bestimmen, wie gross der übrigbleibende Kugelgestaltfehler ist. Zu diesem Zwecke rechnen wir einen in der Höhe $H_0 = 30^{mm}$ einfallenden Randstrahl für die Farbe D durch die achromatische Linsencombination.

$\log H_0 =$	1.477 121
$\log 1 : \pm R_0 =$	7.376 751
$\log \sin \varphi_0 =$	8.853 872
$\log 1 : n =$	9.818 711
$\log \sin \varphi_0' =$	8.672 583
$\varphi_0 =$	4° 5′ 45″.8
$-\varphi_0' =$	$-$2 41 48.9
$\delta_0 =$	1 23 56.9
$\log \sin \delta_0 =$	8.387 695
$\log 1 : \sin \delta_0 =$	1.612 305
$\log \sin \varphi_0' =$	8.672 583
$\log \pm R_0 =$	2.623 249
$\log (A_0' \mp R_0) =$	2.908 137
$A_0' \mp R_0 =$	809.351
$\pm R_0 \mp R_2 - D_1 =$	612.335
$A_0' \mp R_2 - D_1 =$	1421.686
$\log (A_0' \mp R_2 - D_1) =$	3.152 804
$\log \sin \delta_0 =$	8.387 695
$\log 1 : \pm R_2 =$	7.698 244 *n*
$\log \sin \varphi_2 =$	9.238 743 *n*
$\log n =$	0.181 289
$\log \sin \varphi_2' =$	9.420 032 *n*

$\varphi_2 =$	$-$ 9° 58′ 42″.4
$-\varphi_2' =$	15 15 3.2
$\delta_2 =$	5 16 20.8
$\delta_0 =$	1 23 56.9
$\beta_{0,2} =$	6 40 17.7
$\log \sin \beta_{0,2} =$	9.065 124
$\log 1 : \sin \beta_{0,2} =$	0.934 876
$\log \sin \varphi_2' =$	9.420 032
$\log \pm R_2 =$	2.301 756
$\log (A_2' \mp R_2) =$	2.656 664
$A_2' \mp R_2 =$	453.5905
$\pm R_2 \mp R_4 - D_3 =$	4.99
$A_2' \mp R_4 - D_3 =$	458.581
$\log (A_2' \mp R_4 - D_3) =$	2.661 416
$\log \sin \beta_{0,2} =$	9.065 124
$\log 1 : \pm R_4 =$	7.687 538 *n*
$\log \sin \varphi_4 =$	9.414 078 *n*
$\log 1 : n' =$	9.792 209
$\log \sin \varphi_4' =$	9.206 287 *n*

$$\begin{aligned}
\varphi_4 &= -15^\circ\ 2'\ 17''8 \\
-\varphi_4' &= \quad 9\ 15\ \ 12.1 \\
\delta_4 &= -\ 5\ 47\ \ \ 5.7 \\
\beta_{0,2} &= \quad 6\ 40\ \ 17.7 \\
\beta_{0,4} &= \quad 0\ 53\ \ 12.0 \\
\log \sin \beta_{0,4} &= 8.189\,620 \\
\log 1 : \sin \beta_{0,4} &= 1.810\,380 \\
\log \sin \varphi_4' &= 9.206\,287\,n \\
\log \pm R_4 &= 2\,312\,462\,n \\
\log (A_4' \mp R_4) &= 3.329\,129 \\
A_4' \mp R_4 &= 2133.678 \\
\pm R_4 \mp R_6 - D_5 &= 885.288 \\
A_4' \mp R_6 - D_5 &= 3018.966 \\
\log (A_4' \mp R_6 - D_5) &= 3.479\,858 \\
\log \sin \beta_{0,4} &= 8.189\,620 \\
\log 1 : \pm R_6 &= 6.960\,339\,n \\
\log \sin \varphi_6 &= 8.629\,817\,n \\
\log n' &= 0.207\,791 \\
\log \sin \varphi_6' &= 8.837\,608\,n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_6 &= -\ 2^\circ\ 26'\ 37''8 \\
-\varphi_6' &= \quad 3\ \ 56\ \ 42.9 \\
\delta_0 &= \quad 1\ \ 30\ \ \ 5.1 \\
\beta_{0,4} &= \quad 0\ \ 53\ \ 52.0 \\
\beta_{0,6} &= \quad 2\ \ 23\ \ 17.1 \\
\log \sin \beta_{0,6} &= 8.619\,801 \\
\log 1 : \sin \beta_{0,6} &= 1.380\,199 \\
\log \sin \varphi_0' &= 8\,837\,608\,n \\
\log \pm R_6 &= 3.039\,661\,n \\
\log (A_6' \mp R_6) &= 3.257\,468 \\
A_6' \mp R_6 &= 1809.123 \\
\pm R_6 &= 1095.623 \\
A_6' &= 713.500
\end{aligned}$$

Da wir für die weitere Betrachtung die letzte Austrittshöhe benöthigen, benützen wir für Berechnung der Brechung an der letzten Fläche die Höhenformeln (vergl. S. 79), welche in dem vorliegenden Falle, in dem R_6 einen grossen Werth besitzt, auch ein genaueres Resultat liefern. Es ist:

$$\begin{aligned}
-\varphi_6 &= +\ 2^\circ\ 26'\ 37''8 \\
\beta_{0,4} &= -\ 0\ \ 53\ \ 12.0 \\
\eta_6 = \beta_{0,4} - \varphi_6 &= \quad 1\ \ 33\ \ 25.8 \\
{}^1/_2\, \eta_6 &= \quad 0\ \ 46\ \ 42.9 \\
\log \sin \frac{\eta_6}{2} &= 8.133\,169 \\
\log \sin^2 \frac{\eta_6}{2} &= 6.266\,338 \\
\log \pm R_6 &= 3.039\,661\,n \\
\log 2 &= 0.301\,030 \\
\log 2 R_6 \sin^2 \frac{\eta_6}{2} &= 9.607\,029\,n \\
\mp 2 R_6 \sin^2 \frac{\eta_6}{2} &= 0.404\,60 \\
A_4' - D_5 &= 1923.343 \\
A_4' - D_5 \mp 2 R_6 \sin^2 \frac{\eta_6}{2} &= 1923.7476 \\
\log \left(A_4' - D_5 \mp 2 R_6 \sin^2 \frac{\eta_6}{2}\right) &= 3.284\,148 \\
\log \operatorname{tg} \beta_{0,4} &= 8.189\,672 \\
\log H_6 &= 1.473\,820 \\
H_6 &= 29.7728 \\
\log H_6 &= 1.473\,820 \\
\log 1 : \operatorname{tg} \beta_{0,6} &= 1.379\,822 \\
\log H_6 : \operatorname{tg} \beta_{0,6} &= 2.853\,642 \\
H_6 : \operatorname{tg} \beta_{0,6} &= 713.9075 \\
2 R_6 \sin^2 \frac{\eta_6}{2} &= 0.4046 \\
A_6' &= 713.5029
\end{aligned}$$

Der Kugelgestaltfehler der Linsencombination beträgt somit

$$713.433 - 713.503 = 0.070^{\mathrm{mm}}$$

übercompensirt. Um diesen Fehler als Winkelwerth auszudrücken, beachten wir, dass der austretende Randstrahl bei einer Austrittshöhe $H_6 = 29.773^{\mathrm{mm}}$ einen Winkel $\beta_{0,6} = 2^0\ 23'\ 17''.1$ mit der Axe bildet; nehmen wir an, der Randstrahl besitze keinen Kugelgestaltfehler, so müsste er bei gleicher Austrittshöhe die Axe an der gleichen Stelle treffen, an welcher der gleichfarbige Axenstrahl schneidet. Der Winkel $(\beta_{0,6})$, den dieser Randstrahl mit der Axe bildet, rechnet sich aus der Formel:

$$\operatorname{tg}(\beta_{0,6}) = \frac{H_6}{H_6 \operatorname{tg} \beta_{0,6} - \text{Kugelgestaltfehler}};$$

$H_6 \operatorname{tg} \beta_{0,6}$ ist die Projection des Randstrahles auf die Axe und in unserem Falle 713.9075^{mm}, während der Kugelgestaltfehler 0.070^{mm} beträgt. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} \log H_6 &= 1.473\,820 \\ \log 1 : 713.8375 &= \underline{7.146\,401} \\ \log \operatorname{tg}(\beta_{0,6}) &= 8.620\,221 \\[1ex] (\beta_{0,6}) &= 2^0\ 23'\ 17''.9. \end{aligned}$$

Der Kugelgestaltfehler ist demnach in Winkel ausgedrückt

$$2^0\ 23'\ 17''.9 - 2^0\ 23'\ 17''.1 = 0''.8,$$

und zwar übercompensirt. Wir corrigiren nun durch ein Näherungsverfahren diesen Kugelgestaltfehler, der ja dadurch entstanden, dass die Brechung nicht dem Einfalls- und Brechungswinkel, sondern dem Sinus dieser Winkel proportional ist, und wir ändern zum Zwecke der Correction die Vertheilung der Brechung in die beiden Flächen der Flintglaslinse. Die Einfalls- und Brechungswinkel des Randstrahles an der ersten Fläche der Flintglaslinse sind

$$\varphi_4 = -15^0\ 2'\ 17''.8 \text{ und } \varphi_4' = 9^0\ 15'\ 12''.1;$$

den Unterschied zwischen Sinus und Bogen für die beiden Winkel entnehmen wir aus der Tabelle (Beilage Nr. 3).

Es sei hier kurz die Einrichtung und der Gebrauch dieser Tabelle angegeben. In der Tabelle ist von 0° bis 30°, und zwar von 10″ zu 10″ in Winkeln die Differenz des Werthes von Bogen gegen den des Sinus ausgedrückt, so dass man bei jeder Brechung durch Benützung dieser Tabelle die Unproportionalität derselben ermitteln kann, welche dadurch eintritt, dass die Brechung nicht dem Bogen, sondern dem Sinus proportional stattfindet. Bei Anwendung dieser Tabelle ist vorausgesetzt, dass die trigonometrische Durchrechnung durch ein Objectiv vorliegt, so dass der Kugelgestaltfehler in Winkel ausgedrückt werden kann. Es ist hierbei der Winkel zweier Linien zu bilden, welche beide von der Austrittsstelle des Strahles an der letzten Fläche ausgehen, und von denen der eine nach dem Durchschnittspunkte des gleichfarbigen Axenstrahles, der andere nach dem des Randstrahles mit der Axe zielt. [Letzterer ist also der wirkliche Randstrahl.] Ist der Winkel, welchen die auf den Durchschnittspunkt des Axenstrahles gezogene Linie mit der Axe bildet, ein grösserer als der des Randstrahles mit der Axe, so ist der Kugelgestaltfehler übercompensirt, und

umgekehrt, und es muss die letzte Linse gebogen werden, d. h. bei gleicher Gesammtbrechung für den Axenstrahl müssen die Brechungen in die beiden Flächen anders vertheilt werden. Hierbei ist der grösste vorkommende Winkel massgebend, es muss nämlich, wenn die Kugelgestalt übercompensirt ist, und der grösste Einfallswinkel einer Brechung von der Axe angehört, dieser Winkel kleiner werden, gehört er einer Brechung zur Axe an, dagegen grösser werden. In dem oben gerechneten Beispiele war ein Kugelgestaltfehler von 0''.8, und zwar übercompensirt. Der grösste vorkommende Winkel nämlich (—15° 2' 17''.8) gehört einer Brechung von der Axe an. Aus der Tabelle entnehmen wir, dass ein Winkel von 15° 2' 10'' eine Unproportionalität von 10' 19''.19 = 619''.19, und ein Winkel von 15° 2' 20'' eine solche von 10' 19''.53 = 619''.53 bedingt, was für unseren Winkel 10' 19''.46 = 619''.46 ausmacht. Der Austrittswinkel ist + 9° 15' 12''.1; nach der Tabelle geben 9° 15' 10'' eine Unproportionalität von 2' 24''.60, und 9° 15' 20'' eine solche von 2' 24''.73, für unseren Winkel demnach 2' 24''.63 = 144''.63. Es ist somit die unproportionale Ablenkung des grössten Winkels (619''.46) in dem Verhältnisse von $\frac{619''.46}{474''.83}$ grösser als die Unproportionalität der ganzen Brechung (474''.83) an der ersten Fläche dieser Linse. Um den Kugelgestaltfehler zu heben muss die Unproportionalität für die Brechung der Linse um 0''.8 vermindert, somit die des grössten Winkels in dem eben gefundenen Verhältnisse von $\frac{619.46}{474.63}$ gegen 0''.8, also um 1''.04 vermindert werden. Der grösste Winkel soll demnach eine Unproportionalität von

$$619''.46 - 1''.04 = 618''.42$$

besitzen. Nach unserer Tabelle giebt ein Winkel von 15° 1' 40'' eine Unproportionalität von 10' 18''.15, ein Winkel von 15° 1' 50'' eine solche von 10' 18''.49, so dass die Unproportionalität von 618''.42 einem Winkel von 15° 1' 48'' entspricht.

Für den ersten Winkel von — 15° 2' 17''.8 beträgt nach der Tabelle der Unterschied zwischen Sinus und Bogen 619''.46, für den zweiten Winkel + 9° 15' 12''.1 aber 144''.63, und es beträgt die Unproportionalität für die ganze Brechung im Verhältnisse zur Unproportionalität für den ersten Winkel 1 : 1.304. Um nun den ganzen Kugelgestaltfehler von 0''.8 durch die Aenderung an dem ersten Winkel zu heben, muss der Unterschied zwischen Sinus und Bogen an diesem Winkel um 1''.04 weniger ausmachen, als er für — 15° 2' 17''.8 betrug, also 618''.42, so dass nun φ_4 zu — 15° 1' 48'' anzunehmen ist. Mit Hilfe dieses Werthes ist dann R_4 nach der schon mehrfach benützten Formel zu bestimmen.

$\varphi_4 = -15°\ 1'\ 48''$	$\log (A_2' - D_3) = 2.403\,543$
$\log \sin \varphi_4 = 9.413\,844\,n$	$\log \sin \beta_{0,2} = 9.065\,124$
$\sin \varphi_4 = -0.259\,324$	$\log 1 : \sin \beta_{0,2} + \sin \varphi_4 = 0.844\,220\,n$
$\log \sin \beta_{0,2} = 9.065\,124$	$\log R_4 = 2.312\,887\,n$
$\sin \beta_{0,2} = 0.116\,178$	
$\sin \varphi_4 = -0.259\,324$	$R_4 = -205.5357$
$\sin \beta_{0,2} + \sin \varphi_4 = -0.143\,146$	
$\log (\sin \beta_{0,2} + \sin \varphi_4) = 9.155\,780\,n$	

Um zu sehen, ob durch das angewendete Näherungsverfahren der Kugelgestaltfehler vollkommen gehoben ist, wird von dem Austritt der Strahlen aus der Crownglaslinse der Axenstrahl und Randstrahl für die Farbe D unter Benützung des eben gefundenen Werthes von R_4 durch die Flintglaslinse durchgerechnet. Es ist:

	Axenstrahl:	Randstrahl:
$A_2' \mp R_2 =$	461.6002	453.5905
$\pm R_2 \mp R_4 - D_3 =$	5.1911	5.1911
$A_2' \mp R_4 - D_3 =$	466.7913	458.7816
$\log (A_2' \mp R_4 - D_3) =$	2.669 123	2.661 606
$\log \sin \beta_{0,2} =$	0.437 419	9.065 124
$\log 1 : \pm R_4 =$	7.687 113 *n*	7.687 113
$\log \sin \varphi_4 =$	0.793 655 *n*	9.413 843 *n*
$\log 1 : n' =$	9.792 209	9.792 209
$\log \sin \varphi_4' =$	0.585 684 *n*	9.206 052 *n*
$\varphi_4 =$	− 6.218 054	− 15° 1′ 47″.8
$-\varphi_4' =$	3.853 572	9 14 53.9
$\delta_4 =$	− 2.364 482	− 5 46 53.9
$\beta_{0,2} =$	2.737 908	6 40 17.7
$\beta_{0,4} =$	0.373 426	0 53 23.8
$\log \sin \beta_{0,4} =$	9.572 205	8.191 216
$\log 1 : \sin \beta_{0,4} =$	0.427 795	1.808 784
$\log \sin \varphi_4' =$	0.585 864 *n*	9.206 052 *n*
$\log \pm R_4 =$	2.312 887 *n*	2.312 887 *n*
$\log (A_4' \mp R_4) =$	3.326 546	3.327 723

Zur Bestimmung von R_6 ist nur der Axenstrahl der Farbe D zu berücksichtigen.

$A_4' \mp R_4 =$	2121.027
$R_4 =$	− 205.536
$A_4' =$	1915.491
$-D_5 =$	− 5
$A_4' - D_5 =$	1910.491
$\log (A_4' - D_5) =$	3.281 145
$\log \beta_{0,4} =$	9.572 205
$\log (A_4' - D_5)\,\beta_{0,4} =$	2.853 350
$\beta_{4,6} =$	− 1.737 908
$-\delta_4 =$	2.364 482
$\delta_6 =$	0.626 574

$\log \delta_6 =$	9.796 972
$\log 1 : (1 - {}_D n) =$	0.212 129 *n*
$\log \varphi_6 =$	0.009 101 *n*
$\varphi_6 =$	− 1.021 178
$\beta_{0,4} =$	0.373 426
$\varphi_6 + \beta_{0,4} =$	− 0.647 752
$\log (\varphi_6 + \beta_{0,4}) =$	9.811 409 *n*
$\log 1 : (\varphi_6 + \beta_{0,4}) =$	0.188 591 *n*
$\log (A_4' - D_5)\,\beta_{0,4} =$	2.853 350
$\log R_6 =$	3.041 941 *n*
$R_6 =$	− 1101.3891

Die Weiterrechnung erfolgt wieder für Axen- und Randstrahl.

$A_4' \mp R_4 =$	2121.027	2126.782
$\pm R_4 \mp R_6 - D_5 =$	890.853	890.853
$A_4' \mp R_6 - D_5 =$	3011.880	3017.635
$\log (A_4' \mp R_6 - D_5) =$	3.478 838	3.479 667
$\log \sin \beta_{0,4} =$	9.572 205	8.191 216
$\log 1 : \pm R_6 =$	6.958 059 *n*	6.958 059 *n*
$\log \sin \varphi_6 =$	0.009 102 *n*	8.628 942 *n*
$\log n' =$	0.207 791	0.207 791
$\log \sin \varphi_6' =$	0.216 893 *n*	8.836 733 *n*

$\varphi_6 =$	$-1.021\,178$	$-2^0\ 26'\ 20''\!.1$
$-\varphi_6' =$	$1.647\,754$	$3\ 56\ 14.3$
$\delta_6 =$	$0.626\,576$	$1\ 29\ 54.2$
$\beta_{0,4} =$	$0.373\,426$	$0\ 53\ 23.7$
$\beta_{0,6} =$	$1.000\,002$	$2\ 23\ 17.9$
$\log\sin\beta_{0,6} =$	$0.000\,001$	$8.619\,843$
$\log 1:\sin\beta_{0,6} =$	$9.999\,999$	$1.380\,157$
$\log\sin\varphi_6' =$	$0.216\,892\,n$	$8.836\,733n$
$\log\pm R_6 =$	$3.041\,941\,n$	$3.041\,941n$
$\log(A_6'\mp R_6) =$	$3.258\,832$	$3.258\,831$
$A_6'\mp R_6 =$	1814.8142	1814.8084
$\pm R_6 =$	1101.3891	1101.3891
$A_6' =$	713.4251	713.4193

§ 3. Rechnungsbeispiel für Axen- und Randstrahlen.

Der Kugelgestaltfehler beträgt jetzt nur mehr 0.006mm nicht compensirt, geringer als er nach unserer Annahme zulässig; dennoch wollen wir, um an diesem Beispiele Alles zu zeigen, denselben noch kleiner zu machen suchen, indem wir einen noch besseren Werth von φ_4 durch Interpolation ausmitteln. Bei dem Einfallswinkel $\varphi_4 = -15^0\ 2'\ 17''\!.8$ war der Kugelgestaltfehler 0.070mm übercompensirt, dagegen nun bei $-15^0\ 1'\ 48''\!.0$ ist er 0.006mm nicht compensirt; demnach wird der Kugelgestaltfehler bei einem Einfallswinkel von $-15^0\ 1'\ 50''\!.4$ gehoben sein. Es sei bemerkt, dass in unserem Beispiele der übrigbleibende Fehler schon fast innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Rechnung liegt, die Interpolation deshalb zu einem nicht viel besseren Werthe führt, wir nehmen deshalb den etwas zweckmässigeren Einfallswinkel

$$\varphi_4 = -15^0\ 1'\ 49''\!.5$$

an und rechnen zuerst mit diesem Einfallswinkel wieder den Radius R_4.

$\varphi_4 =$	$-15^0\ 1'\ 49''\!.5$	$\log(A_2'-D_3) =$	$2.403\,542$
$\log\sin\varphi_4 =$	$9.413\,856\,n$	$\log\sin\beta_{0,2} =$	$9\,065\,124$
$\sin\varphi_4 =$	$-0.259\,332$	$\log 1:\sin\beta_{0,2}+\sin\varphi_4 =$	$0.844\,197\,n$
$\log\sin\beta_{0,2} =$	$9.065\,124$	$\log R_4 =$	$2.312\,864\,n$
$\sin\beta_{0,2} =$	$0.116\,178$		
$\sin\varphi_4 =$	$-0.259\,332$	$R_4 =$	-205.5248
$\sin\beta_{0,2}+\sin\varphi_4 =$	$-0.143\,154$		
$\log(\sin\beta_{0,2}+\sin\varphi_4) =$	$9.155\,803\,n$		

Wir können nun für die Flintglaslinse sowohl den gelben wie violetten Axen- und den gelben Randstrahl rechnen, und finden:

	Axenstrahl:		Randstrahl:
	Gelb	Violett	Gelb
$A_2'\mp R_2 =$	461.6002	454.0002	453.5905
$\pm R_2\mp R_4-D_3 =$	5.1802	5.1802	5.1802
$A_2'\mp R_4-D_3 =$	466 7804	459.1804	458.7707

	Axenstrahl:		Randstrahl:
	Gelb	Violett	Gelb
$\log (A_2' \mp R_4 - D_3) =$	2.669 113	2.661 983	2.661 596
$\log \sin \beta_{0,2} =$	9.437 419	9.450 185	9.065 124
$\log 1 : \pm R_4 =$	7.687 136 *n*	7.687 136 *n*	7.687 136 *n*
$\log \sin \varphi_4 =$	9.793 667 *n*	9.799 304 *n*	9.413 856 *n*
$\log 1 : n' =$	9.792 209	9.784 489	9.792 209
$\log \sin \varphi_4' =$	9.585 876 *n*	9.583 793 *n*	9.206 065 *n*
$\varphi_4 =$	− 6.218 239	− 6.299 473	− 15° 1′ 49″.5
$-\varphi_4' =$	3.853 687	3.835 246	9 14 54.9
$\delta_4 =$	− 2.364 552	− 2.464 227	− 5 46 54.6
$\beta_{0,2} =$	2.737 908	2.819 585	6 40 17.7
$\beta_{0,4} =$	0.373 356	0.355 358	0 53 23.1
$\log \sin \beta_{0,4} =$	9.572 123	9.550 667	8.191 128
$\log 1 : \sin \beta_{0,4} =$	0.427 877	0.449 333	1.808 872
$\log \sin \varphi_4' =$	0.585 876 *n*	0.583 793 *n*	9.206 065 *n*
$\log \pm R_4 =$	2.312 864 *n*	2.312 864 *n*	2.312 864 *n*
$\log (A_4' \mp R_4) =$	3.326 617	3.345 991	3.327 801

Der Radius R_6 wird nur mit Hilfe des gelben Axenstrahles gerechnet.

$A_4' \mp R_4 =$	2121.3741
$\pm R_4 =$	− 205.5248
$A_4' =$	1915.8493
$-D_5 =$	− 5
$A_4' - D_5 =$	1910.8493
$\log (A_4' - D_5) =$	3.281 226
$\log \beta_{0,4} =$	9.572 123
$\log (A_4' - D_5)\, \beta_{0,4} =$	2.853 349
$\beta_{4,6} =$	− 1.787 908
$-\delta_4 =$	2.364 552
$\delta_6 =$	0.626 644

$\log \delta_6 =$	9.797 021
$\log 1 : (1 - {}_D n) =$	0.212 129 *n*
$\log \varphi_6 =$	0.009 150 *n*
$\varphi_6 =$	− 1.021 292
$\beta_{0,4} =$	0.373 356
$\varphi_6 + \beta_{0,4} =$	− 0.647 936
$\log (\varphi_6 + \beta_{0,4}) =$	9.811 532 *n*
$\log 1 : (\varphi_6 + \beta_{0,4}) =$	0.188 468 *n*
$\log (A_4' - D_5)\, \beta_{0,4} =$	2.853 350
$\log R_6 =$	3.041 818 *n*
$R_6 =$	− 1101.077

Die weitere Durchrechnung der oben benützten drei Strahlen giebt:

$A_4' \mp R_4 =$	2121.3741	2218.1490	2127.1647
$\pm R_4 \mp R_6 - D_5 =$	890.5524	890.5524	890.5524
$A_4' \mp R_6 - D_5 =$	3011.9265	3108.7014	3017.7171
$\log (A_4' \mp R_6 - D_5) =$	3.478 844	3.492 579	3.479 679
$\log \sin \beta_{0,4} =$	9.572 123	9.550 667	8.191 128
$\log 1 : \pm R_6 =$	6.958 182 *n*	6.958 182 *n*	6.958 182 *n*
$\log \sin \varphi_6 =$	0.009 150 *n*	0.001 428 *n*	8.628 989 *n*
$\log n' =$	0.207 791	0.215 511	0.207 791
$\log \sin \varphi_6' =$	0.216 941 *n*	0.216 939 *n*	8.836 780 *n*
$\varphi_6 =$	− 1.021 292	− 1.003 293	− 2° 26′ 21″.0
$-\varphi_6' =$	1.647 938	1.647 930	3 56 15.8
$\delta_6 =$	0.626 646	0.644 637	1 29 54.8
$\beta_{0,4} =$	0.373 356	0.355 359	0 53 23.1
$\beta_{0,6} =$	1.000 002	0.999 996	2 23 17.9

$\log\sin\beta_{0,6} =$	0.000 001	9.999 998	8.619 839
$\log 1:\sin\beta_{0,6} =$	9.999 999	0.000 002	1.380 161
$\log\sin\varphi_6{}' =$	0.216 941 *n*	0.216 939 *n*	8.836 780 *n*
$\log\pm R_6 =$	3.041 818 *n*	3.041 818 *n*	3.041 818 *n*
$\log(A_6{}'\mp R_6) =$	3.258 758	3.258 759	3.258 759
$A_6{}'\mp R_6 =$	1814.5033	1814.5067	1814.5071
$\pm R_6 =$	1101.0772	1101.0772	1101.0772
$A_6{}' =$	713.4261	713.4295	713.4299
$\log H_0 =$	2.857 333	2.857 333	1.477 121
$\log 1:\sin\varphi_6{}' =$	9.999 999	0.000 002	1.380 161
$\log F_{0,6} =$	2.857 332	2.857 335	2.857 282
$F_{0,6} =$	719.999	720.003	719.917

Es bleibt jetzt noch übrig den violetten Randstrahl ebenfalls durchzurechnen und zwar für die ganze Linsencombination.

$\log H_0 =$	1.477 121
$\log 1:\pm R_0 =$	7.376 751
$\log\sin\varphi_0 =$	8.853 872
$\log 1:n =$	9.814 299
$\log\sin\varphi_0{}' =$	8.668 171
$\varphi_0 =$	4° 5′ 45″.8
$-\varphi_0{}' =$	−2 40 10.7
$\delta_0 =$	1 25 35.1
$\log\sin\delta_0 =$	8.396 079
$\log 1:\sin\delta_0 =$	1.603 921
$\log\sin\varphi_0{}' =$	8.668 171
$\log\pm R_0 =$	2.623 249
$\log(A_0{}'\mp R_0) =$	2.895 341
$(A_0{}'\mp R_0) =$	785.8529
$\pm R_0\mp R_2 - D_1 =$	612.3346
$A_0{}'\mp R_2 - D_1 =$	1398.1875
$\log(A_0{}'\mp R_2 - D_1) =$	3.145 565
$\log\sin\delta_0 =$	8.396 079
$\log 1:\pm R_2 =$	7.698 244 *n*
$\log\sin\varphi_2 =$	9.239 888 *n*
$\log n =$	0.185 701
$\log\sin\varphi_2{}' =$	9.425 589 *n*
$\varphi_2 =$	−10° 0′ 18″.3
$-\varphi_2{}' =$	15 27 7.8
$\delta_2 =$	5 26 49.5
$\delta_0 =$	1 25 35.1
$\beta_{0,2} =$	6 52 24.6
$\log\sin\beta_{0,2} =$	9.078 013
$\log 1:\sin\beta_{0,2} =$	0.921 987
$\log\sin\varphi_2{}' =$	9.425 589 *n*
$\log\pm R_2 =$	2.301 756 *n*
$\log(A_2{}'\mp R_2) =$	2.649 332

$A_2{}'\mp R_2 =$	445.9971
$\pm R_2\mp R_4 - D_3 =$	5.1802
$A_2{}'\mp R_4 - D_3 =$	451.1773
$\log(A_2{}'\mp R_4 - D_3) =$	2.654 347
$\log\sin\beta_{0,2} =$	9.078 013
$\log 1:\pm R_4 =$	7.687 136 *n*
$\log\sin\varphi_4 =$	9.419 496 *n*
$\log 1:n' =$	9.784 489
$\log\sin\varphi_4{}' =$	9.203 985 *n*
$\varphi_4 =$	−15° 13′ 53″.9
$-\varphi_4{}' =$	9 12 14.5
$\delta_4 =$	− 6 1 39.4
$\beta_{0,2} =$	6 52 24.6
$\beta_{0,4} =$	0 50 45.2
$\log\sin\beta_{0,4} =$	8.169 175
$\log 1:\sin\beta_{0,4} =$	1.830 825
$\log\sin\varphi_4{}' =$	9.203 985 *n*
$\log\pm R_4 =$	2.312 864 *n*
$\log(A_4{}'\mp R_4) =$	3.347 675
$A_4{}'\mp R_4 =$	2226.7662
$\pm R_4\mp R_6 - D_5 =$	890.5524
$A_4{}'\mp R_6 - D_5 =$	3117.3186
$\log(A_4{}'\mp R_6 - D_5) =$	3.493 781
$\log\sin\beta_{0,4} =$	8.169 175
$\log 1:\pm R_6 =$	6.958 182 *n*
$\log\sin\varphi_6 =$	8.621 138 *n*
$\log n' =$	0.215 511
$\log\sin\varphi_6{}' =$	8.836 649 *n*

$$\begin{array}{rl} \varphi_6 = & -2^0\ 23'\ 43''.6 \\ -\varphi_6' = & 3\ \ 56\ \ 11.5 \\ \hline \delta_6 = & 1\ \ 32\ \ 27.9 \\ \beta_{0,4} = & 0\ \ 50\ \ 45.2 \\ \hline \beta_{0,6} = & 2\ \ 23\ \ 13.1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \sin \beta_{0,6} = & 8.619\,598 \\ \log 1 : \sin \beta_{0,6} = & 1.380\,402 \\ \log \sin \varphi_6' = & 8.836\,649\,n \\ \log \pm R_6 = & 3.041\,818\,n \\ \hline \log (A_6' \mp R_6) = & 3.258\,869 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} A_6' \mp R_6 = & 1814.9686 \\ \pm R_6 = & 1101.0770 \\ \hline A_6' = & 713.8916 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log H_0 = & 1.477\,121 \\ \log 1 : \sin \beta_{0,6} = & 1.380\,402 \\ \hline \log F_{0,6} = & 2.857\,523 \end{array}$$

$$F_{0,6} = 720.316$$

Die durch Rechnung gewonnenen Resultate sind demnach folgende. Die Linsencombination hat für die Constanten die Werthe erhalten:

$$\begin{array}{rl} & \text{mm} \\ R_0 = & 420.00\ O.\ Z., \\ D_1 = & 8.0 \\ R_2 = & 200.33\ U.\ Z., \\ D_3 = & 0.01 \\ R_4 = & 205.52\ U.\ Z., \\ D_5 = & 5.0 \\ R_6 = & 1101.10\ U.\ Z. \end{array}$$

Die Vereinigungsweiten sind:

$$\begin{array}{rl} & \text{mm} \\ ({}_DA_6')_{Axe} = & 713.43, \\ ({}_VA_6')_{Axe} = & 713.43, \\ ({}_DA_6')_{Rand} = & 713.43, \\ ({}_VA_6')_{Rand} = & 713.89. \end{array}$$

Die Brennweiten:

$$\begin{array}{rl} & \text{mm} \\ ({}_DF_{0,6})_{Axe} = & 720.00, \\ ({}_VF_{0,6})_{Axe} = & 720.00, \\ ({}_DF_{0,6})_{Rand} = & 719.92, \\ ({}_VF_{0,6})_{Rand} = & 720.32. \end{array}$$

Ferner entnehmen wir aus der Rechnung die wichtigeren Winkel; nämlich: die totale Brechung der Linsencombination:

$$({}_D\beta_{0,6})_{Rand} = 2^0\ 23'\ 18'',$$

die Brechung der einzelnen Linsen:

$$\begin{array}{rl} \delta_0 + \delta_2 = & +\ 6^0\ 40'\ 18'' \\ \delta_4 + \delta_6 = & -\ 4\ \ 17\ \ \ 0 \end{array}$$

und sodann die Brechung an den einzelnen Flächen:

$$\begin{array}{rl} \delta_0 = & +\ 1^0\ 23'\ 57'' \\ \delta_2 = & +\ 5\ \ 16\ \ 21 \\ \delta_4 = & -\ 5\ \ 46\ \ 55 \\ \delta_6 = & +\ 1\ \ 29\ \ 55. \end{array}$$

Endlich können wir aus den Vereinigungs- und Brennweiten die Fehler im Bilde für die Linsencombination berechnen; es sind dieselben:

$$\begin{aligned}
({}_DA_6')_{Axe} &- ({}_VA_6')_{Axe} = \quad 0.00^{\text{mm}} \\
({}_DA_6')_{Axe} &- ({}_DA_6')_{Rand} = \quad 0.00 \\
({}_DF_{0,6})_{Axe} &- ({}_VF_{0,6})_{Axe} = \quad 0.00 \\
({}_DF_{0,6})_{Axe} &- ({}_DF_{0,6})_{Rand} = + 0.08 \\
({}_DA_6')_{Rand} &- ({}_VA_6')_{Rand} = - 0.46 \\
({}_DF_{0,6})_{Rand} &- ({}_VF_{0,6})_{Rand} = - 0.40.
\end{aligned}$$

Hierbei ist der erste Fehler der Farbenfehler, der zweite der Kugelgestaltfehler, der dritte der Farbenvergrösserungsfehler, der vierte der Fehler der Verzerrung, der fünfte der Fehler gegen die Gaussbedingung und der letzte der Farbenvergrösserungsfehler am Rande. (Vergl. S. 61—64.)

§ 4. Tabelle zweilinsiger achromatischer Objective mit gehobenem Kugelgestaltfehler.

In ganz gleicher Weise wie die eben als Beispiel durchgerechnete Linsencombination haben wir nun eine Reihe achromatischer Objective, für welche auch der Kugelgestaltfehler gehoben wurde, berechnet Wir wollen dadurch eine Tabelle von zweilinsigen Objectiven erhalten, welche darüber orientirt, wie die Werthe der übrigbleibenden Bildfehler bei den verschiedenen Formen der Objective sich gestalten, und haben wir zu diesem Zwecke die Objective zunächst in zwei Hauptgruppen getheilt, von denen die eine vorausstehende Crownglaslinse, die andere vorausstehende Flintglaslinse besitzt. Diese Hauptgruppen, die wir mit den Buchstaben A und B bezeichnen, wurden wieder jede in zwei Untergruppen, a und b, getheilt, von denen die eine die Reihenfolge der Brechungen in der Hinterlinse in umgekehrter Ordnung gegen die erste besitzt. Wir haben somit vier Einzelgruppen: A. a.; A. b.; B. a. und B. b. Die Fälle der einzelnen Gruppen sind geordnet nach den Brechungen an der ersten Linsenfläche, und sind angenommen in Distanzen von 2^0 zu 2^0, indem wir von dem oben als Beispiel gerechneten Objective ausgingen, dessen erster Radius 420.00^{mm} ist, und bei 30.0^{mm} Oeffnungsradius eine Ablenkung von $1^0\ 23'\ 57''$ an der ersten Fläche besitzt. Nun haben wir noch weitere sechs Objective, welche folgende Brechungen an der ersten Fläche haben: $+ 9^0\ 23'\ 57''$, $+ 7^0\ 23'\ 57''$, $+ 5^0\ 23'\ 57''$, $+ 3^0\ 23'\ 57''$, $- 0^0\ 36'\ 3''$ und $- 2^0\ 36'\ 3''$. In der Tabelle A. a ist angenommen, dass bei der Flintglaslinse zuerst die Brechung von der Axe, dann die zur Axe gewählt werde, während in der Tabelle A. b die Flintglaslinse die Brechung von der Axe an zweiter Stelle hat. In der Tabelle B. a ist angenommen, dass die Crownglaslinse die Hauptbrechung zur Axe und an zweiter Stelle nach Bedürfniss eine kleinere Brechung zur Axe oder eine solche von der Axe liefert. Hierbei sind die Fälle $\delta_0 = + 7^0\ 38'\ 40''$, $+ 5^0\ 38'\ 40''$, $+ 3^0\ 38'\ 40''$, $+ 1^0\ 38'\ 40''$ und $- 6^0\ 21'\ 20''$ gegeben, die Angaben für Objective mit $\delta_0 = - 0^0\ 21'\ 20''$, $- 2^0\ 21'\ 20''$ und $- 4^0\ 21'\ 20''$ mussten ausfallen, da für diese Fälle

der Kugelgestaltfehler nicht gehoben werden kann. Bei der Tabelle B, b endlich ist die starke Brechung der Crownglaslinse an zweiter Stelle. — Die Numerirung der Linsen in den einzelnen Tabellen ist nicht mit fortlaufenden Zahlen, sondern es sind verschiedene Zahlen ausgelassen, welche einigen später zu besprechenden speciellen Linsen zugetheilt werden sollen.

In der Tabelle A. a ist mit derjenigen Linse, Fall 1, begonnen, welche die stärkste Brechung, nämlich 9° 23′ 57″, an der ersten Fläche hat, und wird diese Brechung, wie schon erwähnt, bei den folgenden Linsen immer um 2° geringer, so dass im Falle 5. a die Brechung an beiden Flächen der Crownglaslinse nahe gleich wird. Da vom Falle 1. a gegen 5. a die Vertheilung der Brechungen in beide Flächen der Crownglaslinse immer gleichmässiger wird, muss der Kugelgestaltfehler dieser Linse immer kleiner werden. Dem entsprechend werden auch die Flintglaslinsen in der Vertheilung der Brechungen in die beiden Flächen immer gleichmässiger (anfänglich 9° 7′ 46″ an der ersten Fläche von der Axe und 3° 6′ 15″ an der zweiten Fläche zur Axe, zuletzt 4° 16′ 4″ und 0° 3′ 35″ beide Male von der Axe), was stets flacher werdende Linsen bedingt. Nach dem Falle 5. a werden die Brechungen an den beiden Flächen der Crownglaslinse wieder ungleicher, der Kugelgestaltfehler der Linse grösser und in Folge dessen auch die Vertheilung der Brechungen in die beiden Flächen der zugehörigen Flintglaslinse ungleicher, die Linsen werden krummer. Es haben somit vom Falle 5. a gegen links die Linsen immer ungleichere Vertheilung, indem die Brechung der ersten Fläche wächst, und nach rechts hin die Vertheilung ebenfalls ungleicher, aber die Zunahme trifft in die zweite Fläche, dem entsprechend werden von links nach rechts die Flintgläser bis Fall 5. a immer flacher und von da nach rechts wieder krummer. Die Vergleichung der Werthe der Brechungen δ_0, δ_2, δ_4 und δ_6 lässt im Zusammenhalte mit den Zeichnungen den Gang der Linsenform sicher erkennen. Bei sämmtlichen Objectiven dieser Tabelle ist die wahre Brennweite von 720^{mm} gehalten und der Kugelgestaltfehler gehoben. Hierbei ändern die Vereinigungsweiten (Entfernungen der Brennpunkte von der letzten Glasfläche aus) und zwar in dem Sinne, dass dieselben für den gelben Axenstrahl links und rechts von 5. a continuirlich wächst, bei Fall. 1. a ist die Vereinigungsweite um 49.50^{mm} kürzer als die wahre Brennweite, wird gegen rechts allmählich länger, so dass zwischen 11. a und 18. a ein Fall liegen muss, wo Vereinigungsweite und Brennweite gleich gross sind, während bei Fall 19. a die Vereinigungsweite um 16.26^{mm} grösser als die wahre Brennweite ist. Entsprechend den Aenderungen in der Vereinigungsweite zeigt sich eine Aenderung in der Gesammtablenkung des Randstrahles, und zwar wird die Gesammtablenkung von links nach rechts hin immer kleiner (von 2° 30′ 34″ bis 2° 22′ 34″), was darin seinen Grund hat, dass die Austrittshöhe von links gegen rechts abnimmt. Auch in der Vertheilung der Brechungen in die beiden Linsen sieht man Unterschiede, indem im Falle 1. a die Brechung sowohl der Crown- als der Flintglaslinse am stärksten ist, bis zum Falle 11. a abnimmt und von da an wieder steigt. Hinsichtlich der Bildfehler haben wir, wie schon früher erwähnt, verlangt, dass, soweit dieselben gehoben werden können, der Werth die Höhe von 0.05^{mm} nicht erreichen dürfe. Dabei ist immer erfüllt, dass der

A. Crown

a. Starke Brechung der Hinter-

$F_{0,6} = 720^{mm}$;

${}_D n = 1.518\,06$; ${}_V n = 1.533\,56$;

Bezeichnungen.	Fall 1. a.	Fall 2. a.	Fall 4. a.
R_0	67.282 *O. Z.*	83.159 *O. Z.*	111.50 *O. Z.*
D_1	8.0	8.0	8.0
R_2	153.02 *O. Z.*	244.88 *O. Z.*	764.18 *O. Z.*
D_3	6.685	4 44	2.121
R_4	114.88 *U. Z.*	164.62 *U. Z.*	285.95 *U. Z.*
D_5	5.0	5.0	5.0
R_6	300.33 *U. Z.*	783.79 *U. Z.*	1132.1 *O. Z.*
$({}_D A_6')_{Axe}$	670.50	681.54	692.02
$({}_V A_6')_{Axe}$	670.50	681.50	691.98
$({}_D A_6')_{Rand}$	670.46	681.54	692.03
$({}_V A_6')_{Rand}$	679.63	686.71	694 04
$({}_D F_{0,6})_{Axe}$	720.00	720 00	720.00
$({}_V F_{0,6})_{Axe}$	721.13	720.77	720.48
$({}_D F_{0,6})_{Rand}$	685.20	697.41	708.17
$({}_V F_{0,6})_{Rand}$	694.48	702.75	710.49
$({}_D \beta_{0,6})_{Rand}$	2° 30′ 34″	2° 27′ 55″	2° 25′ 40″
$\delta_0 + \delta_2$	+ 8 32 5	+ 7 39 11	+ 7 3 1
$\delta_4 + \delta_6$	− 6 1 31	− 5 11 16	− 4 37 21
δ_0	+ 9 23 57	+ 7 23 57	+ 5 23 57
δ_2	− 0 51 52	+ 0 15 14	+ 1 39 4
δ_4	− 9 7 46	− 6 56 37	− 4 58 53
δ_6	+ 3 6 15	+ 1 45 21	+ 0 21 32
$({}_D A_6')_{Axe} - ({}_V A_6')_{Axe}$	0.00	+ 0.04	+ 0.04
$({}_D A_6')_{Axe} - ({}_D A_6')_{Rand}$	+ 0.04	0.00	− 0.01
$({}_D F_{0,6})_{Axe} - ({}_V F_{0,6})_{Axe}$	− 1.13	− 0.77	− 0.48
$({}_D F_{0,6})_{Axe} - ({}_D F_{0,6})_{Rand}$	+ 34.80	+ 22.59	+ 11.83
$({}_D A_6')_{Rand} - ({}_V A_6')_{Rand}$	− 9.17	− 5.17	− 2.01

A. Fall 1. a. A. Fall 2. a. A. Fall 4. a.

voraus.

linse an der ersten Fläche.

$H_0 = 30^{mm}$;

${}_D n' = 1.613\,58$; ${}_V n' = 1.642\,52$.

Fall 5. a.	Fall 11. a.	Fall 18. a.	Fall 19. a.
174.39 *O. Z.*	420.00 *O. Z.*	976.63 *U. Z.*	226.92 *U. Z.*
8.0	8.0	0.8	8.0
572.36 *U. Z.*	200.33 *U. Z.*	119.15 *U. Z.*	83.956 *U. Z.*
0.39	0.01	0.0965	0.324
385.38 *U. Z.*	205.52 *U. Z.*	116.81 *U. Z.*	79.719 *U. Z.*
5.0	5.0	5.0	5.0
659.29 *O. Z.*	1101.1 *U. Z.*	218.72 *U. Z.*	120.51 *U. Z.*
702.52	713.43	724.95	736.26
702.52	713.43	724.96	736.26
702.53	713.43	724.95	736.27
703.21	713.89	726.14	739.07
720.00	720.00	720.00	720.00
720.26	720.00	719.74	719.48
716.07	719.92	722 07	723.65
716.90	720.32	722.85	725.74
2° 24′ 4″	2° 23′ 18″	2° 22′ 52″	2° 22′ 34″
+ 6 43 43	+ 6 40 18	+ 6 56 58	+ 7 40 57
— 4 19 39	— 4 17 0	— 4 34 6	— 5 18 23
+ 3 23 57	+ 1 23 57	— 0 36 3	— 2 36 3
+ 3 19 46	+ 5 16 21	+ 7 33 1	+ 10 17 0
— 4 16 4	— 5 46 55	— 8 30 59	— 11 55 25
— 0 3 35	+ 1 29 55	+ 3 56 53	+ 6 37 2
0.00	0.00	— 0.01	0.00
— 0.01	0.00	0.00	— 0.01
— 0.26	0.00	+ 0.26	+ 0.52
+ 3.93	+ 0.08	— 2.07	— 3.65
— 0.68	— 0.46	— 1.19	— 2.80
A. Fall 5. a.	A. Fall 11. a.	A. Fall 18. a.	A. Fall 19. a.

A. Crown

b. Starke Brechung der Hinter-

$F_{0,6} = 720^{mm}$;

$_{D}n = 1.518\,06$; $_{V}n = 1.533\,56$;

Bezeichnungen.	Fall 1.b.	Fall 2.b.	Fall 4.b.
R_0	67.282 *O. Z.*	83.159 *O. Z.*	111.50 *O. Z.*
D_1	8.0	8.0	8.0
R_2	172.36 *O. Z.*	286.95 *O. Z.*	1179.6 *O. Z.*
D_3	0.01	0.01	0.01
R_4	83.245 *O. Z.*	105.71 *O. Z.*	140.70 *O. Z.*
D_5	5.0	5.0	5.0
R_6	53.917 *O. Z.*	65.937 *O. Z.*	82.231 *O. Z.*
$(_{D}A_6')_{Axe}$	664.23	673.81	683.43
$(_{V}A_6')_{Axe}$	664.22	673.81	683.43
$(_{D}A_6')_{Rand}$	664.20	673.82	683.44
$(_{V}A_6')_{Rand}$	663.23	672.93	682.22
$(_{D}F_{0,6})_{Axe}$	720.00	720.00	720.00
$(_{V}F_{0,6})_{Axe}$	721.23	721.01	720.74
$(_{D}F_{0,6})_{Rand}$	723.22	722.87	724.24
$(_{V}F_{0,6})_{Rand}$	723.60	723.10	723.94
$(_{D}\beta_{0,6})_{Rand}$	2° 22′ 39″	2° 22′ 43″	2° 22′ 26″
$\delta_0 + \delta_2$	+ 9 10 34	+ 8 10 36	+ 7 27 28
$\delta_4 + \delta_6$	− 6 47 55	− 5 47 53	− 5 5 2
δ_0	+ 9 23 57	+ 7 23 57	+ 5 23 57
δ_2	− 0 13 23	+ 0 46 39	+ 2 3 31
δ_4	+ 4 17 17	+ 2 28 50	+ 1 43 38
δ_6	− 11 5 12	− 8 46 43	− 6 48 40
$(_{D}A_6')_{Axe} - (_{V}A_6')_{Axe}$	0.00	0.00	0.00
$(_{D}A_6')_{Axe} - (_{D}A_6')_{Rand}$	0.00	− 0.01	− 0.01
$(_{D}F_{0,6})_{Axe} - (_{V}F_{0,6})_{Axe}$	− 1.23	− 1.01	− 0.74
$(_{D}F_{0,6})_{Axe} - (_{D}F_{0,6})_{Rand}$	− 3.22	− 2.87	− 4.24
$(_{D}A_6')_{Rand} - (_{V}A_6')_{Rand}$	+ 0.97	+ 0.89	+ 1.22
	A. Fall 1.b.	A. Fall 2.b.	A. Fall 4.b.

voraus.

linse an der zweiten Fläche.

$H_0 = 30^{mm}$;

${}_D n' = 1.613\,58$; ${}_V n' = 1.642\,52$.

Fall 5.b.	Fall 11.b.	Fall 18.b.	Fall 19.b.
174.39 *O. Z.*	420.00 *O. Z.*	976.63 *U. Z.*	226.92 *U. Z.*
8.0	8.0	8.0	8.0
448.09 *U. Z.*	172.00 *U. Z.*	100.95 *U. Z.*	66.943 *U. Z.*
0.01	0.01	0.01	0.01
150.77 *O. Z.*	104.44 *O. Z.*	69.048 *O. Z.*	45.564 *O. Z.*
5.0	5.0	5.0	5.0
87.501 *O. Z.*	68.073 *O. Z.*	48.573 *O. Z.*	32.858 *O. Z.*
690.59	692.84	691.81	685.83
690.58	692.81	691.82	685.81
690.59	692.83	691.80	685.87
688.22	687.42	677.56	623.06
720.00	720.00	720.01	719.99
720.59	720.56	720.70	720.87
730.04	744.03	770.20	838.27
728.53	739.61	756.55	764.48
2° 21′ 19″	2° 18′ 39″	2° 13′ 52″	2° 3′ 3″
+ 7 10 11	+ 7 27 53	+ 8 34 11	+ 11 38 30
− 4 48 52	− 5 9 14	− 6 20 19	− 9 35 27
+ 3 23 57	+ 1 23 57	− 0 36 3	− 2 36 3
+ 3 46 14	+ 6 3 56	+ 9 10 14	+ 14 14 33
+ 1 31 45	+ 3 18 25	+ 6 3 45	+ 9 35 29
− 6 20 37	− 8 27 39	− 12 24 4	− 19 10 56
+ 0.01	+ 0.03	− 0.01	+ 0.02
0.00	+ 0.01	+ 0.01	− 0.04
− 0.59	− 0.56	− 0.69	− 0.88
− 10.04	− 24.03	− 50.19	− 118.27
+ 2.37	+ 5.41	+ 14.24	+ 62.81
A. Fall 5.b.	A. Fall 11.b.	A. Fall 18.b.	A. Fall 19.b.

Farbenfehler in der Axe und der Kugelgestaltfehler für die Farbe *D* gehoben ist, und ausserdem sind in der Tabelle noch drei Fehler constatirt, nämlich der Farbenfehler am Rande, wenn der in der Axe gleich Null ist (die sogenannte Gaussbedingung), und ferner die Lage der Hauptpunkte für die zwei Farben in der Axe und hinsichtlich der Farbe *D* für Axe und Rand. Der Farbenfehler am Rande ist in allen Fällen der Tafel A. a in dem Sinne, dass der stärker brechende Strahl eine längere Vereinigungsweite hat (also $_DA_6')_{Rand} - (_VA_6')_{Rand} = -$). Bei Fall 1. a ist dieser Fehler am grössten — 9.17^{mm}, nimmt ab bis zum Falle 11. a gegen — 0.46^{mm} und wächst dann wieder bis Fall 19. a, wo er — 2.80^{mm} wird. Die Fehler in den Hauptpunkten sind im Falle 1. a am grössten — 1.13^{mm}, beziehungsweise + 34.80^{mm}, nehmen bis 11. a hin ab, erreichen dort die Werthe 0^{mm}, beziehungsweise + 0.08^{mm} und wachsen von da wieder, indem beide das Zeichen wechseln bis + 0.52^{mm} und — 3.65^{mm}. Es sei hierbei erwähnt, dass ein Fehler in den Hauptpunkten für die beiden Farben ungleich grosse Bilder, und ein Fehler in den Hauptpunkten zwischen Axe und Rand verzerrte Bilder bedingt. Es sind dies somit die Bedingungen, mit deren Aufhebung bei Objectiven der farbige Rand und die Verzerrung verschwinden. Der Unterschied der Hauptpunkte für die beiden Farben am Rande ist nicht gebildet, da er im Wesentlichen dieselben Veränderungen ergiebt, wie die Vereinigungsweiten der beiden Farben am Rande.

Zu denselben Crownglaslinsen, welche bei den Objectiven der Tafel A. a. angewendet sind, wurden in Tafel A. b. ebenfalls Objective gerechnet, bei welchen aber die Reihenfolge der Brechungen der Flintglaslinsen gegen die bei der ersten Tafel angegebenen umgekehrt ist. Es zeigt sich dabei, dass sich zu jeder Crownglaslinse eine zweite Flintglaslinse berechnen lässt, welche die gleiche wahre Brennweite giebt und dabei Kugelgestalt- und Farbenfehler hebt, dass jedoch, damit der Farbenfehler gehoben wird, die Vertheilung der Brechung in die beiden Linsen eine andere wird, weshalb nur der erste Radius der Crownglaslinse gehalten werden kann, der zweite dagegen so geändert werden muss, dass die Farben bei gleicher wahrer Brennweite wieder richtig werden. Vergleichen wir die Halbmesser der Linsen, so sehen wir den Gang, dass von 1. b bis 5. b die Linse immer flacher und von da an nach rechts hin wieder krummer wird, was denselben Grund hat, den wir schon bei der ersten Tafel für die gleiche Aenderung hervorgehoben haben; es bedingt nämlich der erst abnehmende und dann wieder zunehmende Kugelgestaltfehler der Crownglaslinse diese Formänderung. Der Unterschied zwischen wahrer Brennweite und Vereinigungsweite nimmt ab von Fall 1. b bis Fall 11. b (von 55.77^{mm} bis 27.16^{mm}) und wächst von hier aus wieder (auf 34.16^{mm}) indem er aber nicht durch Null geht, sondern die Vereinigungsweite stets kleiner bleibt als die wahre Brennweite. Die Gesammtablenkung ist im ersten Falle 1. b die grösste (2° 22′ 39″) und nimmt ab durch die ganze Tafel (bis 2° 3′ 3″). Das scheinbare Wachsen in 2. b ist auf die Unsicherheit der Rechnung bei den grossen vorkommenden Winkeln zurückzuführen. Die Brechung der einzelnen Linsen ist wieder bei Fall 1. b eine sehr grosse, nimmt ab bis zu Fall 5. b, um nun nach rechts hin wieder zu wachsen. Was die Fehler gegen die Gaussbedingung anlangt,

so haben diese alle das entgegengesetzte Zeichen wie in der vorausgehenden Tabelle, sie nehmen von $+ 0.97^{mm}$ im Falle 1. b ab, erreichen bei Fall 2. b mit $+ 0.89^{mm}$ ein Minimum und wachsen dann wieder bis Fall 19. b auf $+ 62.81^{mm}$. Die Fehler in den Hauptpunkten der verschiedenen Farben liegen mit denen der vorausgehenden Tafel im gleichen Sinne, nehmen von links gegen rechts bis Fall 11. b (von 1.23^{mm} bis 0.56^{mm}) ab, und wachsen dann wieder bis Fall 19. b (nach 0.88^{mm}). Die Verzerrung hat bei 1. b das entgegengesetzte Zeichen wie bei 1. a und nimmt von dem Werthe 3.22^{mm} nach Fall 2. b hin bis 2.87^{mm} ab, um dann wieder bis 19. b ohne Zeichenwechsel auf 118.27^{mm} zuzunehmen. Hierbei sind, wie die angeführten Zahlen zeigen, die Grössen der Verzerrung in den ersten Fällen, also vor dem Minimum, viel kleiner, in den späteren Fällen viel grösser als bei der ersten Tabelle, und sind besonders die letzten Fälle durch sehr grosse Fehler ausgezeichnet, was darin seinen Grund hat, dass der Abstand der Linsen von der Mitte gegen den Rand viel stärker ändert.

Die Tabellen B. a. und B. b. enthalten diejenigen Objective, bei welchen die Flintglaslinse vorausgesetzt ist. Bei der Tabelle B. a. sind die Brechungen an der ersten Fläche wieder so gewählt, dass die Werthe von δ_0 in Distanzen von 2^0 sich folgen, so dass die Brechungen von 1. a $\delta_0 = + 7^0\,38'\,40''$ für 2. a gleich $5^0\,38'\,40''$, für 3. a gleich $+ 3^0\,38'\,40''$ und für 5. a gleich $1^0\,38'\,40''$ werden; $\delta_0 = - 0^0\,21'\,20''$, $- 2^0\,21'\,20''$ und $- 4^0\,21'\,20''$ fallen aus, da hierbei der Kugelgestaltfehler im Flintglase so klein wird, dass er den Fehler der gleichbrechenden Crownglaslinse nicht mehr heben kann, der letzte der gerechneten Fälle 11. a hat eine Brechung $- 6^0\,21'\,20''$. Die Hinterlinse der Objective hat die stärkere Brechung, die zur Axe erfolgt, vorausgehend, und die Brechung von der Axe oder die schwächere Brechung zur Axe an der zweiten Fläche. Hierbei werden die Flintglaslinsen Menisken mit negativen Brennweiten, wobei von Fall 1. a bis 5. a der erste Radius immer flacher convex und bei 11. a sogar concav wird. Die Crownglaslinse ist von Fall 1. a bis 3. a ein Meniskus mit positiver Brennweite, bei Fall 5. a und 11. a eine Biconvexlinse, die erste convexe Fläche erhält einen immer flacheren Radius. In der Gesammtbrechung zeigen die einzelnen Objective nur geringe Unterschiede, die Werthe erreichen zwischen Fall 5. a und 11. a ein Minimum, das von dem Falle 5. a sich nur um nahe 1′ unterscheidet. Was die Brechung der Einzellinsen anlangt, so ist zu bemerken, dass die negative Brechung der Flintglaslinse anfänglich den grössten Werth besitzt, dieser nun zwischen 5. a und 11. a ein Minimum wird, um dann wieder zu wachsen; auch die positive Brechung der Crownglaslinse nähert sich zwischen 5. a und 11. a einem Minimum und nimmt dann wieder zu. Dem entsprechend sind auch die Vereinigungsweiten weniger von den wahren Brennweiten verschieden. Bei Fall 1. a ist die Vereinigungsweite um 13.90^{mm} kürzer als die Brennweite, bleibt bis 5. a immer kürzer und wird dann grösser als die Brennweite in Fall 11. a um 12.10^{mm}. Die Fehler in der Erfüllung der Gaussbedingung sind zuerst so, dass der violette Randstrahl eine längere Brennweite hat (3.20^{mm}); allmählich wird er kleiner, im Falle 5. a noch 0.36^{mm}, und erlangt im Falle 11. a ein entgegengesetztes Zeichen und den wieder grösseren Werth 2.85^{mm}. Auch

B. Flint

a. Starke Brechung der Hinter-

$F_{0,6} = 720.0^{mm}$;

${}_Dn = 1.518.06$; ${}_Vn = 1.533\,56$;

Bezeichnungen.	Fall 1.a.	Fall 2.a.
R_0	88.961 *O. Z.*	118.37 *O. Z.*
D_1	5.0	5.0
R_2	62.120 *O. Z.*	77.564 *O. Z.*
D_3	0.35	0.2
R_4	64.809 *O. Z.*	79.915 *O. Z.*
D_5	8.0	8.0
R_6	134.42 *O. Z.*	208.82 *O. Z.*
$({}_DA_6')_{Axe}$	686.10	694.46
$({}_VA_6')_{Axe}$	686.10	694.48
$({}_DA_6')_{Rand}$	686.12	694.51
$({}_VA_6')_{Rand}$	689.32	696.38
$({}_DF_{0,6})_{Axe}$	720.00	720.00
$({}_VF_{0,6})_{Axe}$	720.64	720.47
$({}_DF_{0,6})_{Rand}$	716.23	717.34
$({}_VF_{0,6})_{Rand}$	720.31	719.82
$({}_D\beta_{0,6})_{Rand}$	2° 24′ 2″	2° 23′ 49″
$\delta_0 + \delta_2$	— 6 3 15	— 5 10 49
$\delta_4 + \delta_6$	+ 8 27 17	+ 7 34 38
δ_0	+ 7 38 41	+ 5 38 40
δ_2	—13 41 56	—10 49 29
δ_4	+11 51 5	+ 9 29 8
δ_6	— 3 23 48	— 1 54 30
$({}_DA_6')_{Axe} - ({}_VA_6')_{Axe}$	0.00	— 0.02
$({}_DA_6')_{Axe} - ({}_DA_6')_{Rand}$	— 0.02	— 0.05
$({}_DF_{0,6})_{Axe} - ({}_VF_{0,6})_{Axe}$	— 0.64	— 0.47
$({}_DF_{0,6})_{Axe} - ({}_DF_{0,6})_{Rand}$	+ 3.77	+ 2.66
$({}_DA_6')_{Rand} - ({}_VA_6')_{Rand}$	— 3.20	— 1.87
	B. Fall 1.a.	B. Fall 2.a.

voraus.

linse an der ersten Fläche.

$H_0 = 30.0^{mm}$;

$_Dn' = 1.613\,58$; $_Vn' = 1.642\,52$.

Fall 3. a.	Fall 4. a.	Fall 5. a.	Fall 11. a.
181.02 *O. Z.*	308.20 *O. Z.*	398.25 *O. Z.*	105.73 *U. Z.*
5.0	5.0	5.0	5.0
103.55 *O. Z.*	138.18 *O. Z.*	154.57 *O. Z.*	193.78 *U. Z.*
0.04	0.01	0.01	0.01
104.11 *O. Z.*	136.13 *O. Z.*	152.38 *O. Z.*	187.84 *O. Z.*
8.0	8.0	8.0	8.0
476.39 *O. Z.*	17654.1 *U. Z.*	1235.7 *U. Z.*	453.67 *U. Z.*
703.21	710.42	712.88	732.10
703.19	710.41	712.86	732.07
703.22	710.43	712.91	732.06
704.10	710.87	713.27	729.21
720.00	720.00	720.00	720.00
720.22	720 07	720.00	719.47
718.66	720.00	720.63	706.47
719.90	720.58	721 06	702.75
2° 23′ 33″	2° 23′ 17″	2° 23′ 9″	2° 26′ 2″
— 4 36 5	— 4 20 41	— 4 17 1	— 4 38 50
+ 6 59 38	+ 6 43 58	+ 6 40 10	+ 7 4 52
+ 3 38 40	+ 2 7 39	+ 1 38 40	— 6 21 21
— 8 14 45	— 6 28 20	— 5 55 41	+ 1 42 31
+ 7 22 57	+ 5 53 5	+ 5 23 2	+ 4 54 5
— 0 23 19	+ 0 50 53	+ 1 17 8	+ 2 10 47
+ 0.02	+ 0.01	+ 0.02	+ 0.03
— 0.01	— 0.01	— 0 03	+ 0.04
— 0.22	— 0.07	0.00	+ 0.53
+ 1.34	0.00	— 0.63	+ 13.53
— 0.88	— 0.44	— 0.36	+ 2.85
B. Fall 3. a.	B. Fall 4. a.	B. Fall 5. a.	B. Fall 11. a.

B. Flint

b. Starke Brechung der Hinter-

$F_{0,6} = 720^{mm}$;

$_{D}n = 1.518\,06$; $_{V}n = 1.533\,56$;

Bezeichnungen.	Fall 1. b.	Fall 2. b.
R_0	88.961 *O. Z.*	118.37 *O. Z.*
D_1	5.0	5.0
R_2	54.143 *O. Z.*	71.193 *O. Z.*
D_3	13.93	9.85
R_4	77.827 *U. Z.*	122.96 *U. Z.*
D_5	8.0	8.0
R_6	45.457 *U. Z.*	61.025 *U. Z.*
$({}_DA_6')_{Axe}$	788.77	760.57
$({}_VA_6')_{Axe}$	788.73	760.57
$({}_DA_6')_{Rand}$	788.77	760.55
$({}_VA_6')_{Rand}$	854.81	781.71
$({}_DF_{0,6})_{Axe}$	720.00	720.00
$({}_VF_{0,6})_{Axe}$	717.61	718.57
$({}_DF_{0,6})_{Rand}$	811.98	772.32
$({}_VF_{0,6})_{Rand}$	879.15	793.62
$({}_D\beta_{0,6})_{Rand}$	2° 7′ 23″	2° 13′ 34″
$\delta_0 + \delta_2$	− 9 58 37	− 6 45 9
$\delta_2 + \delta_4$	+ 12 5 40	+ 8 58 43
δ_0	+ 7 38 41	+ 5 38 40
δ_2	− 17 37 18	− 12 23 49
δ_4	− 4 4 2	− 2 24 5
δ_6	+ 16 9 42	+ 11 22 48
$({}_DA_6')_{Axe} - ({}_VA_6')_{Axe}$	+ 0.04	0.00
$({}_DA_6')_{Axe} - ({}_DA_6')_{Rand}$	0.00	+ 0.02
$({}_DF_{0,6})_{Axe} - ({}_VF_{0,6})_{Axe}$	+ 2.39	+ 1.43
$({}_DF_{0,6})_{Axe} - ({}_DF_{0,6})_{Rand}$	− 91.98	− 52.32
$({}_DA_6')_{Rand} - ({}_VA_6')_{Rand}$	− 66.04	− 21.16
	B. Fall 1. b.	B. Fall 2. b.

voraus.

linse an der zweiten Fläche.

$H_0 = 30^{mm}$.

${}_D n' = 1.613\,58$; ${}_V n' = 1.642\,52$.

Fall 3. b.	Fall 5. b.	Fall 11. b.
181.02 *O. Z.*	398.25 *O. Z.*	105.73 *U. Z.*
5.0	5.0	5.0
97.299 *O. Z.*	147.75 *O. Z.*	198.29 *U. Z.*
6.57	3.53	0.01
223.59 *U. Z.*	964.33 *U. Z.*	694.21 *O. Z.*
8.0	8 0	8.0
81.592 *U. Z.*	116.99 *U. Z.*	143.39 *U. Z.*
745.61	735.03	741.83
745.59	735 05	741.87
745.60	735.00	741.83
754.67	738.82	741.03
720.01	720.00	720.00
719.05	719.42	719.36
751.80	737.29	717.09
760.85	740.92	715.42
2° 17′ 13″	2° 19′ 55″	2° 23′ 52″
− 5 21 24	− 4 37 20	− 4 46 32
+ 7 38 37	+ 6 57 15	+ 7 10 24
+ 3 38 40	+ 1 38 40	− 6 21 21
− 9 0 4	− 6 16 0	+ 1 34 49
− 0 45 50	− 0 58 24	+ 2 0 4
+ 8 24 27	+ 5 58 51	+ 5 10 20
+ 0.02	− 0.02	− 0.04
+ 0.01	0.00	0.00
+ 0.96	+ 0.58	+ 0.64
− 31.79	− 17.29	+ 2 91
− 9.07	− 3.79	+ 0.80
B. Fall 3. b.	B. Fall 5. b.	B. Fall 11. b.

der Farbenvergrösserungsfehler geht gleichfalls und zwar im Falle 5.a durch Null, um in 1.a und 11.a die Werthe — 0.64^{mm} beziehungsweise + 0.53^{mm} zu erreichen. Zwischen 3.a und 5.a geht der Fehler der Verzerrung durch Null und wechselt zwischen 5.a und 11.a nochmals sein Vorzeichen. Von den in dieser Tabelle gerechneten Objectiven hat 5.a die geringsten Fehler; der grösste ist der der Verzerrung, welcher jedoch ebenfalls nur auf 0.63^{mm} sich beläuft.

In der Tabelle B. b. ist der erste Radius wieder gleich angenommen wie in der vorausgehenden Tabelle B. a, während die Brechungen in der Crownglaslinse umgekehrt sind. Hierbei ist das Objectiv aus gegen einander stehenden Menisken gebildet, nur im letzten Falle 11. b wird die Crownglaslinse biconvex. Zwischen den Fällen 5. b und 11. b in der Nähe des letzteren muss sich ein Fall befinden, bei dem alle Fehler klein sind. Die gegeneinander gekehrten Menisken zeigen sehr grosse Fehler in Verzerrung wie hinsichtlich der Gaussbedingung, und wechseln zwischen 5. b und 11. b ihr Zeichen, während die Fehler in der Farbenvergrösserung alle in demselben Sinne liegen und nicht sehr gross sind; sie nehmen anfänglich ab, erreichen zwischen 5. b und 11. b ein Minimum und nehmen dann wieder zu.

§ 5. Specielle Fälle von zweilinsigen Objectiven mit gehobenem Kugelgestaltfehler.

Ausser den in den vier Tabellen angegebenen Objectiven sind noch eine Reihe von Einzelfällen gerechnet, welche specielle Bedingungen erfüllen, sie sind in der Weise in zwei Tabellen geordnet, dass sich sofort bei jedem Einzelfalle ersehen lässt, an welcher Stelle derselbe in den früheren Tabellen einzuschalten ist. In die Tabelle A. a. sind eingereiht folgende Fälle:

Der erste Einzelfall 3. a ist so gerechnet, dass die letzte Fläche des Objectivs plan und dabei der erste Radius R_0 krummer als R_2 wird. Die Fehler der Verzerrung und hinsichtlich der Gaussbedingung sind beträchtlich, nämlich + 16.31^{mm} beziehungsweise — 3.44^{mm}. Eine ganze Reihe von Einzelfällen (6. a bis 10. a) fallen zwischen die in der Tabelle A. a enthaltenen Fälle 5. a und 11. a; die Bedingungen, welchen die Einzelfälle entsprechen, sind folgende. Bei 6. a ist der letzte Radius aus dem Brennpunkte gezogen; auch bei diesem ist noch eine ziemlich bedeutende Verzerrung. Dann folgt 7. a ein verkittetes Objectiv, für welches der erste Radius R_0 krummer als R_2 ist. Die Fehler sind für dieses Objectiv alle kleiner als für das vorausgehende. Noch kleiner werden die Fehler im Falle 8. a. Die Crownglaslinse dieses Objectives ist gleichseitig. An dieser Stelle ist noch ein weiterer Einzelfall 8. a* eingeschaltet, bei welchem ein Abstand von 10^{mm} eingeführt ist, um zu sehen, wie die Bedingungen der Farbenvergrösserung und Verzerrung sich ändern, während die Gaussbedingung verbessert wird. Aus diesem Falle zeigt sich nun, dass durch diese Aenderung der Fehler in der Gaussbedingung von — 0.31^{mm} auf — 0.17^{mm} bessert, während der Farbenvergrösserungsfehler von — 0.07 auf — 0.98 schlechter wird, und die Verzerrung von + 1.28^{mm} auf + 0.67^{mm} geht, also kleiner wird. Wir müssten somit,

um die Gaussbedingung zu heben, noch etwa um ebensoviel im Abstande der Linsen gehen, wobei der Farbenvergrösserungsfehler ungefähr — 2.0^{mm}, der Verzerrungsfehler auf ungefähr Null gehen würde; es würde somit ein Objectiv erhalten, das schlecht in Farbenvergrösserung, jedoch in Verzerrung und Gaussbedingung gut wäre. Es ist somit diese Construction, nach welcher die grossen englischen und amerikanischen Objective gemacht sind, nicht zu empfehlen, da es verschiedene bessere Formen giebt. Der Fall 9. a hat die letzte Fläche plan, aber diesmal ist R_2 krummer als R_0, während es bei Fall 3. a umgekehrt war. Der Fehler in der Gaussbedingung ist gegenüber 8. a etwas grösser, die anderen Fehler etwas kleiner geworden. Fall 10. a erfüllt ebenfalls die Gaussbedingung, und zwar durch Auseinandergehen mit den Linsen, es tritt aber dadurch ein grösserer Fehler in Verzerrung und Farbenvergrösserung auf als bei 9. a. Zwischen die in der Tabelle A. a. enthaltenen Objective 11. a und 18. a sind wieder sechs Specialfälle gerechnet. Fall 12. a, bei welchem ausser Farben- und Kugelgestaltfehler auch Farbenvergrösserung und Verzerrungsfehler vollständig gehoben ist, bleibt nur noch ein kleiner Fehler in Beziehung auf die Gaussbedingung; es ist dieses Objectiv das beste der unter A. a. gerechneten, wenn ausgedehnte Bilder gefordert sind. Fall 13. a hat die Hauptpunkte in einer Ebene liegend, nicht wie im vorausgehenden Falle auf einer Sphäre, die aus dem Brennpunkte beschrieben ist. Im Falle 14.a ist der Kugelgestaltfehler in beiden Richtungen gehoben. Bei all den zuletzt erwähnten Fällen ist im Vergleich gegen den als bestes Objectiv bezeichneten Fall 12.a ein Wachsen des Fehlers in Farbenvergrösserung, Verzerrung und hinsichtlich der Gaussbedingung ersichtlich. Das nächste Objectiv 15.a ist so gerechnet, dass die Vereinigungsweiten gleich der wahren Brennweite werden; die Bildfehler werden grösser als bei 14.a. Ein zweites verkittetes Objectiv ist unter 16.a angegeben, für dieses wird der erste Radius R_0 flacher als R_2, während bei Fall 7. a es umgekehrt war. Dieses zweite verkittete Objectiv hat sowohl in Farbenvergrösserung als auch in Verzerrung und bezüglich der Gaussbedingung grössere Fehler als 7.a. Endlich ist bei Fall 17.a die erste Fläche plan angenommen und wachsen hierbei, wie auch schon im vorausgehenden Falle, alle Fehler gegenüber denen im Falle 15.a.

Zu Tafel A.b. ist nur ein specieller Fall gerechnet, indem durch Verminderung der Dicke der Flintglaslinse anschliessend an Fall 2. b die Gaussbedingung gehoben wurde, diese Linse ist unter 2. b* aufgeführt. Hierbei wird das Objectiv auch bedeutend besser in Farbenvergrösserung und Verzerrung: — 0.57^{mm} und — 1.07^{mm} gegen — 1.01^{mm} und — 2.87^{mm}. Die Form dieses Objectives ist übereinstimmend mit dem gewöhnlich als Gaussobjectiv bezeichneten; bei einem praktisch auszuführenden Falle müssten die Dicken der Flint- und Crownglaslinse etwas anders vertheilt werden, um die Dicke der Flintglaslinse in der Mitte etwas bedeutender zu erhalten.

Zu Tafel B.a. und zwar zwischen 5.a und 11.a sind folgende Einzelfälle gerechnet worden. Bei 6.a ist der Kugelgestaltfehler in beiden Richtungen gehoben; vergleicht man diesen Fall mit A. 14.a, in welchem die Crownglaslinse vorausgeht, so ersieht man, dass in dem Falle mit

A. Crown voraus,

a. Starke Brechung der Hinter-

$F_{0,6} = 720^{mm}$; $H_0 = 30^{mm}$; ${}_Dn = 1.518\,06$;

Bezeichnungen.	Fall 3.a.	Fall 6.a.	Fall 7.a.
R_0	96.822 *O. Z.*	183.33 *O. Z.*	266.92 *O. Z.*
D_1	8.0	8.0	8.0
R_2	392.49 *O. Z.*	495.82 *U. Z.*	273.91 *U. Z.*
D_3	3.13	0.30	0.0
R_4	219.65 *U. Z.*	374.04 *U. Z.*	273.91 *U. Z.*
D_5	5.0	5.0	5.0
R_6	∞	703.45 *O. Z.*	2920.7 *O. Z.*
$({}_DA_6')_{Axe}$	687.43	703.45	709.07
$({}_VA_6')_{Axe}$	687.42	703.45	709.07
$({}_DA_6')_{Rand}$	687.44	703.45	709.10
$({}_VA_6')_{Rand}$	690.88	704.05	709.50
$({}_DF_{0,6})_{Axe}$	720.00	720.00	720.00
$({}_VF_{0,6})_{Axe}$	720.63	720.24	720.10
$({}_DF_{0,6})_{Rand}$	703.69	716.52	718.72
$({}_VF_{0,6})_{Rand}$	707.32	717.02	719.15
$({}_D\beta_{0,6})_{Rand}$	2° 26′ 36″	2° 23′ 59″	2° 23′ 32″
$\delta_0 + \delta_2$	+ 7 17 19	+ 6 42 54	+ 6 39 3
$\delta_4 + \delta_6$	− 4 50 43	− 4 18 55	− 4 15 31
δ_0	+ 6 16 22	+ 3 13 48	+ 2 12 27
δ_2	+ 1 0 57	+ 3 29 6	+ 4 26 37
δ_4	− 5 46 28	− 4 18 55	− 4 56 51
δ_6	+ 0 55 46	0 0 0	+ 0 41 20
$({}_DA_6')_{Axe} - ({}_VA_6')_{Axe}$	+ 0.01	0.00	0.00
$({}_DA_6')_{Axe} - ({}_DA_6')_{Rand}$	− 0.01	0.00	− 0.03
$({}_DF_{0,6})_{Axe} - ({}_VF_{0,6})_{Axe}$	− 0.63	− 0.24	− 0.10
$({}_DF_{0,6})_{Axe} - ({}_DF_{0,6})_{Rand}$	+ 16.31	+ 3.48	+ 1.28
$({}_DA_6')_{Rand} - ({}_VA_6')_{Rand}$	− 3.44	− 0.60	− 0.40
	A. Fall 3.a.	A Fall 6.a.	A. Fall 7.a.
	Letzte Fläche plan, R_0 krummer als R_2.	Letzter Radius aus dem Brennpunkte gezogen.	Verkittetes Objectiv, R_0 krummer als R_2.

Einzelfälle.

linse an der ersten Fläche.

${}_{V}n = 1.533\,56$; ${}_{D}n' = 1.613\,58$; ${}_{V}n' = 1.642\,52$.

Fall 8.a.	Fall 8 a*.	Fall 9.a.	Fall 10.a.
270.64 *O. Z.*	270.64 *O. Z.*	298.93 *O. Z.*	364.65 *O. Z.*
8.0	8.0	8.0	8.0
270.64 *U. Z.*	231.64 *U. Z.*	247.47 *U. Z.*	174.27 *U. Z.*
0.01	10.0	0.01	15.34
271.51 *U. Z.*	218.19 *U. Z.*	251.38 *U. Z.*	159.22 *U. Z.*
5.0	5.0	5.0	5.0
3297.4 *O. Z.*	8075.9 *O. Z.*	∞	696.41 *U. Z.*
709.20	679.75	710.30	664.54
709.17	679.71	710.29	664.55
709.20	679.75	710.31	664.56
709.51	679.92	710.71	664.56
720.00	720.00	720.00	720.00
720.07	720.98	720.06	721.59
718.72	719.33	719.10	721.34
719.09	720.56	719.50	722.98
2° 23′ 32″	2° 23′ 25″	2° 23′ 28″	2° 23′ 1″
+ 6 38 43	+ 7 13 44	+ 6 38 58	+ 7 43 17
— 4 15 11	— 4 50 19	— 4 15 30	— 5 20 16
+ 2 10 37	+ 2 10 37	+ 1 58 9	+ 1 36 45
+ 4 28 6	+ 5 3 7	+ 4 40 49	+ 6 6 32
— 4 58 2	— 5 40 16	— 5 10 5	— 6 52 3
+ 0 42 51	+ 0 49 57	+ 0 54 35	+ 1 31 47
+ 0.03	+ 0.04	— 0.01	— 0.01
0.00	0.00	+ 0.01	— 0.02
— 0.07	— 0.98	— 0.06	— 1.59
+ 1.28	+ 0.67	+ 0.90	— 1.34
— 0.31	— 0.17	— 0.40	0.00
A. Fall 8.a.	A. Fall 8.a.*	A. Fall 9.a.	A. Fall 10.a.
Gleichseitige Crownglaslinse.	Construction der grossen amerikanischen und englischen Objective.	Letzte Fläche plan, R_2 ist krummer als R_0.	Gaussbedingung erfüllt.

A. Crown voraus,

a. Starke Brechung der Hinter-

$F_{0,6} = 720^{mm}$; $H_0 = 30^{mm}$; $_D n = 1.518\,06$;

Bezeichnungen	Fall 12.a.	Fall 13.a.	Fall 14.a.
R_0	441.45 *O. Z.*	708.76 *O. Z.*	919.62 *O. Z.*
D_1	8.0	8.0	8.0
R_2	196.12 *U. Z.*	168.25 *U. Z.*	159.52 *U. Z.*
D_3	0.01	0.01	0.01
R_4	201.12 *U. Z.*	171.13 *U. Z.*	161.47 *U. Z.*
D_5	5.0	5.0	5.0
R_6	977.97 *U. Z.*	525.54 *U. Z.*	444.56 *U. Z.*
$({}_DA_6')_{Axe}$	713.81	716.69	717.81
$({}_VA_6')_{Axe}$	713.81	716.69	717.83
$({}_DA_6')_{Rand}$	713.81	716.67	717.81
$({}_VA_6')_{Rand}$	714.26	717.23	718.49
$({}_DF_{0,6})_{Axe}$	720.00	720.00	720.00
$({}_VF_{0,6})_{Axe}$	719.99	719.93	719.93
$({}_DF_{0,6})_{Rand}$	720.01	720.60	720.83
$({}_VF_{0,6})_{Rand}$	720.39	721.03	721.32
$({}_D\beta_{0,6})_{Rand}$	$2^0\ 23'\ 17''$	$2^0\ 23'\ 10''$	$2^0\ 23'\ 7''$
$\delta_0 + \delta_2$	+ 6 40 8	+ 6 42 29	+ 6 43 55
$\delta_4 + \delta_6$	— 4 16 51	— 4 19 19	— 4 20 48
δ_0	+ 1 19 51	+ 0 49 41	+ 0 38 17
δ_2	+ 5 20 17	+ 5 52 48	+ 6 5 38
δ_4	— 5 51 14	— 6 28 22	— 6 43 37
δ_6	+ 1 34 23	+ 2 9 3	+ 2 22 49
$({}_DA_6')_{Axe} - ({}_VA_6')_{Axe}$	0.00	0.00	— 0.02
$({}_DA_6')_{Axe} - ({}_DA_6')_{Rand}$	0.00	+ 0.02	0.00
$({}_DF_{0,6})_{Axe} - ({}_VF_{0,6})_{Axe}$	+ 0.01	+ 0.07	+ 0.07
$({}_DF_{0,6})_{Axe} - ({}_DF_{0,6})_{Rand}$	— 0.01	— 0.60	— 0.83
$({}_DA_6')_{Rand} - ({}_VA_6')_{Rand}$	— 0.45	— 0.56	— 0.68
	A. Fall 12.a.	A. Fall 13.a.	A. Fall 14.a.
	Verzerrung gehoben.	Hauptpunkte in einer Ebene.	Kugelgestaltfehler in beiden Richtungen gehoben.

Einzelfälle.

linse an der ersten Fläche. $_V n = 1.533\,56$; $_D n' = 1.613\,58$; $_V n' = 1.642\,52$.			b. Starke Brechung der Hinterlinse an der zweiten Fläche.
Fall 15. a.	**Fall 16. a.**	**Fall 17. a.**	**Fall 2. b.***
2192.0 *O. Z.*	3519.9 *O. Z.*	∞	83.159 *O. Z.*
8.0	8.0	8.0	8.0
145.11 *U. Z.*	141.36 *U. Z.*	136.00 *U. Z.*	234.218 *O. Z.*
0.01	0.0	0.0459	0.01
145.46 *U. Z.*	141.36 *U. Z.*	135.35 *U. Z.*	100.096 *O. Z.*
5.0	5.0	5.0	0.5
340.94 *U. Z.*	320.37 *U. Z.*	291.11 *U. Z.*	68.540 *O. Z.*
719.99	720.62	721.49	694.10
719.98	720.66	721.49	694.14
720.00	720.62	721.48	694.11
720.77	721.52	722.37	694.12
720.00	720.00	720.00	720.00
719.84	719.88	719.81	720.57
721.22	721.31	721.50	721.07
721.76	721.94	722.12	721.81
2° 23′ 2″	2° 23′ 1″	2° 22′ 59″	2° 23′ 4″
+ 6 46 26	+ 6 48 8	+ 6 49 15	+ 7 29 26
− 4 23 14	− 4 25 7	− 4 26 16	− 5 6 22
+ 0 16 3	+ 0 10 0	0 0 0	+ 7 23 57
+ 6 30 23	+ 6 38 8	+ 6 49 15	+ 0 5 29
− 7 13 34	− 7 22 52	− 7 36 40	+ 3 35 58
+ 2 50 10	+ 2 57 45	+ 3 10 24	− 8 42 20
+ 0.01	− 0.04	0.00	− 0.04
− 0.01	0.00	+ 0.01	− 0.01
+ 0.16	+ 0.12	+ 0.19	− 0.57
− 1.22	− 1.31	− 1.50	− 1.07
− 0.77	− 0.88	− 0.89	− 0.01
A. Fall 15. a.	A. Fall 16. a.	A. Fall 17. a.	A. Fall 2. b.*
Vereinigungsweite gleich wahrer Brennweite.	Verkittetes Objectiv. R_0 flacher als R_2.	Erste Fläche plan.	Gaussbedingung gehoben.

B. Flint voraus,

a. Starke Brechung der Hinter-

$F_{0,6} = 720^{mm}$; $H_0 = 30^{mm}$ $_Dn = 1.518\,06$;

Bezeichnungen.	Fall 6.a.*	Fall 6.a.
R_0	444.56 *O. Z.*	444.56 *O. Z.*
D_1	5.0	5.0
R_2	149.04 *O. Z.*	161.48 *O. Z.*
D_3	15.0	0.01
R_4	156.52 *O. Z.*	159.52 *O. Z.*
D_5	8.0	8.0
R_6	790.02 *U. Z.*	919.62 *U. Z.*
$({}_DA_6')_{Axe}$	743.59	718.79
$({}_VA_6')_{Axe}$	743.61	713.72
$({}_DA_6')_{Rand}$	743.63	713.76
$({}_VA_6')_{Rand}$	743.67	714.06
$({}_DF_{0,6})_{Axe}$	720.00	720.00
$({}_VF_{0,6})_{Axe}$	718.68	719.92
$({}_DF_{0,6})_{Rand}$	719.91	720.81
$({}_VF_{0,6})_{Rand}$	718.58	721.17
$({}_D\beta_{0,6})_{Rand}$	2° 23′ 18″	2° 23′ 7″
$\delta_0 + \delta_2$	— 4 50 41	— 4 15 34
$\delta_4 + \delta_6$	+ 7 13 59	+ 6 38 41
δ_0	+ 1 28 21	+ 1 28 21
δ_2	— 6 19 2	— 5 43 55
δ_4	+ 5 38 51	+ 5 11 48
δ_6	+ 1 35 8	+ 1 26 53
$({}_DA_6')_{Axe} - ({}_VA_6')_{Axe}$	— 0.02	+ 0.07
$({}_DA_6')_{Axe} - ({}_DA_6')_{Rand}$	— 0.04	+ 0.03
$({}_DF_{0,6})_{Axe} - ({}_VF_{0,6})_{Axe}$	+ 1.32	+ 0.08
$({}_DF_{0,6})_{Axe} - ({}_DF_{0,6})_{Rand}$	+ 0.09	— 0.81
$({}_DA_6')_{Rand} - ({}_VA_6')_{Rand}$	— 0.05	— 0.30
	B. Fall 6.a.*	B. Fall 6.a.
	Gaussbedingung gehoben.	Kugelgestalt in beiden Richtungen gehoben.

Einzelfälle.

linse an der ersten Fläche.

${}_{V}n = 1.533\,56$; ${}_{D}n' = 1.613\,58$; ${}_{V}n' = 1.642\,52$.

Fall 7. a	Fall 8. a.	Fall 9. a.	Fall 10. a.
575.24 *O. Z.*	1821.1 *O. Z.*	2287.7 *O. Z.*	119.82 *U. Z.*
5.0	5.0	5.0	5.0
175.95 *O. Z.*	222.08 *O. Z.*	226.95 *O. Z.*	243.91 *U. Z.*
0.0	0.3786	0.5834	0.01
175.95 *O. Z.*	272.15 *O. Z.*	318.43 *O. Z.*	317.42 *O. Z.*
8.0	8.0	8.0	8.0
596.44 *U. Z.*	272.15 *U. Z.*	237.26 *U. Z.*	230.28 *U. Z.*
715.63	721.88	723.48	734.89
715.64	721.89	723.48	734.90
715.64	721.88	723.48	734.85
716.02	722.52	724.26	733.28
720.00	720.00	720.00	720.00
719.96	719.80	719.76	719.47
721.41	723.98	724.98	713.12
721.80	724.55	725.63	710.77
2° 23′ 0″	2° 22′ 30″	2° 22′ 18″	2° 24′ 40″
— 4 14 53	— 4 13 54	— 4 14 47	— 4 33 36
+ 6 37 53	+ 6 36 24	+ 6 37 5	+ 6 58 16
+ 1 8 14	+ 0 21 32	+ 0 17 9	— 5 34 24
— 5 23 7	— 4 35 36	— 4 31 56	+ 1 0 48
+ 4 50 15	+ 3 37 24	+ 3 18 33	+ 3 29 8
+ 1 47 38	+ 2 59 0	+ 3 18 32	+ 3 29 8
— 0.01	— 0.01	0.00	— 0.01
— 0.01	0.00	0.00	+ 0.04
+ 0.04	+ 0.20	+ 0.24	+ 0.53
— 1.41	— 3.98	— 4.98	+ 6.88
— 0.38	— 0.64	— 0.78	+ 1.57
B. Fall 7. a.	B. Fall 8. a.	B. Fall 9. a.	B. Fall 10. a.
Verkittetes Objectiv.	Crownglaslinse gleichseitig.	Flachste mögliche Flintglaslinse, R_2 krummer als R_0.	Flachste mögliche Flintglaslinse, R_0 krummer als R_2.

Flint voraus (B.6.a) die Gaussbedingung bedeutend besser erfüllt ist als bei dem mit Crown voraus, indem der Fehler nicht ganz halb so gross (— 0.30^{mm} gegen — 0.68^{mm}) ist, während der Fehler der Farbenvergrösserung und Verzerrung in der Ordnung der Genauigkeit der Rechnung in beiden Fällen gleich gross ist. Bei 6.a* ist der Fehler der Gaussbedingung und zwar durch den Abstand gehoben. Die beiden Fälle A. 8.a* und B. 6.a* sind ausgehend von A. 8.a beziehungsweise B. 6.a unter Einführung von Linsenabständen gerechnet und damit der Einfluss auf die Gaussbedingung die Farbenvergrösserung und Verzerrung bestimmt, und es ergiebt sich dabei, dass, während die Gaussbedingung und die Verzerrung gleichzeitig auf Null gebracht werden können, der Farbenvergrösserungsfehler der grösste bleibt, und zwar bei der Combination Crown voraus grösser als bei Flint voraus. Fall 7.a ist ein verkittetes Objectiv; für dieses wächst der Fehler der Verzerrung, wie auch bei allen folgenden Einzelfällen. Fall 8.a hat eine gleichseitige Crownglaslinse. Fall 10.a und 11.a bilden die Grenzen der möglichen Fälle mit Flint voraus, 9.a hat dabei unter den noch möglichen Fällen die schwächste Brechung an R_0 zur Axe, und 10.a die schwächste Brechung an R_0 von der Axe.

Die Objective, welche in den Tabellen dieses und des vorausgehenden Paragraphen zu Grunde gelegt sind, wurden für Glasarten gerechnet, wie sie gewöhnlich im Handel vorkommen. Welche der vorstehend angegebenen Formen in den einzelnen Fällen zu wählen ist, wird davon abhängen, welche Bedingungen ein Objectiv zu erfüllen hat. Bei kleinem Maassstabe der Objective, wobei die Fehlergrenzen leicht unter der Empfindlichkeit des Auges bleiben, wird man das verkittete Objectiv vorziehen dürfen wegen des geringen Lichtverlustes, indem hierbei nur zwei Brechungen zwischen Luft und Glas vorkommen. Bei Objectiven, von welchen grosses Gesichtsfeld verlangt wird, und in deren Bildern Messungen vorgenommen werden sollen, ist es unbedingt nothwendig, diejenige Form zu wählen, welche bei strenger Erfüllung der Bedingungen für Aufhebung der Farbenvergrösserung und Aufhebung der Verzerrung möglichst kleine Fehler im Bildpunkte in der Axe besitzt. Für Objective mit sehr grossem Maassstabe, welche bedeutendes Gewicht erhalten, wird es günstiger sein, die Form mit Flint voraus zu wählen, weil sie mehr Tragfähigkeit gegen Durchbiegung besitzt. Für Fernrohre, mit denen bald näher bald ferner gesehen werden soll, wie z. B. für Ablesefernrohre, wird ein Objectiv zu wählen sein, für welches der Kugelgestaltfehler in beiden Richtungen gehoben ist. Bei Fällen endlich, wo nur mit monochromatischem Lichte gearbeitet werden soll, sind die Bedingungen für Farben und Farbenvergrösserung weniger wichtig. Nähere Erörterungen über diese Verhältnisse sollen auf den zweiten Theil dieses Werkes verschoben bleiben.

Von wesentlichem Einflusse auf die Form der Objective ist, wie schon erwähnt, die Wahl der Glassorten; um hierfür wenigstens Anhaltspunkte zu geben, sind für zwei specielle Fälle Tabellen gerechnet, welche den Einfluss der Aenderungen in den Brennweiten und Halbmessern der Einzellinsen bei einer Aenderung der Eigenschaften der Glassorten darstellen, und die Entnehmung der Radien von Objectiven aus allen Glassorten gestatten, welche innerhalb der Grenzen liegen, die für die Aen-

derungen der Glassorten angenommen wurden. Die eine dieser Tabellen ist durch eine Näherungsrechnung gewonnen, es ist nämlich die Tabelle für ineinandergepasste Objective; die andere aber durch strenge trigonometrische Rechnung unter Berücksichtigung der Dicken, nämlich die Tabelle von Objectiven, für welche die Kugelgestaltfehler in beiden Richtungen gehoben sind. Beide Tabellen sind seinerzeit zum Gebrauche der optischen Werkstätte von C. A. Steinheil Söhne gerechnet worden.

Die Anordnung und die Anwendung der Tabellen und der hiernach gezeichneten Tafeln soll in Folgendem kurz beschrieben werden.

A. Die Tabellen[1]) zur Entnahme der Radien von Objectiven, deren innere Flächen in einander passen, sind unter Zugrundelegung der bekannten Näherungsformeln für Aufhebung des Farben- und Kugelgestaltfehlers gerechnet.

Es ist nämlich die Bedingungsgleichung für die Hebung der Farbe[2]) in der Axe:

$$(1) \qquad 0 = \frac{\Delta n}{n-1}\,\frac{1}{F_{0,2}} + \frac{\Delta n'}{n'-1}\,\frac{1}{F_{4,6}},$$

wobei

$$F_{0,2} = 1 - \frac{\Delta n}{\Delta n'}\,\frac{n'-1}{n-1},$$

$$F_{4,6} = -\left(\frac{\Delta n'}{\Delta n}\,\frac{n-1}{n'-1} - 1\right) \text{ und}$$

$$\frac{1}{F_{0,6}} = \frac{1}{F_{0,2}} + \frac{1}{F_{4,6}} \text{ ist.}$$

Die Bedingungsgleichung für Aufhebung des Kugelgestaltfehlers[3]) ist:

$$(2) \qquad \begin{aligned} 0 = {} & \frac{n(4n-1)\ ③}{8(n-1)^2(n+2)} + \frac{n'(4n'-1)}{8(n'-1)^2(n'+2)}\,\frac{F_{0,2}}{F_{4,6}}\left\{④\left(\frac{F_{0,2}}{F_{4,6}}\right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{4(n'-1)^2}{4n'-1}\,\frac{F_{0,2}}{F_{0,6}}\right\}, \end{aligned}$$

dabei sind ③ und ④ vorübergehend in die Gleichungen eingehende Werthe, welche den Bedingungen[4]) genügen:

$$(2\text{a}) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{R_2} &= \frac{4+n-2n^2}{2(n-1)(n+2)A_2'} + \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)A_0} \mp \frac{n\sqrt{4n-1}}{2(n-1)(n+2)}\,\frac{\sqrt{③-1}}{F_{0,2}}, \\ \frac{1}{R_4} &= \frac{n'(2n'+1)}{2(n'-1)(n'+2)F_{0,6}} + \frac{4+n'-2n'^2}{2(n'-1)(n'+2)A_4} \pm \frac{n\sqrt{4n'-1}}{2(n'-1)(n'+2)}\,\frac{\sqrt{④-1}}{F_{4,6}}. \end{aligned}$$

Die dritte Bedingungsgleichung ist, da die inneren Flächen in einander gepasst sein sollen:

$$(3) \qquad R_2 = -R_4.$$

Aus den Gleichungen (2), (2a) und (3) lassen sich ③ und ④ be-

1) Tafeln zur Entnehmung der Radien von Fernrohrobjectiven, deren innere Flächen in einander passen. Inaug.-Abhandl. von *A. Steinheil.* München 1858.
2) *Klügel's* analytische Dioptrik, Leipzig 1778. S. 125. § 333.
3) *Klügel* S. 126. § 337.
4) *Klügel* S. 75. § 197.

Elemente zu

	1.	2.	3.
n	1.515 4	1 515 4	1.515 4
n'	1.614 0	1.614 0	1.614 0
$\Delta n' : \Delta n$	2.213 4	2.172 8	2.074 4
$\frac{\Delta n}{\Delta n'} \frac{n'-1}{n-1}$	0.538 23	0 548 28	0.574 28
R_0	0.590 21	0.522 05	0.454 60
$R_2 = - R_4$	0 398 74	0.420 20	0.424 11
$1 : R_6$	0.609 56	0.403 01	0.160 87
n	1.525 4	1 525 4	1.525 4
n'	1.614 0	1.614 0	1.614 0
$\Delta n' : \Delta n$	2.213 4	2.172 8	2.074 4
$\frac{\Delta n}{\Delta n'} \frac{n'-1}{n-1}$	0.528 03	0.537 84	0.563 31
R_0	unmöglich	unmöglich	0.513 51
$R_2 = - R_4$	unmöglich	unmöglich	0.414 75
$1 : R_6$	unmöglich	unmöglich	0.311 0[illegible]
n	1.505 4	1.505 4	1.505 4
n'	1 614 0	1.614 0	1.614 0
$\Delta n' : \Delta n$	2.213 4	2.172 8	2.074 4
$\frac{\Delta n}{\Delta n'} \frac{n'-1}{n-1}$	0.548 90	0 559 09	0.585 60
R_0	0 482 84	0.459 56	0.414 54
$R_2 = - R_4$	0.431 97	0.432 60	0.423 32
$1 : R_6$	0.333 20	0.242 65	0.060 24
n	1.515 4	1.515 4	1.515 4
n'	1.624 0	1.624 0	1.624 0
$\Delta n' : \Delta n$	2.213 4	2.172 8	2.074 4
$\frac{\Delta n}{\Delta n'} \frac{n'-1}{n-1}$	0.547 02	0.557 17	0.583 60
R_0	0.500 35	0.474 54	0.426 06
$R_2 = - R_4$	0.437 68	0 439 71	0.432 43
$1 : R_6$	0.349 52	0.257 88	0.066 47
n	1.515 4	1.515 4	1.515 4
n'	1.604 0	1.604 0	1.604 0
$\Delta n' : \Delta n$	2.213 4	2.172 8	2.074 4
$\frac{\Delta n}{\Delta n'} \frac{n'-1}{n-1}$	0.529 49	0.539 32	0.564 90
R_0	unmöglich	unmöglich	0.495 30
$R_2 = - R_4$	unmöglich	unmöglich	0.409 77
$1 : R_6$	unmöglich	unmöglich	0.290 83

den Tafeln.

4.	5.	6.	7.
1.515 4	1.515 4	1.515 4	1.515 4
1.614 0	1.614 0	1.614 0	1.614 0
2.025 0	1.908 3	1.766 8	1.622 4
0.588 28	0.624 28	0.674 28	0.734 28
0.430 20	0.380 22	0.323 84	0.273 01
0.418 74	0.394 62	0.348 55	0.296 37
0.061 03	— 0.172 04	— 0.502 50	— 1.126 42
1.525 4	1.525 4	1.525 4	1.525 4
1.614 0	1.614 0	1.614 0	1.614 0
2.025 0	1.908 3	1.766 8	1.622 4
0.577 05	0.612 36	0.661 41	0.710 46
0.476 23	0.414 04	0.352 06	0.298 71
0.416 61	0.400 83	0.359 59	0.309 99
0.178 27	— 0.078 00	— 0.400 54	— 0.770 43
1.505 4	1.505 4	1.505 4	1.505 4
1.614 0	1.614 0	1.614 0	1.614 0
2.025 0	1.908 3	1.766 8	1.622 4
0.599 87	0.636 59	0.687 58	0.738 57
0.394 78	0.351 21	0.298 44	0.249 20
0.414 63	0.385 03	0.335 32	0.281 25
— 0.029 88	— 0.254 97	— 0.602 17	— 1.043 95
1.515 4	1.515 4	1.515 4	1.515 4
1.624 0	1.624 0	1.624 0	1.624 0
2.025 0	1.908 3	1.766 8	1.622 4
0.597 28	0.634 41	0.685 22	0.736 04
0.405 35	0.360 08	0.306 23	0.256 16
0.424 20	0.395 24	0.345 03	0.290 11
— 0.019 52	— 0.250 84	— 0.590 08	— 1.021 71
1.515 4	1.515 4	1.515 4	1.515 4
1.604 0	1.604 0	1.604 0	1.604 0
2.025 0	1.908 3	1.766 8	1.622 4
0.578 67	0.614 09	0.663 27	0.712 46
0.461 97	0.403 86	0.343 70	0.291 36
0.409 75	0.391 91	0.350 56	0.301 59
0.166 62	— 0.082 95	— 0.408 58	— 0.786 52

stimmen, und sind diese bekannt, so finden sich die Radien des Objectives aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{4 + n - 2n^2}{2(n-1)(n+2)} \frac{1}{A_0} + \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)} \frac{1}{A_2'} \pm$$
$$\pm \frac{n\sqrt{4n-1}}{2(n-1)(n+2)} \frac{\sqrt{③} - 1}{F_{0,2}},$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{(n-1) F_{0,2}} - \frac{1}{R_0},$$

$$\frac{1}{R_4} = -\frac{1}{R_2},$$

$$\frac{1}{R_6} = \frac{1}{(n'-1) F_{4,6}} - \frac{1}{R_4}.$$

Nach diesen Formeln wurden nun die Radien für sieben Objective gerechnet, die Brechungsindices der für alle Objective benützten Glasarten sind $n = 1.5154$ und $n' = 1.6140$ angenommen, dagegen $\frac{\Delta n'}{\Delta n}$ für das erste Objectiv 2.2134 und für die folgenden beziehungsweise 2.1728, 2.0744, 2.0250, 1.9083, 1.7668 und 1.6224. Die Elemente dieser Objective sind in den sieben ersten Spalten der Tabelle zusammengestellt. Nun wurden sieben weitere Objective gerechnet, bei welchen die Brechungsindices $n = 1.5254$ und $n' = 1.6140$, die Werthe von $\frac{\Delta n'}{\Delta n}$ in gleicher Weise wie bei den vorher berechneten Objectiven sich ändernd angenommen wurden; die Elemente dieser Objective sind in den sieben nächsten Spalten aufgeführt. In ganz gleicher Weise ergeben sich die nachfolgenden Spalten der Tabelle durch entsprechende Aenderungen an n oder n'.

Aus dieser Tabelle wurden die beiliegenden Tafeln IV—VII in der Art construirt, dass die Werthe des Ausdruckes $\frac{\Delta n}{\Delta n'} \frac{n'-1}{n-1}$ als Ordinaten, die entsprechenden Werthe der Radien, beziehungsweise deren reciproke Werthe als Abscissen aufgetragen und die so erhaltenen Punkte durch Curven verbunden wurden. Von den Tafeln dient IV zur Bestimmung von R_0, V von $R_2 = -R_4$ und VI und VII endlich von $\frac{1}{R_6}$.

Durch Interpolation können aus der Tabelle oder den Tafeln die Radien für Objective entnommen werden, bei welchen die Brechungsindices innerhalb der Grenzwerthe $n = 1.5054$ und 1.5254, $n' = 1.6040$ und 1.6240, sowie $\frac{\Delta n'}{\Delta n} = 2.2134$ und 1.6224 sich befinden; es ist dabei die wahre Brennweite $F_{0,6} = 1$ angenommen, und müssten in einem Falle, wenn $F_{0,6}$ einen andern Werth erlangen soll, die Radien mit dieser Zahl multiplicirt werden.

Nochmals heben wir hervor, dass die Objective unter Vernachlässigung der Linsendicken gerechnet sind, und zwar mit Näherungsformeln, so dass nur dann eine Anwendung von diesen Objectiven gemacht werden kann, wenn die angegebenen Beschränkungen zutreffend sind. Wir werden in dem zweiten Theile dieses Buches nochmals darauf zurückkommen.

B. Die zweite Tabelle liefert die Radien von Objectiven, für welche der Kugelgestaltfehler in beiden Richtungen gehoben ist. Die Berechnung ist, wie schon oben hervorgehoben, durch strenge trigonometrische Durchrechnung unter Berücksichtigung der Linsendicken vorgenommen.

	1.	2.	3.	4.
n	1.512 0	1.512 0	1.512 0	1.512 0
n'	1.628 0	1.628 0	1.628 0	1.628 0
$\Delta n' : \Delta n$	2.100 0	1.950 0	1.800 0	1.650 0
$\frac{\Delta n'}{\Delta n} \frac{n-1}{n'-1}$	1.712 1	1.589 8	1.467 5	1.345 2
R_0	0.632 80	0.564 53	0.484 91	0.390 83
R_2	0.320 89	0.286 85	0.247 29	0.200 88
R_4	0.328 37	0.296 19	0.257 73	0.210 42
$1 : R_6$	0.805 15	0.678 38	0.489 29	0.192 82
n	1.532 0	1.532 0	1.532 0	1.532 0
n'	1.628 0	1.628 0	1.628 0	1.628 0
$\Delta n' : \Delta n$	2.100 0	1.950 0	1.800 0	1.650 0
$\frac{\Delta n'}{\Delta n} \frac{n-1}{n'-1}$	1.779 0	1.651 9	1.524 8	1.397 8
R_0	0.683 12	0.615 74	0.537 12	0.444 26
R_2	0.352 90	0.318 61	0.278 72	0.231 74
R_4	0.355 62	0.325 29	0.287 80	0.240 10
$1 : R_6$	0.760 51	0.628 14	0.446 15	0.188 69
n	1.512 0	1.512 0	1.512 0	1.512 0
n'	1.598 0	1.598 0	1.598 0	1.598 0
$\Delta n' : \Delta n$	2.100 0	1.950 0	1.800 0	1.650 0
$\frac{\Delta n'}{\Delta n} \frac{n-1}{n'-1}$	1.798 0	1.669 5	1.541 1	1.412 7
R_0	0.675 12	0.610 18	0.534 36	0.444 77
R_2	0.342 06	0.309 61	0.271 86	0.227 45
R_4	0.342 99	0.314 49	0.278 57	0.234 96
$1 : R_6$	0.813 27	0.679 76	0.506 00	0.232 79
n	1.532 0	1.532 0	1.532 0	1.532 0
n'	1.598 0	1.598 0	1.598 0	1.598 0
$\Delta n' : \Delta n$	2.100 0	1.950 0	1.800 0	1.650 0
$\frac{\Delta n'}{\Delta n} \frac{n-1}{n'-1}$	1.868 2	1.734 8	1.601 3	1.467 9
R_0	0.725 05	0.660 75	0.585 86	0.497 49
R_2	0.374 27	0.341 48	0.303 49	0.258 63
R_4	0.370 42	0.342 06	0.306 56	0.263 63
$1 : R_6$	0.764 64	0.640 58	0.480 43	0.232 19

§ 6. Berechnung eines Bildpunktes seitlich von der Axe.

Von den in dem § 4 dieses Capitels betrachteten Objectiven haben wir für sechs Objective das Bild eines um 6^0 seitlich von der Axe gelegenen Objectpunktes berechnet. An Fall A. a. 1 wollen wir auch, indem wir die ganze Rechnung für dasselbe geben, die Art und Weise darstellen, wie die Einstellungen auf das Bild des seitlich gelegenen Objectes vorgenommen wurden, und welche Eigenschaften des Bildpunktes sich daraus ableiten.

Dieses Objectiv A. a. 1, für welches in der Tabelle A. Fall 1. a (S. 166) alle Elemente, die auf den Bildpunkt in der Axe Bezug haben, enthalten sind, ergab für den Bildpunkt in der Axe (Schnitt des gelben Randstrahles mit der Axe) eine Einstellebene in der Entfernung von 670.46mm von der letzten Glasfläche aus gezählt. Durch dieses Objectiv wurden nun zuerst drei Strahlen ausser der Axe in der Axenebene gerechnet, welche die erste Fläche des Objectives in folgender Weise treffen: der erste die Mitte des Objectives, die beiden anderen den oberen und unteren Rand desselben. Alle drei Strahlen liegen in einer Ebene, welche die optische Axe und das um 6^0 unterhalb der Axe gelegene Object enthält; wir bezeichnen die Strahlen als Hauptstrahl, unteren und oberen Randstrahl.

Es ist:

$$R_0 = 67.2822 \; O.\,Z.$$
$$D_1 = 8.0 \qquad R_2 = 153.0210 \; O.\,Z.$$
$$D_3 = 6.685 \qquad R_4 = 114.8806 \; U.\,Z.$$
$$D_5 = 5.0 \qquad R_6 = 300.3343 \; U.\,Z.$$

	Hauptstrahl.	Oberer Randstrahl.	Unterer Randstrahl.
H_0		+ 30.0	— 30.0
$\log H_0$		1.477 121	1.477 121 *n*
$\log 1 : R_0$		8.172 100	8.172 100
$\log \sin \eta_0$		9.649 221	9.649 221 *n*
η_0		26° 28′ 47″.5	— 26° 28′ 47″.5
$\tau_0 = \alpha_0$		6 0 0	6 0 0
φ_0	6° 0′ 0″	32 28 47.5	— 20 28 47.5
$\log \sin \varphi_0$	9.019 235	9.729 977	9.543 917 *n*
$\log (1 : n)$	9.818 710	9.818 710	9.818 710
$\log \sin \varphi_0'$	8.837 945	9.548 687	9.362 627 *n*
$- \varphi'$	— 3° 56′ 53″.9	— 20° 42′ 59″.0	+ 13° 19′ 30″.5
φ_0	6 0 0	32 28 47.5	— 20 28 47.5
δ_0	2 3 6.1	11 45 48.5	— 7 9 17.0
α_0	6 0 0	6 0 0	6 0 0
α_0'	— 3 56 53.9	5 45 48.5	— 13 9 17.0
$\log \sin \alpha_0'$	8.837 945 *n*	9.001 829	9.357 137 *n*
$\log (1 : \sin \alpha_0')$	1.162 055 *n*	0.998 171	0.642 863 *n*
$\log \sin \varphi_0'$	8 837 945	9.548 687	9.362 627 *n*
$\log (\pm R_0)$	1.827 900	1.827 900	1.827 900
$\log (A_0' \mp R_0)$	1.827 900 *n*	2.374 758	1.833 390
$A_0' \mp R_0$	— 67.28217	237.0053	68.13809
$\pm R_0 \mp R_2 - D_1$	— 93.7388	— 93.7388	— 93.7388
$A_0 \mp R_2 - D_1$	— 161.02097	143.2665	— 25.60079

	Hauptstrahl.	Oberer Randstrahl.	Unterer Randstrahl.
$\log (A_0' \mp R_2 - D_1)$	2.206 883 *n*	2.156 145	1.408 252 *n*
$\log \sin \alpha_0'$	8.837 945 *n*	9.001 829	9.357 137 *n*
$\log (1 : \pm R_2)$	7.815 249	7.815 249	7.815 249
$\log \sin \varphi_2$	8 860 077	8.973 223	8.580 638
$\log n$	0 181 290	0.181 290	0.181 290
$\log \sin \varphi_2'$	9.041 367	9.154 513	8.761 928
φ_2	4° 9′ 18″.3	5° 23′ 41″.8	2° 10′ 55″.4
$-\varphi_2'$	6 18 53.8	8 12 20.9	3 18 48.8
δ_2	− 2 9 35.5	− 2 48 39.1	− 1 7 53.4
α_0'	− 3 56 53.9	5 45 48.5	− 13 9 17.0
α_2'	− 6 6 29.4	2 57 9.4	− 14 17 10.4
$\log \sin \alpha_2'$	9.026 965 *n*	8.711 891	9.392 285 *n*
$\log 1 : \sin \alpha_2'$	0.973 035 *n*	1.288 109	0.607 715 *n*
$\log \sin \varphi_2'$	9.041 367	9.154 513	8.761 928
$\log \pm R_2$	2.184 751	2.184 751	2.184 751
$\log (A_2' \mp R_2)$	2.199 153 *n*	2.627 373	1.554 394 *n*
$A_2' \mp R_2$	− 158.1805	424.0070	− 35.84215
$\pm R_2 \mp R_4 - D_3$	261.2166	261.2166	261.2166
$A_2' \mp R_4 - D_3$	103.0361	685.2236	225.37445
$\log (A_2' \mp R_4 - D_3)$	2.012 989	2.835 832	2.352 905
$\log \sin \alpha_2'$	9.026 965 *n*	8.711 891	9.392 285 *n*
$\log 1 : \pm R_4$	7.939 753 *n*	7.939 753 *n*	7.939 753 *n*
$\log \sin \varphi_4$	8.979 707	9.487 476 *n*	9.684 943
$\log 1 : n'$	9.792 210	9.792 210	9.792 210
$\log \sin \varphi_4'$	8.771 917	9.279 686 *n*	9.477 153
φ_4	5° 28′ 34″.9	− 17° 53′ 34″.4	28° 57′ 14″.8
$-\varphi_4'$	3 23 26.6	− 10 58 35.8	17 27 32.1
δ_4	2 5 8.3	− 6 54 58.6	11 29 42.7
α_2'	− 6 6 29.4	2 57 9.4	− 14 17 10.4
α_4'	− 4 1 21.1	− 3 57 49.2	− 2 47 27.7
$\log \sin \alpha_4'$	8 846 020 *n*	8.839 628 *n*	8.687 470 *n*
$\log 1 : \sin \alpha_4'$	1.153 980 *n*	1.160 372 *n*	1.312 530 *n*
$\log \sin \varphi_4'$	8.771 917	9.279 686 *n*	9.477 153
$\log \pm R_4$	2.060 247 *n*	2.060 247 *n*	2.060 247 *n*
$\log (A_4' \mp R_4)$	1.986 144	2.500 305 *n*	2.849 930
$A_4' \mp R_4$	96.85989	− 316.4499	707.8316
$\pm R_4 \mp R_6 - D_5$	180.4537	180.4537	180.4537
$A_4' \mp R_6 - D_5$	277.31359	− 135 9962	888.2853
$\log (A_4' \mp R_6 - D_5)$	2.442 971	2.133 527 *n*	2.948 552
$\log \sin \alpha_4'$	8.846 020 *n*	8.839 628 *n*	8.687 470 *n*
$\log 1 : \pm R_6$	7.522 395 *n*	7.522 395 *n*	7.522 395 *n*
$\log \sin \varphi_6$	8.811 386	8.495 550 *n*	9.158 417
$\log n'$	0.207 790	0.207 790	0.207 790
$\log \sin \varphi_6$	9.019 176	8.703 340 *n*	9.366 207

	Hauptstrahl.	Oberer Randstrahl.	Unterer Randstrahl.
φ_6	3° 42′ 49″.5	— 1° 47′ 37″.2	8° 16′ 49″.5
$-\varphi_6'$	5 59 57.1	— 2 53 42.0	13 26 15.0
δ_6	— 2 17 7.6	1 6 4.8	— 5 9 25.8
α_4'	— 4 1 21.1	— 3 57 49.2	— 2 47 27.7
α_6'	— 6 18 28.7	— 2 51 44.4	— 7 56 53.2
$\log \sin \alpha_6'$	9.040 889 *n*	8.698 417 *n*	9.140 748 *n*
$\log 1 : \sin \alpha_6'$	0.959 111 *n*	1.301 583 *n*	0.859 252 *n*
$\log \sin \varphi_6'$	9.019 176	8.703 340 *n*	9.366 207
$\log \pm R_6$	2.477 605 *n*	2.477 605 *n*	2.477 605 *n*
$\log (A_6' \mp R_6)$	2.455 892	2.482 528 *n*	2.703 064
$A_6' \mp R_6$	285.6880	— 303.7582	504.7357
$\pm R_6 - B_6^*$	— 970.80	— 970.80	— 970.80
$A_6' - B_6^*$	— 685.1120	— 1274.5582	— 466.0643
$\log (A_6' - B_6^*)$	2.855 762 *n*	3.105 360 *n*	2.668 446 *n*
$\log (\mathrm{tg}\, \alpha_6')$	9.043 527 *n*	8.698 959 *n*	9.144 940 *n*
$\log H_6^*$	1.879 289	1.804 319	1.813 386
H_6^*	75.73367	63.72634	65.07078

Nachdem wir so die drei Strahlen durch das Objectiv gerechnet, finden wir die Durchschnittshöhen der austretenden Strahlen mit der Verticalebene, die durch den Einstellungspunkt des Axenbildes gelegt ist, und zwar für den oberen Randstrahl 63.726^{mm}, für den Hauptstrahl 75.734^{mm} und für den unteren Randstrahl 65.071^{mm}. Man muss nun um 15.0016^{mm} die Einstellebene hineinschieben, also auf 955.7984^{mm} von der letzten Mittelpunktsebene, damit der Durchschnitt des oberen und unteren Randstrahles mit der neuen Einstellebene in gleicher Höhe erfolge. Es wird:

	Hauptstrahl.	Oberer Randstrahl.	Unterer Randstrahl.
$A'_6 \mp R_6$	285.6880	— 303.7582	504.7357
$\pm R_6 - B_6^{**}$	— 955.7984	— 955.7984	— 955.7984
$A_6' - B_6^{**}$	— 670.1104	— 1259.5570	— 451.0627
$\log (A_6' - B_6^{**})$	2.826 146 *n*	3.100 218 *n*	2.654 237 *n*
$\log \mathrm{tg}\, \alpha_6'$	9.043 527 *n*	8.698 959 *n*	9.144 940 *n*
$\log H_6^{**}$	1.869 673	1.799 177	1.799 177
H_6^{**}	74.07522	62.97628	62.97628

In der Ebene 955.798^{mm} von der letzten Mittelpunktsebene schneiden somit der obere und untere Randstrahl in der Höhe 62.976^{mm} und der Hauptstrahl in 74.075^{mm} von der Axe aus. Es ist somit in dem Bilde Verzerrung, und zwar im Sinne eines nicht compensirten Fehlers, weil die beiden Strahlen, der obere und untere Randstrahl, sich um 11.099^{mm} unter dem Hauptstrahle schneiden.

Die Constanten zur Berechnung der Strahlen ausser der Axenebene ergeben sich in folgender Weise:

$\log R_0$	1.827 900
$\log \sin \varphi$	9.019 235
$\log \operatorname{tg} \tau$	9.021 620
$\log 1 : \sin \tau$	0.980 765
$\log a$	0.849 520
$\log a^2$	1.699 040
a^2	50.00806
H_0^2	900
U^2	950.00806
$\log U^2$	2.977 727
$\log U$	1.488 864
$\log a$	0.849 520
$\log 1 : U$	8.511 136
$\log \cos \zeta$	9.360 656
ζ	76° 44′ 10″.7
π	180 0 0
$\pi - \zeta$	103 15 49.3
$\log \sin (\pi - \zeta)$	9.988 258
$\log \cos (\pi - \zeta)$	9.360 656 *n*

Mit Hülfe der eben gefundenen Constanten wird nun ein Strahl ausser der Axe und ausser der Axenebene gerechnet, der in der Höhe des Hauptstrahles und im Mantel des einfallenden Lichtbüschels 90° von oben und unten entfernt gelegen ist.

Bei dieser Rechnung bringen wir die vier entsprechenden Werthe für alle vier auf einander folgenden Brechungen in gleicher Horizontalreihe neben einander, um eine rasche Uebersicht zu ermöglichen, und bemerken, dass die in die Rechnung ausser der Axenebene eingehenden Constanten folgende sind:

$$\tau = 6^0,$$

$$H_0 = 30.0^{\mathrm{mm}},$$

$$\pi - \zeta = 103^0\ 15'\ 49''.3,$$

$$U = 30.8222.$$

$\log \mp \sin \tau$	9.019 235 *n*	9.246 352 *n*	9.256 468	8.828 959
$\log \cos (\pi - \zeta)$	9.360 656 *n*	7.605 593	9.968 495	9.644 638
$\log \cos \lambda$	8.379 891	6.851 945 *n*	9.224 963	8.473 597
λ	88° 37′ 32″.8	90° 2′ 26″.7	80° 20′ 10″.4	88° 17′ 41″.2

log sin λ	9.999 875	0.000 000	9.993 793	9.999 808
log 1 : R	8.172 100	7.815 249	7.939 753	7.522 395
log U	1.488 864	1.068 718	1.675 639	1.507 618
log sin φ	9.660 839	8.883 976	9.609 185	9.029 821
log 1 : n	9.818 710	0.181 290	9.792 210	0.207 790
log sin φ'	9.479 549	9.065 257	9.401 395	9.237 611
φ	27° 15′ 22″.8	4° 23′ 25″.8	23° 59′ 32″.9	6° 8′ 55″.0
φ'	17 33 31.1	6 40 25.1	14 35 44.5	9 57 8.0
$\varphi - \varphi'$	9 41 51.7	— 2 16 59.3	9 23 48.4	— 3 48 13.0
λ	88 37 32.8	90 2 26.7	80 20 10.4	88 17 41.2
λ'	98 19 24.5	87 45 27.4	89 43 58.8	84 29 28.2
log sin λ'	9.995 401	9.999 667	9.999 995	9.997 990
log cos λ'	9.160 653	8.592 477	7.668 387	8.982 268
$\varphi + \varphi'$	44° 48′ 53″.9	11° 3′ 50″.9	38° 35′ 17″.4	16° 6′ 3″.0
log sin $(\varphi + \varphi')$	9.848 078	9.283 092	9.794 988	9.442 995
log sin $(\varphi - \varphi')$	9.226 470	8.600 295 n	9.212 908	8.821 754 n
log 1 : sin φ	0.339 161	1.116 033	0.390 815	0.970 179
log 1 : sin φ'	0.520 451	0.934 743	0.598 605	0.762 389
log 2 cotg 2ω	9.934 160	9.934 163 n	9.997 316	9.997 317 n
log R	1.827 900	2.184 751	2.060 247	2.477 605
log sin φ'	9.479 549	9.065 257	9.401 395	9.237 611
log 1 : sin λ'	0.004 599	0.000 333	0.000 005	0.002 010
log U'	1.312 048	1.250 341	1.461 647	1.717 226
log sin λ : sin λ'	0.004 474	0.000 333	9.993 798	0.001 818
log 1 : n'	9.818 710	0.181 290	9.792 210	0.207 790
log U	1.488 864	1.068 718	1.675 639	1.507 618
log U'	1.312 048	1.251 341	1.461 647	1.717 226
log sin λ' : sin λ	9.995 526	9.999 667	0.006 202	9.998 182
log sin τ	9.019 235	9.246 352	9.256 468	8.828 959
log sin $(\pi - \zeta)$	9.988 258	9.999 997	9.565 250	9.952 990
log sin τ' sin $(\pi' - \zeta)$	9.003 019	9.246 016	8.827 920	8.780 131
— log $\mp$ cos λ'	— 9.160 653	— 8.592 477 n	— 7.668 387	— 8.982 268
log tg $(\pi' - \zeta)$	9.842 366	0.653 539 n	1.159 533	9.797 863
$(\pi' - \zeta)$	34° 49′ 22″.3	102° 31′ 10″.9	86° 2′ 17″.4	32° 7′ 23″.2
ζ	76 44 10.7	21 47 24.8	102 44 55.6	124 58 3.2
π'	111 33 33.0	124 18 35.7	188 47 13.0	157 5 26.4
π	180	111 33 33.0	124 18 35.7	188 47 13.0
$\pi - \pi'$	68 26 27.0	— 12 45 2.7	— 64 28 37.3	31 41 46.6
log sin $(\pi' - \zeta)$	9.756 667	9.989 548	9.998 961	9.725 700
log cos $(\pi' - \zeta)$	9.914 302	9.336 010 n	8.839 427	9.927 836
log sin τ' sin $(\pi' - \zeta)$	9.003 019	9.246 016	8.827 920	8.780 131
log 1 : sin $(\pi' - \zeta)$	0.243 333	0.010 452	0.001 039	0.274 300
log sin τ'	9.246 352	9.256 468	8.828 959	9.054 431
log tg τ	9.021 620	9.253 211	9.263 660	8.829 949
log sin $(\pi - \zeta)$	9.988 258	9.999 997	9.565 250	9.952 990
log 1 : sin $(\pi' - \zeta)$	0.243 333	0.010 452	0.001 039	0.274 300
log tg τ'	9.253 211	9.263 660	8.829 949	9.057 239

$\log \sin \lambda$	9.999 875	0.000 000	9.993 793	9.999 808
$\log \sin \tau'$	9.246 352	9.256 468	8.828 959	9.054 431
$\log 1 : \sin (\pi - \zeta)$	0.011 742	0.000 003	0.434 750	0.047 010
	9.257 969	9.256 471	9.257 502	9.101 249
$\log \sin \lambda'$	9.995 401	9.999 667	9.999 995	9.997 990
$\log \sin \tau$	9.019 285	9.246 352	9.256 468	8.828 959
$\log 1 : \sin (\pi' - \zeta)$	0.243 333	0.010 452	0.001 039	0.274 300
	9.257 969	9.256 471	9.257 502	9.101 249
$\log \sin (\varphi - \varphi')$	9.226 470	8.600 295 *n*	9.212 908	8.821 754 *n*
$-\log \sin (\pi - \pi')$	— 9.968 501	— 9.343 822	— 9.955 405 *n*	— 9.720 504
	9.257 969	9.256 473 *n*	9.257 503	9.101 250 *n*
C	93.7388	— 261.2166	— 180.4537	970.80
$\log U'$	1.312 048	1.251 341	1.461 647	1.717 226
$\log \cos (\pi' - \zeta)$	9.914 302	9.336 010	8.839 427	9.927 836
$\log U' \cos (\pi' - \zeta)$	1.226 350	0.587 351 *n*	0.301 074	1.645 062
$\log (-C)$	1.971 919 *n*	2.417 001	2.256 366	2.987 130 *n*
$\log \operatorname{tg} \tau'$	9.253 211	9.263 660	8.829 949	9.057 239
$\log (-C \operatorname{tg} \tau')$	1.225 130 *n*	1.680 661	1.086 315	2.044 369 *n*
$U' \cos (\pi' - \zeta)$	16.84031	— 3.866794	2.000203	44.16335
$-C \operatorname{tg} \tau'$	— 16.79307	47.93591	12.19874	— 110.7565
$U_2 \cos (\pi' - \zeta_2)$	0.04724	44.06911	14.19894	— 66.59315
$\log U'$	1.312 048	1.251 341	1.461 647	1.717 226
$\log \sin (\pi' - \zeta_2)$	9.756 667	9.989 548	1.998 961	9.725 700
$\log U_2 \sin (\pi' - \zeta_2)$	1.068 715	1.240 889	1.460 608	1.442 926
$-\log U_2 \cos (\pi' - \zeta_2)$	— 8.674 310	— 1.644 134	— 1.152 256	— 1.823 430 *n*
$\log \operatorname{tg} (\pi' - \zeta_2)$	2.394 405	9.596 755	0.308 352	9.619 496 *n*
$\pi' - \zeta_2$	89° 46′ 8″.2	21° 33′ 40″.1	63° 49′ 9″.8	157° 23′ 37″.8
π'	111 33 33.0	124 18 35.7	188 47 13.0	157 5 26.4
ζ_2	21 47 24.8	102 44 55.6	124 58 3.2	— 0 18 11.4
ζ	76 44 10.7	21 47 24.8	102 44 55.6	124 58 3.2
$\zeta - \zeta_2$	54 56 45.9	— 80 57 30.8	— 22 13 7.6	125 16 14.6
$\log \sin (\pi' - \zeta_2)$	9.999 997	9.565 250	9.952 990	9.584 777
$\log \cos (\pi' - \zeta_2)$	7.605 593	9.968 495	9.644 638	9.965 281 *n*
$\log U_2 \sin (\pi' - \zeta_2)$	1.068 715	1.240 889	1.460 608	1.442 926
$\log 1 : \sin (\pi' - \zeta_2)$	0.000 003	0.434 750	0.047 010	0.415 223
$\log U_2$	1.068 718	1.675 639	1.507 618	1.858 149
$\log 1 : \sin (\pi' - \zeta_2)$	0.243 333	0.010 452	0.001 039	0.274 300
	1.312 051	1.686 091	1.508 657	2.132 449
$\log C \operatorname{tg} \tau'$	1.225 130	1.680 661 *n*	1.086 315 *n*	2.044 369
$-\log \sin (\zeta - \zeta_2)$	— 9.913 079	— 9.994 570 *n*	— 9.577 657 *n*	9.911 920
	1.312 051	1.686 091	1.508 658	2.132 449
$\log U'$	1.312 048	1.251 341	1.461 647	1.717 226
$\log 1 : \sin (\pi' - \zeta_2)$	0.000 003	0.434 750	0.047 010	0.415 223
	1.312 051	1.686 091	1.508 657	2.132 449

Diese Durchrechnung ergiebt somit in der Einstellebene 970.80^mm^ von der letzten Mittelpunktsebene für das Axenbild die Werthe:

$$\zeta_6 = -0^0\ 18'\ 11''.4;\quad U_2 = 72.1355^{mm}.$$

Hieraus ergiebt sich die Höhe des Schnittpunktes vom Strahle mit der Einstellebene über der Axe durch die Rechnung:

$$\begin{aligned} \log U_2 &= 1.858\,149 \\ \log\cos\zeta_6 &= 9.999\,999 \\ \hline \log U_2\cos\zeta_6 &= 1.858\,148 \\ U_2\cos\zeta_6 &= 72.13533 \end{aligned}$$

zu 72.135^mm^, und die Entfernung der beiden symmetrisch gegen die verticale Axenebene liegenden seitlichen Strahlen durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0.301\,030 \\ \log U_2 &= 1.858\,149 \\ \log\sin\zeta_6 &= 7.723\,557\,n \\ \hline \log 2\,U_2\sin\zeta_6 &= 9.882\,736\,n \end{aligned}$$

zu 0.7634^mm^, und als Abstand jedes der Strahlen von der Axenebene 0.3817^mm^. Wir geben diesem Abstande das positive Zeichen, wenn die Strahlen hinter der angenommenen Einstellebene sich schneiden, und das negative, wenn sie sich vor dieser Ebene schneiden, und nennen den übrig bleibenden Fehler im ersten Falle nichtcompensirt, im zweiten übercompensirt.

Die Vereinigung der beiden symmetrischen seitlichen Strahlen findet in einer Bildebene statt, welche um 8.592^mm^ weiter gegen das Objectiv herein liegt, also in der Entfernung 962.2080^mm^ von der letzten Mittelpunktsebene. Diese Bildebene wurde gefunden durch die Rechnung:

$$\begin{aligned} \log U' &= 1.717\,226 \\ \log\sin\zeta &= 9.913\,537 \\ \log 1:\mathrm{tg}\,\tau' &= 0.942\,761 \\ \log 1:\sin\pi' &= 0.409\,745 \\ \hline & \ 2.983\,269 \end{aligned}$$

In dieser Einstellebene ergiebt sich die Höhe des Hauptstrahles:

$$\begin{aligned} A_6' \mp R_6 &= 285.6880 \\ \pm R_6 - B_6^{**} &= -962.2080 \\ \hline A_6' - B_6^{**} &= -676.5200 \\ \log(A_6' - B_6^{**}) &= 2.830\,281\,n \\ \log(\mathrm{tg}\,A_6') &= 9.043\,527\,n \\ \hline \log H_6^{**} &= 1.873\,808 \\ H_6^{**} &= 74.78388 \end{aligned}$$

und die Höhe des Vereinigungspunktes beider seitlichen Randstrahlen erhalten wir aus:



$$
\begin{aligned}
C &= 962.2080 \\
\log(-C) &= 2.983\,269\,n \\
\log \operatorname{tg} \tau' &= 9.057\,239 \\
\hline
\log(-C \operatorname{tg} \tau') &= 2.040\,508\,n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U' \cos(\pi' - \zeta) &= \quad 44.16335 \\
-C \operatorname{tg} \tau' &= -109.77615 \\
\hline
U_2 \cos(\pi' - \zeta_2) &= -\ 65.61280
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log U_2 \sin(\pi' - \zeta_2) &= 1.442\,926 \\
-\log U_2 \cos(\pi' - \zeta_2) &= -1.816\,989\,n \\
\hline
\log \operatorname{tg}(\pi' - \zeta_2) &= 9.625\,937\,n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi' - \zeta_2 &= 157^0\ \ 5'\ \ 26''.6 \\
\pi' &= 157\ \ \ 5\ \ 26.4 \\
\hline
\zeta_2 &= \ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0.2 \\
\zeta &= 124\ \ 58\ \ \ 3.2 \\
\hline
\zeta - \zeta_2 &= 124\ \ 58\ \ \ 3.4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log \sin(\pi' - \zeta_2) &= 9.590\,254 \\
\log \cos(\pi' - \zeta_2) &= 9.964\,317\,n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log U_2 \sin(\pi' - \zeta_2) &= 1.442\,926 \\
\log 1 : \sin(\pi' - \zeta_2) &= 0.409\,746 \\
\hline
\log U_2 &= 1.852\,672 \\
\log 1 : \sin(\pi' - \zeta) &= 0.274\,300 \\
\hline
& \quad 2.126\,972
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log C \operatorname{tg} \tau' &= 2.040\,508 \\
-\log \sin(\zeta - \zeta_2) &= -9.913\,536 \\
\hline
& \quad 2.126\,972
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log U' &= 1.717\,226 \\
\log 1 : \sin(\pi' - \zeta_2) &= 0.409\,746 \\
\hline
& \quad 2.126\,972
\end{aligned}
$$

Wir finden die Höhe der seitlichen Randstrahlen zu $U_2 = 71.2315^{mm}$.

Der obere und untere Randstrahl trafen sich in einer Ebene, deren Entfernung von der letzten Mittelpunktsebene 955.7984^{mm} beträgt, und die beiden seitlichen Strahlen schneiden sich in der Ebene, deren Entfernung von der letzten Mittelpunktsebene 962.2080^{mm} ist. Wir wollen nun diejenige Ebene, deren Entfernung von der letzten Mittelpunktsebene das arithmetische Mittel aus den beiden, nämlich 959.0032^{mm} beträgt, als Einstellebene für den Bildpunkt seitlich von der Axe gelten lassen. In dieser neuen Einstellebene finden wir die Durchschnittspunkte der fünf betrachteten Strahlen, nämlich für die drei ausser der Axe in der Axenebene gelegenen, den Hauptstrahl, den oberen und unteren Randstrahl:

	Hauptstrahl.	Oberer Randstrahl.	Unterer Randstrahl.
	285.6880	— 303.7582	504.7357
	— 959.0032	— 959.0032	— 959.0032
	— 673.3152	— 1262 7614	— 454.2675
	2.828 218 *n*	3.101 321 *n*	2.657 312 *n*
	9.043 527 *n*	8.698 959 *n*	9.144 940 *n*
	1.871 745	1.800 280	1.802 252
	74.42948	63.13643	63.42376

Für die beiden seitlichen Randstrahlen, die ausser der Axenebene gelegen sind, erhalten wir:

$$C = 959.0032$$

$$\begin{aligned}
\log(-C) &= 2.981\,820\,n \\
\log \operatorname{tg} \tau' &= 9.057\,239 \\
\hline
\log(-C \log \tau') &= 2.039\,059\,n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U' \cos(\pi' - \zeta) &= 44.16335 \\
-C \operatorname{tg} \tau' &= -109.4105 \\
\hline
U_2 \cos(\pi' - \zeta_2) &= -65.24715
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log U_2 \sin(\pi' - \zeta_2) &= 1.442\,926 \\
-\log U_2 \cos(\pi' - \zeta_2) &= -1.814\,562\,n \\
\hline
\log \operatorname{tg}(\pi' - \zeta_2) &= 9.628\,364\,n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi' - \zeta_2 &= 156^0\ 58'\ 32''.5 \\
\pi' &= 157\quad 5\quad 26.4 \\
\hline
\zeta_2 &= 0\quad 6\quad 53.9 \\
\zeta &= 124\quad 58\quad 3.2 \\
\hline
\zeta - \zeta_2 &= 124\quad 51\quad 9.3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \sin(\pi' - \zeta_2) &= 9.592\,312 \\
\log \cos(\pi' - \zeta_2) &= 9.963\,948\,n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log U_2 \sin(\pi' - \zeta_2) &= 1.442\,926 \\
\log 1 : \sin(\pi' - \zeta_2) &= 0.407\,688 \\
\hline
\log U_2 &= 1.850\,614 \\
\log 1 : \sin(\pi' - \zeta) &= 0.274\,300 \\
\hline
&\ 2.124\,914
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log C \operatorname{tg} \tau' &= 2.039\,059 \\
-\log \sin(\zeta - \zeta_2) &= -9.914\,145 \\
\hline
&\ 2.124\,914
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log U' &= 1.717\,226 \\
\log 1 : \sin(\pi' - \zeta_2) &= 0.407\,688 \\
\hline
&\ 2.124\,914
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0.301\,030 \\ \log U_2 &= 1.850\,614 \\ \log \sin \zeta_2 &= 7.302\,570 \\ \hline & 9.454\,214 \\ & 0.284\,586 \text{ übercompensirt.} \end{aligned}$$

Die für diese Einstellebene gewonnenen Resultate sind demnach: der obere Randstrahl schneidet in der Höhe 63.136^{mm}, der Hauptstrahl 74.429^{mm} und der untere Randstrahl 63.434^{mm} über der Axe; die beiden seitlichen Randstrahlen schneiden in einer Höhe von 70.895^{mm} von der Axe in Abständen rechts und links $\underline{+}$ 0.142^{mm} von der verticalen Axenebene. Das Zeichen $\underline{+}$ soll bedeuten, dass die Strahlen ausser der Axenebene die gewählte Einstellebene treffen, ehe sie sich geschnitten haben, während $\overline{+}$ gesetzt wird, wenn sie sich vor der Einstellebene schneiden. Es lässt sich mit Hülfe der gewonnenen Zahlen die Form des Bildes vom seitlich gelegenen Objectpunkte zeichnen, indem einerseits der Hauptstrahl, andrerseits die zwei Randstrahlen in der Axenebene, und die ausser der Axenebene eingetragen werden. Es ist dabei in der Figur der Hauptstrahl mit 1, und von den im Mantel des Büschels um 90^0 auseinander liegenden Strahlen der obere mit 2, der rechte mit 3, der untere mit 4, und der linke mit 5 bezeichnet. Ausser diesen fünf Strahlen von einer Farbe ist ausser der Axe noch ein weiterer Hauptstrahl von stärkerer Brechbarkeit gerechnet, welcher mit dem gelben Hauptstrahle in gleicher Linie auf das Objectiv einfällt. In dem vorliegenden Falle trifft dieser zweite Hauptstrahl die Bildebene höher in 1*. Endlich ist noch der Radius jener Sphäre bestimmt, der sich durch den Bildpunkt in der Axe und den Bildpunkt seitlich von der Axe legen lässt; den Radius dieser Sphäre bezeichnen wir als Bildkrümmung. Wir finden für das betrachtete Objectiv den Krümmungsradius in folgender Weise:

$$(R) = \frac{(74.429)^2 + (970.7982 - 959.0032)^2}{2 \times 11.7950} = 240.732^{mm}.$$

§ 7. Tabellarische Zusammenstellung der Fehler im seitlich gelegenen Bildpunkte für eine Reihe von Objectiven.

In gleicher Weise wie das eben betrachtete Objectiv sind noch weitere fünf Objective durchgerechnet und diese sechs Beispiele in eine Tabelle zusammengestellt. In den einzelnen Horizontalreihen dieser Tabelle sind folgende Werthe angegeben.

Zuerst sind die Radien und Dicken des Objectives zusammengestellt, dann folgt die Einstellebene I des Axenbildes, und zwar die Entfernung derselben von dem Scheitel der letzten Glasfläche aus gezählt. Nun folgen die Strahlen ausser der Axe in der Axenebene und zwar ist für dieselben diejenige Einstellebene II, in welcher der obere und untere Strahl sich treffen, sowie die Höhen, in welchen der Hauptstrahl und die beiden vereinigten Randstrahlen schneiden, angegeben, sowie der Abstand dieser Schnitte, die Verzerrung. Dann ist für die Strahlen ausser der Axe, ausser der Axenebene, die Einstellebene III, in welcher sich die seitlichen Randstrahlen schneiden, und die Höhen, in

		A. Fall 1. a.	A. Fall 12 a.	A. Fall 7. b.
		$D_1=8.0$ $R_0=67.282$ $O.Z.$ $D_3=6.68$ $R_2=153.02$ $O.Z.$ $D_5=5.0$ $R_4=114.88$ $U.Z.$ $R_6=300.33$ $U.Z.$	$D_1=8.0$ $R_0=441.45$ $O.Z.$ $D_3=0.01$ $R_2=196.12$ $U.Z.$ $D_5=5.0$ $R_4=201.12$ $U.Z.$ $R_6=977.97$ $U.Z.$	$D_1=8.0$ $R_0=976.63$ $U.Z.$ $D_3=0.01$ $R_2=100.95$ $U.Z.$ $D_5=5.0$ $R_4=69.048$ $O.Z.$ $R_6=48.573$ $O.Z.$
I. Axenbild	Einstellebene.	670.46	713.81	691.80
II. Strahlen ausser der Axe in der Axenebene.	Einstellebene	655.46	699.28	748.67
	Höhen: gelbe Hauptstr.	74.075	74.150	81.875
	Höhen: Verein. Randstr.	62 976	74.152	103.57
	Höhen: violette Hauptstr.	74.193	74.150	81.955
	Verzerrung.	11.099 n. c.	0.0017 ü. c.	21.690 ü. c.
III. Strahlen ausser der Axe ausser der Axenebene.	Einstellebene	661.87	706.95	697.31
	Höhen: Hauptstrahl	74.784	74.955	76.318
	Höhen: Verein. Randstr.	71.231	74.957	81.830
IV. Strahlen in der Mittelebene zwischen den Ebenen II und III.	Einstellebene	658.67	703.10	722.99
	Höhen in der Axenebene: Ober. Randstr.	63.136	74.389	100.95
	Höhen in der Axenebene: Hauptstrahl	74.429	74.550	79.096
	Höhen in der Axenebene: Unter. Randstr.	63.434	74.715	99.114
	ausser der Axenebene: Höhe	70.895	74.554	95.850
	ausser der Axenebene: Seitenabweich.	± 0.1423	± 0.1612	∓ 0.9908
V. Astigmatismus.	Höhe in der Axenebene des viol. Hauptstrahles.	6.410 ü. c.	7.70 ü. c.	51.359 n. c.
VI. Radius der Bildkrümmung.		+ 240.73	+ 264.92	— 115.88

		B. Fall 1.b.	B. Fall 4.a.	B. Fall 11.a.
		$D_1 = 5.0$ $R_0 = 88.961$ *O. Z.* $D_3 = 13.93$ $R_2 = 54.14"$ *O. Z.* $D_5 = 8 0$ $R_4 = 77.827$ *U. Z.* $R_6 = 45.457$ *U. Z.*	$D_1 = 5.0$ $R_0 = 308.20$ *O. Z.* $D_3 = 0.01$ $R_2 = 138.18$ *O. Z.* $D_5 = 8.0$ $R_4 = 136.13$ *O. Z.* $R_6 = 17654.1$ *U. Z.*	$D_1 = 5.0$ $R_0 = 105.73$ *U. Z.* $D_3 = 0.01$ $R_2 = 193.78$ *U. Z.* $D_5 = 8.0$ $R_4 = 187.84$ *O. Z.* $R_6 = 453.67$ *U. Z.*
I. Axenbild.	Eintrittsebene.	788.77	710.41	732.06
II. Strahlen ausser der Axe in der Axenebene.	Eintrittsebene	848.58	695.93	718.21
	Höhen { gelbe Hauptstr.	81.144	74.155	74.218
	Höhen { Verein. Randstr.	132.39	74.150	69.925
	Höhen { violette Hauptstr.	80.874	74.157	74.165
	Verzerrung.	51.25 ü. c.	0.005 ü. c.	4.293 n. c.
III. Strahlen ausser der Axe ausser der Axenebene.	Einstellebene	831.76	703.74	677.18
	Höhen { Hauptstrahl	79.584	74.972	70.028
	Höhen { Verein. Randstr.	89.924	74.966	67.718
IV. Strahlen in der Mittelebene zwischen den Ebenen II und III.	Einstellebene	840.17	699.84	697.69
	Höhen in der Axenebene { Ober. Randstr.	131.391	74.400	68.856
	Höhen in der Axenebene { Hauptstrahl	80.364	74.561	72.123
	Höhen in der Axenebene { Unter. Randstr.	130.812	74.733	67.076
	ausser der Axenebene { Höhe	90.811	74.557	69.042
	ausser der Axenebene { Seitenabweich.	∓ 0.295	± 0.163	∓ 0.953
V. Astigmatismus.	Höhe in der Axenebene des viol. Hauptstrahles.	16.82 n. c.	7.81 ü. c.	41.029 n. c.
VI. Radius der Bildkrümmung.		— 88.524	+ 268.26	+ 92.856



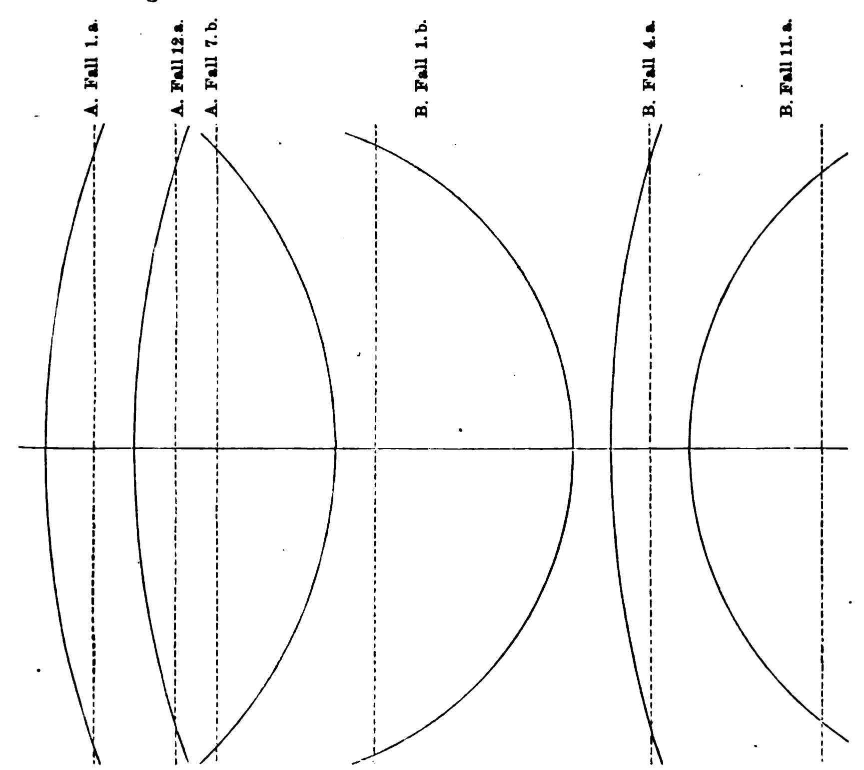
Bildflächen in $2\frac{1}{2}$ maliger Vergrösserung.

welchen der Hauptstrahl und die seitlichen Strahlen treffen, mitgetheilt, und endlich für die zwischen den beiden vorausgehenden Einstellebenen gelegene Mittelebene IV die Entfernung vom Scheitel der letzten Objectivfläche, sowie die Schnitte des Hauptstrahles, des oberen und unteren und der beiden seitlichen Randstrahlen beigefügt, sowie auch der Schnitt des violetten Hauptstrahles mit der zuletzt genannten Mittelebene. In den beiden folgenden Horizontalreihen sind noch der Astigmatismus, der Abstand der Einstellebene I von der Einstellebene II, und der Radius der Bildkrümmung enthalten.

§ 8. Discussion der Bildfehler eines Objectpunktes seitlich von der Axe, und Zusammenhang dieser Fehler mit den Hauptpunkten.

Unter den Fällen, welche zur Durchrechnung von Bildpunkten seitlich der Axe ausgewählt wurden, sind drei Objective mit Crown voraus und drei Objective mit Flint voraus; die Fälle in derselben Reihenfolge der Glasarten sind so geordnet, dass der erste R_0 stark positiv, der zweite eine mässig stark erhabene erste Fläche, und der dritte eine hohle erste Fläche besitzt. Hierbei ist das zweite Objectiv immer mit geringen Bildfehlern und ausserdem ist Rücksicht darauf genommen, dass die wahre

Krümmungsradien der Bildflächen in 5facher natürlicher Grösse.



Brennweite zwischen Haupt- und Randstrahl grössere Fehler in entgegengesetzter Richtung zeigen. Fälle, bei welchen die Hauptpunkte in Farben weit auseinander liegen, wurden nicht gerechnet, da dieser Einfluss hinreichend bekannt ist, und da, um diese Fehler gross zu machen, bedeutende Abstände der Linsen hätten gewählt werden müssen. Bei der Anwendung complicirter Linsensysteme, deren Betrachtung dem zweiten Theile dieses Buches vorbehalten bleiben soll, wird der Einfluss der Linsenabstände und ebenso des Abstandes der Hauptpunkte verschiedenfarbiger Strahlen genauer untersucht werden.

Vergleicht man nun die Fehler in der Axe mit den Resultaten der Rechnung ausser der Axe, so zeigt sich, dass wenn die wahre Brennweite des Randstrahles eine kleinere ist, als die des Axenstrahles, dann die Randstrahlen sowohl in der Axenebene als ausser derselben tiefer schneiden wie die Hauptstrahlen, also einem kleineren Bilde angehören, und dass in Fällen, wo die wahre Brennweite des Randstrahles eine grössere ist, als die des Hauptstrahles, die Randstrahlen sowohl in der Axenebene als ausser der Axenebene höher schneiden als die Hauptstrahlen. Die kleine folgende Tabelle zeigt die Richtigkeit dieser Angabe.

	A. Fall 1.a.		B. Fall 11.a.		B. Fall 4.a.	
	Gelb Axe	Gelb Rand	Gelb Axe	Gelb Rand	Gelb Axe	Gelb Rand
Brennweite	720.00	685.20	720.00	706.47	720.00	719.83
Schnitthöhen	Hauptstr.	Randstr.	Haupstr.	Randstr.	Hauptstr.	Randstr.
in der Axenebene	74.075	62.976	74.218	69.925	74.155	74.150
ausser d. Axenebene	74.784	71.231	70.028	67.718	74.972	74.966

	A. Fall 7.b.		B. Fall 1.b.		A. Fall 12.a.	
	Gelb Axe	Gelb Rand	Gelb Axe	Gelb Rand	Gelb Axe	Gelb Rand
Brennweite	720.00	770.60	720.00	811.98	720.00	720.01
Schnitthöhen	Hauptstr.	Randstr.	Hauptstr.	Randstr.	Hauptsr.	Randstr.
in der Axenebene	81.875	103.57	81.144	132.39	74.150	74.152
ausser d. Axenebene	76.318	81.83	79.584	89.924	74.955	74.957

Wenn die wahren Brennweiten der Rand- und Axenstrahlen verschieden sind, tritt Verzerrung ein, während dann, wenn die Brennweiten der Rand- und Axenstrahlen gleich oder nahe gleich sind, sowohl die Strahlen in der Axenebene als ausser der Axenebene auf dem Hauptstrahle schneiden, das Bild somit frei von Verzerrung erscheint. Es ist nämlich

	A. Fall 1.a.	B. Fall 11.a.	B. Fall 4.a.
Verzerrung	11.099 n. c.	4.293 n. c.	0.005 n. c.
	A. Fall 7.b.	B. Fall 1.b.	A. Fall 12.a.
Verzerrung	21.690 ü. c.	51.25 ü. c.	0.002 ü. c.

Für die Objective, welche frei von Verzerrung sind, ist die Bildfläche gegen das Objectiv zu concav. Die Krümmung des Bildes kann durch Aenderung der Linsenformen in beiden Richtungen geändert werden, je nachdem der Einfluss der positiven oder negativen Linse überwiegt.

Aus obiger Betrachtung folgt ferner, dass durch Vereinigung der Brennpunkte die Deutlichkeit des Bildpunktes in der Axe, durch das Zusammenlegen der Hauptpunkte die Deutlichkeit der Bildpunkte seitlich der Axe erzielt wird, und dass bei ganz guter Vereinigung in der Axe das Bild seitlich von der Axe sehr grosse Fehler bekommen kann, wie am leichtesten aus der gezeichneten Vertheilung der Strahlen im Bildpunkte seitlich von der Axe zu erkennen ist.

Beilagen.

Beilage I.

A. Zusammenstellung der gebrauchten Bezeichnungen.

I. Die Indices werden durch Zahlen rechts unten bezeichnet.

Als Nullpunkt der Zählung gilt der Durchschnitt der ersten brechenden Fläche mit der Axe, als positive Richtung diejenige, in welcher das einfallende Licht geht, die entgegengesetzte als negativ. Mit ungeraden Zahlen werden die Medien, mit geraden die trennenden Flächen bezeichnet. Es ist somit bei einer brechenden Linse der Index des Mediums, aus welchem der Lichtstrahl kommt, gleich -1, der der ersten trennenden Fläche gleich 0, der Index der Linsendicke gleich $+1$, der zweiten trennenden Fläche gleich $+2$, und der des Mediums, in welches der Strahl übertritt, gleich $+3$.

II. Die Constanten werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Es kommen vor:

n, n', n'', ... die Brechungscoefficienten verschiedener verwendeter Glassorten; für die schwächst brechende Glassorte nimmt man n, für die nächst stärkere n' u. s. w. Die Coefficienten tragen rechts unten die Bezeichnung des Mediums, dem sie angehören, und links unten die Bezeichnung der Farbe durch den Buchstaben der entsprechenden Fraunhofer'schen Linie. Z. B. ist ${}_D n_1$ der Brechungscoefficient der ersten Crownglaslinse für die Linie D, und ${}_D n_3'$ der Brechungscoefficient einer nachfolgenden durch einen Abstand von der Crownglaslinse getrennten Flintglaslinse, ebenfalls für die Linie D.

m, m', m'', ... Abkürzung für: $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n'-1}$, $\frac{1}{n''-1}$, ... Mit gleicher Bezeichnung für Medium und Farbe wie bei n, n', n'', ...

Δn, $\Delta n'$, $\Delta n''$, ... die Zerstreuungsgrössen. Die Bezeichnung für Medien und Farben ist wie bei den vorausgehenden Grössen. Z. B. ist $\Delta_{D,F} n_1$ die Zerstreuungsgrösse der ersten Crownglaslinse für den Spectrumtheil D bis F, und $\Delta_{D,F} n_3'$ die Zerstreuungsgrösse der durch einen Abstand getrennten Flintglaslinse für den gleichen Spectrumtheil.

r oder s ein beliebiges Glied einer Reihe, und zwar:

$2r$ oder $2s$ ein gerades, und

$2r-1$ oder $2s-1$ ein ungerades.

a, b, c, . . . i die Zerstreuungsverhältnisse zweier Glassorten. Es gelten die Zerstreuungsverhältnisse von einer Fraunhofer'schen Linie bis zu einer anderen, und bezeichnet man die erstere durch den links unten beigesetzten Buchstaben der Linie, die letztere dadurch, dass man für die Constante den gleichen Buchstaben wählt, den auch die Fraunhofer'sche Linie trägt, nur mit kleiner lateinischer Schrift. Es ist somit:

$${}_R a = \frac{{}_A n' - {}_R n'}{{}_A n - {}_R n}$$

das Zeustreuungsverhältniss von der beliebigen Fraunhofer'schen Linie ausgehend bis zur Linie A, oder

$${}_R i = \frac{{}_I n' - {}_R n'}{{}_I n - {}_R n}$$

zwischen den Grenzen R und I.

k die Lichtintensität. Ist dieselbe für eine bestimmte Stelle des Spectrums gemeint, so wird der Buchstabe der entsprechenden Fraunhofer'schen Linie links unten beigefügt, soll dagegen die zwischen zwei Linien des Spectrums befindliche Lichtmenge ausgedrückt werden, so setzt man die Buchstaben der beiden entsprechenden Linien ebenfalls links unten, getrennt durch ein Komma, bei. Also ist z. B. ${}_A k$ die Lichtintensität des Spectrums an der Stelle der Linie A, und ${}_{A,B} k$ die Lichtmenge des Spectrums zwischen den Linien A und B.

p der Ausdruck $\int k \frac{{}_S n' - {}_R n'}{{}_S n - {}_R n} dS$.

q der Ausdruck $\int k\, dS$.

v Werth des Quotienten: Bildgrösse durch Objectgrösse. Ist dieser Quotient grösser als 1, so bedeutet v eine Vergrösserung, wenn kleiner als 1, eine Verkleinerung. Der Zwischenwerth $v = 1$ bedeutet Abbildung in natürlicher Grösse.

III. Die Punkte werden mit grossen deutschen Buchstaben bezeichnet.

Es bedeutet:

𝔄 den Schnittpunkt eines einfallenden Strahles mit der Axe. 𝔄′ den Schnittpunkt eines gebrochenen Strahles mit der Axe.	Beide mit dem Index der zugehörigen brechenden Fläche.
𝔒 den Objectpunkt eines Systems brechender Flächen. 𝔅 den zugehörigen Bildpunkt. 𝔈 und 𝔈′ den ersten und zweiten Hauptpunkt. 𝔉 und 𝔉′ den ersten und zweiten Brennpunkt. 𝔊 und 𝔊′ den ersten und zweiten Knotenpunkt.	Diese tragen, durch ein Komma getrennt, den Index der ersten und letzten brechenden Fläche des Systems.

𝔐 den Radiusmittelpunkt.

𝔑 den Scheitel (Durchschnittspunkt) der brechenden Fläche mit der Axe.

𝔓 den Punkt, in welchem die brechende Fläche von einem einfallenden Strahle getroffen wird.

𝔔 den Schnittpunkt eines einfallenden Strahles oder seiner Verlängerung mit der zugehörigen Mittelpunktsebene (Ebene, welche durch den Radiusmittelpunkt senkrecht zur Axe gelegt ist).

𝔔′ den Schnittpunkt eines gebrochenen Strahles oder seiner Verlängerung mit der zugehörigen Mittelpunktsebene.

𝔑 den Punkt, in welchem eine von 𝔔 aus mit beliebigem Radius in der Richtung gegen das einfallende Licht hin beschriebene Sphäre durch eine von 𝔔 ausgehende und mit der optischen Axe parallele Gerade getroffen wird.

𝔑′ den Punkt, in welchem eine von 𝔔′ aus mit beliebigem Radius in der Richtung gegen das einfallende Licht hin beschriebene Sphäre durch eine von 𝔔′ ausgehende und mit der optischen Axe parallele Gerade getroffen wird.

𝔖 den Punkt der oben erwähnten (siehe Bedeutung von 𝔑) sphärischen Fläche, in welchem sie durch einen einfallenden Strahl oder seine Verlängerung getroffen wird.

𝔖′ den Punkt der oben erwähnten (siehe Bedeutung von 𝔑′) sphärischen Fläche, in welchem sie durch einen gebrochenen Strahl oder seine Verlängerung getroffen wird.

𝔗 den Punkt in der Mittelpunktsebene, in welchem die verlängerte Linie 𝔐𝔔 obige Sphäre (siehe Bedeutung von 𝔑) schneidet.

𝔗′ den Punkt in der Mittelpunktsebene, in welchem die verlängerte Linie 𝔐𝔔′ obige Sphäre (siehe Bedeutung von 𝔑′) schneidet.

} Alle diese Punkte tragen den Index der zugehörigen brechenden Fläche.

𝔃 den Schnittpunkt einer beliebigen zur Axe senkrechten Bildebene mit der optischen Axe.

𝔜 den Schnittpunkt eines gebrochenen Strahles mit der zur Axe senkrechten Bildebene.

} Beiden können zur Unterscheidung der Bildebenen die Indices 1, 2, ... rechts unten beigesetzt werden.

IV. Die Längen werden mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Bezüglich der Vorzeichen ist zu beachten:

Die Halbmesser erhalten Doppelzeichen; das obere Zeichen gilt für jene Fälle, in welchen die convexe, das untere, wenn die concave Seite der Fläche dem auffallenden Lichte zugewendet ist.

Die Längen in der Axe oder parallel zu ihr sind positiv, wenn sie vom Scheitel der ersten Fläche gezählt in der Richtung

des einfallenden Lichtes gelegen sind, im entgegengesetzten Falle negativ.

Die Längen senkrecht zur Axe sind positiv, wenn sie über derselben gelegen sind, unter derselben negativ.

Die Radiivectores sind immer positiv.

Es bedeutet:

A ($\mathfrak{NA}$) die Entfernung des Schnittpunktes eines einfallenden Strahles mit der Axe.

A' ($\mathfrak{NA}'$) die Entfernung des Schnittpunktes eines gebrochenen Strahles mit der Axe.

} Beide von dem Scheitel derjenigen brechenden Fläche an gezählt, deren Index sie tragen.

O die Objectweite (Entfernung eines in der Axe gelegenen Objectpunktes von der ersten brechenden Fläche).

B die Bildweite (Entfernung des in der Axe gelegenen Bildpunktes für parallel einfallende Strahlen von der letzten brechenden Fläche).

$B^{\dagger}$ die Entfernung der Einstellebenen von der letzten brechenden Fläche aus.

} Alle mit dem Index der zugehörigen brechenden Fläche.

C den Abstand der Radiusmittelpunkte zweier aufeinander folgender brechenden Flächen.

D den Abstand der Scheitel zweier aufeinander folgenden brechenden Flächen (die Dicke).

$\varDelta D = 2 R \sin^2 \frac{\eta}{2}$. Dieser Sinus versus des Oeffnungswinkels einer Fläche erhält den Index dieser Fläche.

} Beide mit dem Index des Mediums zwischen den Scheiteln der brechenden Flächen.

F ($\mathfrak{EF}$) die wahre Brennweite. Die wahre Brennweite eines Systems brechender Flächen erhält den Index der ersten und letzten brechenden Fläche, beide durch Komma getrennt.

E den Abstand des Hauptpunktes vom Scheitel der letzten brechenden Fläche.

G den Abstand des Knotenpunktes vom Scheitel der letzten brechenden Fläche.

} Beide mit dem Index der ersten und letzten brechenden Fläche, durch ein Komma getrennt.

H die Höhe des von einem Strahle getroffenen Punktes einer brechenden Fläche über der Axe.

$H^{\dagger}$ die Höhe des von einem Strahle getroffenen Punktes der Einstellebene.

R den Halbmesser einer brechenden Fläche.

U den in der Mittelpunktsebene gelegenen Radiusvector $\mathfrak{MQ}$, also die Projection eines einfallenden Strahles, beziehungsweise seiner Verlängerung auf die zugehörige Mittelpunktsebene.

U' den in der Mittelpunktsebene gelegenen Radiusvector $\mathfrak{MQ}'$, also die Projection eines gebrochenen Strahles, beziehungsweise seine Verlängerung auf die zugehörige Mittelpunktsebene.

} Alle mit dem Index der zugehörigen brechenden Fläche.

Z ($\mathfrak{N}\mathfrak{Z}$) den Abstand einer beliebigen zur Axe senkrechten Bildebene von der letzten brechenden Fläche aus.

X und Y die senkrechten Ordinaten eines in der eben genannten Bildebene gelegenen Punktes $\mathfrak{Y}$, in welchem die Ebene von einem austretenden Strahle getroffen wird. Die Grösse X ist vom Punkte $\mathfrak{Z}$ aus nach oben, und die Grösse Y von diesem Punkte nach der Seite hin zu nehmen.

$V = \left(\sqrt{X^2 + Y^2}\right)$ den in einer zur Axe senkrechten Bildebene gelegenen Radiusvector $\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}$.

} Allen können zur Unterscheidung der Bildebenen die Indices 1, 2, ... rechts unten beigesetzt werden.

V. Die Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet und tragen den Index der zugehörigen brechenden Fläche.

Es bedeutet:

α den Winkel eines in der Axenebene liegenden einfallenden Strahles mit der Axe.

α' den Winkel eines in der Axenebene liegenden gebrochenen Strahles mit der Axe.

β den halben Oeffnungswinkel eines parallel zur Axe einfallenden Strahles für ein beliebiges System brechender Flächen (den Winkel, welchen der in das System parallel zur Axe einfallende Strahl nach jeder Brechung mit der optischen Axe bildet). Dieser Oeffnungswinkel erhält den Index der ersten und letzten brechenden Fläche, durch Komma getrennt. Es ist also β der specielle Fall von α', für welchen $\alpha = 0$ war. Bezüglich der Vorzeichen dieser Winkel α, α' und β ist zu beachten, dass wenn das Auge aus dem Schnittpunkte des Strahles mit der Axe in der Richtung gegen das einfallende Licht sieht, der Winkel des Strahles von der Axe aus nach oben positiv, nach unten negativ zu nehmen ist.

ε den halben Oeffnungswinkel eines parallel zum Hauptstrahl einfallenden, ausser der Axenebene gelegenen Strahles (den Winkel, welchen der in das System parallel zum Hauptstrahl einfallende Randstrahl nach jeder Brechung mit der Richtung des einfallenden Hauptstrahles bildet). Es hat also der Winkel ε die gleiche Bedeutung für Randstrahlen ausser der Axenebene, wie β für Randstrahlen eines parallel zur Axe einfallenden Strahlenbüschels. Die Vorzeichen von ε ergeben sich aus den für denselben nachfolgend aufgestellten Formeln.

φ den Einfallswinkel.

φ' den Brechungswinkel.

$\delta = (\varphi - \varphi')$ den Ablenkungswinkel.

γ den totalen Ablenkungswinkel eines auf ein Prisma einfallenden Lichtstrahles.

ψ den Winkel eines Probeprismas.

ϑ den Winkel eines zweiten mit dem ersten zu combinirenden Probeprismas.

χ den Reflexionswinkel

η den Winkel des Einfallslothes (Radius) mit der optischen Axe.

} Die Vorzeichen dieser Winkel sind durch die schon angenommenen Vorzeichen der Längen und Winkel bestimmt, und ergeben sich direct aus den für dieselben nachfolgend aufgestellten Formeln.

14*

λ den Winkel, welchen ein einfallender Strahl in der Einfallsebene mit $\mathfrak{M}\mathfrak{O}$ bildet (der innere Winkel bei $\mathfrak{O}$ in dem ebenen Dreiecke $\mathfrak{P}\mathfrak{O}\mathfrak{M}$).

λ' den Winkel, welchen ein gebrochener Strahl in der Einfallsebene mit $\mathfrak{M}\mathfrak{O}'$ bildet (der innere Winkel bei $\mathfrak{O}'$ in dem Dreiecke $\mathfrak{P}\mathfrak{O}'\mathfrak{M}$).

τ den Winkel, welchen ein einfallender Strahl mit der durch den Punkt $\mathfrak{O}$ gezogenen Parallelen zur Axe bildet.

τ' den Winkel, welchen ein gebrochener Strahl mit der durch den Punkt $\mathfrak{O}'$ gezogenen Parallelen zur Axe bildet.

π den Winkel, welchen die Projection eines einfallenden Strahles auf die Mittelpunkstsebene im Punkte $\mathfrak{O}$ mit der Richtung nach oben bildet.

π' den Winkel, welchen die Projection eines gebrochenen Strahles auf die Mittelpunktsebene im Punkte $\mathfrak{O}'$ mit der Richtung nach oben bildet.

ζ den Winkel, welchen die in der Mittelpunktsebene gelegenen Polarcoordinaten $\mathfrak{M}\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{O}'$ mit der von $\mathfrak{M}$ ausgehenden Richtung nach oben bildet.

ξ den Winkel, welchen die in einer beliebigen Bildebene gelegene Polarcoordinate $\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}$ mit der von $\mathfrak{Z}$ ausgehenden Richtung nach oben bildet. Diesem Winkel kann zur Unterscheidung der Bildebene, in welcher er liegt, der Index 1, 2, . . rechts unten beigesetzt werden.

} Diese Winkel zählen von der nach oben gehenden Richtung aus und zwar von 0^0 bis 360^0 mit dem Gange eines Uhrzeigers.

$\varkappa$ den Oeffnungswinkel für einen Randstrahl ausser der Axenebene nach der brechenden Fläche, dessen Index er trägt.

ω einen Hilfswinkel, und zwar ist $\operatorname{tg}\omega = \frac{n_{r-1}}{n_{r+1}}$. Dieser Winkel erhält den Index der zugehörigen brechenden Fläche.

B. Formel zur Berechnung der Brechungscoefficienten aus den Beobachtungsgrössen.

$$n = \frac{\sin\frac{\gamma_{0,2} + \psi_1}{2}}{\sin\frac{\psi_1}{2}}.$$

C. Formeln zur trigonometrischen Durchrechnung durch ein System von Prismen von $s + 1$ brechenden Flächen.

$$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$$

$$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$$

$$\varphi_2 = \varphi_0' \mp \psi_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sin\varphi_{2s}' = \sin\varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$$

$$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi_{2s}'$$

$$\gamma_{1,2s-1} = \delta_0 + \delta_2 + \delta_4 + \cdots \delta_{2s}.$$

D. Formeln zur trigonometrischen Durchrechnung durch ein Linsensystem von $s + 1$ brechenden Flächen.

1. Für Strahlen, die von einem in der Axe gelegenen unendlich entfernten Objectpunkte ausgehen.

a) Kein Radius sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	$\sin \varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$
$\varphi_0' = \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$
$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \varphi_0}{\beta_{0,0}}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \beta_{0,0}}$
$\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\, \beta_{0,0}}{\pm R_2}$	$\sin \varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1) \sin \beta_{0,0}}{\pm R_2}$
$\varphi_2' = \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$	$\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$
$\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$	$\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$
$[H_2 = \pm R_2 (\varphi_2' + \beta_{0,2})]$	$[H_2 = \pm R_2 \sin (\varphi_2' + \beta_{0,2})]$
$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \varphi_2'}{\beta_{0,2}}$	$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin \varphi_2'}{\sin \beta_{0,2}}$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2r} = \frac{(A_{2r-2}' \mp R_{2r} - D_{2r-1})\, \beta_{0,2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\sin \varphi_{2r} = \frac{(A_{2r-2}' \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \sin \beta_{0,2r-2}}{\pm R_{2r}}$
$\varphi_{2r}' = \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin \varphi_{2r}' = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi_{2r}'$	$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi_{2r}'$
$\beta_{0,2r} = \delta_{2r} + \beta_{0,2r-2}$	$\beta_{0,2r} = \delta_{2r} + \beta_{0,2r-2}$
$[H_{2r} = \pm R_{2r} (\varphi_{2r}' + \beta_{0,2r})]$	$[H_{2r} = \pm R_{2r} \sin (\varphi_{2r}' + \beta_{0,2r})]$
$A_{2r}' \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \varphi_{2r}'}{\beta_{0,2r}}$	$A_{2r}' \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \sin \varphi_{2r}'}{\sin \beta_{0,2r}}$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2s} = \frac{(A_{2s-2}' \mp R_{2s} - D_{2s-1})\, \beta_{0,2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin \varphi_{2s} = \frac{(A_{2s-2}' \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin \beta_{0,2s-2}}{\pm R_{2s}}$

a) Kein Radius sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\varphi_{2s}' = \varphi_{2s}\dfrac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin\varphi_{2s}' = \sin\varphi_{2s}\dfrac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi_{2s}'$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi_{2s}'$
$\beta_{0,2s} = \delta_{2s} + \beta_{0,2s-2}$	$\beta_{0,2s} = \delta_{2s} + \beta_{0,2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s}(\varphi_{2s}' + \beta_{0,2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s}\sin(\varphi_{2s}' + \beta_{0,2s})]$
$A_{2s}' \mp R_{2s} = \dfrac{\pm R_{2s}\varphi_{2s}'}{\beta_{0,2s}}$	$A_{2s}' \mp R_{2s} = \dfrac{\pm R_{2s}\sin\varphi_{2s}'}{\sin\beta_{0,2s}}$
$B_{2s} = A_{2s}'$	
$F_{0,2s} = \dfrac{H_0}{\beta_{0,2s}}$	$F_{0,2s} = \dfrac{H_0}{\operatorname{tg}\beta_{0,2s}}$
$E_{0,2s} = A_{2s}' - F_{0,2s}$	$E_{0,2s} = A_{2s}' - F_{0,2s}$

b) Der erste Radius unendlich, die übrigen nicht sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\varphi_2 = \dfrac{H_0}{\pm R_2}$	$\sin\varphi_2 = \dfrac{H_0}{\pm R_2}$
$\varphi_2' = \varphi_2\dfrac{n_1}{n_3}$	$\sin\varphi_2' = \sin\varphi_2\dfrac{n_1}{n_3}$
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$
$\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$	$\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$
$[H_2 = \pm R_2(\varphi_2' + \beta_{0,2})]$	$[H_2 = \pm R_2\sin(\varphi_2' + \beta_{0,2})]$
$A_2' \mp R_2 = \dfrac{\pm R_2\varphi_2'}{\beta_{0,2}}$	$A_2' \mp R_2 = \dfrac{\pm R_2\sin\varphi_2'}{\sin\beta_{0,2}}$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2r} = \dfrac{(A_{2r-2}' \mp R_{2r} - D_{2r-1})\,\beta_{0,2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\sin\varphi_{2r} = \dfrac{(A_{2r-2}' \mp R_{2r} - D_{2r-1})\sin\beta_{0,2r-2}}{\pm R_{2r}}$
$\varphi_{2r}' = \varphi_{2r}\dfrac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin\varphi_{2r}' = \sin\varphi_{2r}\dfrac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi_{2r}'$	$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi_{2r}'$
$\beta_{0,2r} = \delta_{2r} + \beta_{0,2r-2}$	$\beta_{0,2r} = \delta_{2r} + \beta_{0,2r-2}$
$[H_{2r} = \pm R_{2r}(\varphi_{2r}' + \beta_{0,2r})]$	$[H_{2r} = \pm R_{2r}\sin(\varphi_{2r}' + \beta_{0,2r})]$

b) Der erste Radius unendlich, die übrigen nicht sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$A'_{2r} \mp R_{2r} = \dfrac{\pm R_{2r}\,\varphi'_{2r}}{\beta_{0,2r}}$	$A'_{2r} \mp R_{2r} = \dfrac{\pm R_{2r}\sin\varphi'_{2r}}{\sin\beta_{0,2r}}$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2s} = \dfrac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\,\beta_{0,2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin\varphi_{2s} = \dfrac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\sin\beta_{0,2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\varphi'_{2s} = \varphi_{2s}\dfrac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin\varphi'_{2s} = \sin\varphi_{2s}\dfrac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\beta_{0,2s} = \delta_{2s} + \beta_{0,2s-2}$	$\beta_{0,2s} = \delta_{2s} + \beta_{0,2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s}(\varphi'_{2s} + \beta_{0,2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s}\sin(\varphi'_{2s} + \beta_{0,2s})]$
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \dfrac{\pm R_{2s}\,\varphi'_{2s}}{\beta_{0,2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \dfrac{\pm R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\beta_{0,2s}}$
$B_{2s} = A'_{2s}$	
$F_{0,2s} = \dfrac{H_0}{\beta_{0,2s}}$	$F_{0,2s} = \dfrac{H_0}{\operatorname{tg}\beta_{0,2s}}$
$E_{0,2s} = A'_{2s} - F_{0,2s}$	$E_{0,2s} = A'_{2s} - F_{0,2s}$

c) Der erste Radius sehr lang, die übrigen nicht.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\varphi_0 = \dfrac{H_0}{\pm R_0} = \eta_0$	$\sin\varphi_0 = \dfrac{H_0}{\pm R_0} = \sin\eta_0$
$\varphi_0' = \varphi_0\dfrac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0\dfrac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$
$A_0' = \dfrac{H_0}{\beta_{0,0}}$	$A_0' = \dfrac{H_0}{\operatorname{tg}\beta_{0,0}} \mp 2R_0\sin^2\dfrac{\eta_0}{2}$
$\varphi_2 = \dfrac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\,\beta_{0,0}}{\pm R_2}$	$\sin\varphi_2 = \dfrac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\sin\beta_{0,0}}{\pm R_2}$
$\varphi_2' = \varphi_2\dfrac{n_1}{n_3}$	$\sin\varphi_2' = \sin\varphi_2\dfrac{n_1}{n_3}$
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$
$\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$	$\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$

c) Der erste Radius sehr lang, die übrigen nicht.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$[H_2 = \pm R_2 (\varphi_2' + \beta_{0,2})]$	$[H_2 = \pm R_2 \sin (\varphi_2' + \beta_{0,2})]$
$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \varphi_2'}{\beta_{0,2}}$	$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin \varphi_2'}{\sin \beta_{0,2}}$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \beta_{0,2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\sin \varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \sin \beta_{0,2r-2}}{\pm R_{2r}}$
$\varphi'_{2r} = \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin \varphi'_{2r} = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$	$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$
$\beta_{0,2r} = \delta_{2r} + \beta_{0,2r-2}$	$\beta_{0,2r} = \delta_{2r} + \beta_{0,2r-2}$
$[H_{2r} = \pm R_{2r} (\varphi'_{2r} + \beta_{0,2r})]$	$[H_{2r} = \pm R_{2r} \sin (\varphi'_{2r} + \beta_{0,2r})]$
$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \varphi'_{2r}}{\beta_{0,2r}}$	$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \sin \varphi'_{2r}}{\sin \beta_{0,2r}}$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \beta_{0,2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin \varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin \beta_{0,2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\varphi'_{2s} = \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin \varphi'_{2s} = \sin \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\beta_{0,2s} = \delta_{2s} + \beta_{0,2s-2}$	$\beta_{0,2s} = \delta_{2s} + \beta_{0,2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s} (\varphi'_{2s} + \beta_{0,2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin (\varphi'_{2s} + \beta_{0,2s})]$
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \varphi'_{2s}}{\beta_{0,2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi'_{2s}}{\sin \beta_{0,2s}}$
$B_{2s} = A'_{2s}$	
$F_{0,2s} = \frac{H_0}{\beta_{0,2s}}$	$F_{0,2s} = \frac{H_0}{\operatorname{tg} \beta_{0,2s}}$
$E_{0,2s} = A'_{2s} - F_{0,2s}$	$E_{0,2s} = A'_{2s} - F_{0,2s}$

d) Der $r+1^{\text{te}}$ Radius unendlich, die übrigen nicht sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	$\sin\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$
$\varphi_0' = \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$
$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \varphi_0'}{\beta_{0,0}}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\beta_{0,0}}$
$\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\,\beta_{0,0}}{\pm R_2}$	$\sin\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\sin\beta_{0,0}}{\pm R_2}$
$\varphi_2' = \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$	$\sin\varphi_2' = \sin\varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$
$\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$	$\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$
$[H_2 = \pm R_2 (\varphi_2' + \beta_{0,2})]$	$[H_2 = \pm R_2 \sin(\varphi_2' + \beta_{0,2})]$
$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \varphi_2'}{\beta_{0,2}}$	$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin\varphi_2'}{\sin\beta_{0,2}}$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2r} = \beta_{0,2r-2}$	$\varphi_{2r} = \varphi_{0,2r-2}$
$\varphi_{2r}' = \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin\varphi_{2r}' = \sin\varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\beta_{0,2r} = \varphi_{2r}'$	$\beta_{0,2r} = \varphi_{2r}'$
$A_{2r}' = \frac{(A_{2r-2}' - D_{2r-1})\,\beta_{0,2r-2}}{\beta_{0,2r}}$	$A_{2r}' = \frac{(A_{2r-2}' - D_{2r-1})\,\mathrm{tg}\,\beta_{0,2r-2}}{\mathrm{tg}\,\beta_{0,2r}}$
$[H_{2r} = A_{2r}' \beta_{0,2r}]$	$[H_{2r} = A_{2r}'\,\mathrm{tg}\,\beta_{0,2r}]$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2s} = \frac{(A_{2s-2}' \mp R_{2s} - D_{2s-1})\,\beta_{0,2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin\varphi_{2s} = \frac{(A_{2s-2}' \mp R_{2s} - D_{2s-1})\sin\beta_{0,2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\varphi_{2s}' = \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin\varphi_{2s}' = \sin\varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi_{2s}'$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi_{2s}'$
$\beta_{0,2s} = \delta_{2s} + \beta_{0,2s-2}$	$\beta_{0,2s} = \delta_{2s} + \beta_{0,2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s} (\varphi_{2s}' + \beta_{0,2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin(\varphi_{2s}' + \beta_{0,2s})]$

d) Der $r+1^{te}$ Radius unendlich, die übrigen nicht sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s}\,\varphi'_{2s}}{\beta_{0,2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\beta_{0,2s}}$
$B_{2s} = A'_{2s}$	
$F_{0,2s} = \frac{H_0}{\beta_{0,2s}}$	$F_{0,2s} = \frac{H_0}{\operatorname{tg}\beta_{0,2s}}$
$E_{0,2s} = A'_{2s} - F_{0,2s}$	$E_{0,2s} = A'_{2s} - F_{0,2s}$

e) Der $r+1^{te}$ Radius sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	$\sin\varphi_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$
$\varphi_0' = \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \beta_{0,0} = \varphi_0 - \varphi_0'$
$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0\,\varphi_0'}{\beta_{0,0}}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\beta_{0,0}}$
$\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\,\beta_{0,0}}{\pm R_2}$	$\sin\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\sin\beta_{0,0}}{\pm R_2}$
$\varphi_2' = \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$	$\sin\varphi_2' = \sin\varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$
$\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$	$\beta_{0,2} = \delta_2 + \beta_{0,0}$
$[H_2 = \pm R_2(\varphi_2' + \beta_{0,2})]$	$[H_2 = \pm R_2 \sin(\varphi_2' + \beta_{0,2})]$
$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2\,\varphi_2'}{\beta_{0,2}}$	$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin\varphi_2'}{\sin\beta_{0,2}}$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1})\beta_{0,2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\sin\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1})\sin\beta_{0,2r-2}}{\pm R_{2r}}$
$\varphi'_{2r} = \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin\varphi'_{2r} = \sin\varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$	$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$

e) Der $r+1^{te}$ Radius sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\beta_{0,2r} = \delta_{2r} + \beta_{0,2r-2}$	$\beta_{0,2r} = \delta_{2r} + \beta_{0,2r-2}$
$\eta_{2r} = \varphi'_{2r} + \beta_{0,2r}$	$\eta_{2r} = \varphi'_{2r} + \beta_{0,2r}$
$[H_{2r} = H_{2r-2} - D_{2r-1}\,\beta_{0,2r-2}]$	$[H_{2r} = H_{2r-2} - (D_{2r-1} \mp \mp \Delta D_{2r-2} \pm \Delta D_{2r})\operatorname{tg}\beta_{0,2r-2}]$
$A'_{2r} = \dfrac{H_{2r}}{\beta_{0,2r}}$	$A'_{2r} = \dfrac{H_{2r}}{\operatorname{tg}\beta_{0,2r}} \pm 2R_{2r}\sin^2\dfrac{\eta_{2r}}{2}$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2s} = \dfrac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\,\beta_{0,2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin\varphi_{2s} = \dfrac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\sin\beta_{0,2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\varphi'_{2s} = \varphi_{2s}\dfrac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin\varphi'_{2s} = \sin\varphi_{2s}\dfrac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\beta_{0,2s} = \delta_{2s} + \beta_{0,2s-2}$	$\beta_{0,2s} = \delta_{2s} + \beta_{0,2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s}(\varphi_{2s} + \beta_{0,2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s}\sin(\varphi'_{2s} + \beta_{0,2s})]$
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \dfrac{\pm R_{2s}\,\varphi'_{2s}}{\beta_{0,2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \dfrac{\pm R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\beta_{0,2s}}$
$B_{2s} = A'_{2s}$	
$F_{0,2s} = \dfrac{H_0}{\beta_{0,2s}}$	$F_{0,2s} = \dfrac{H_0}{\operatorname{tg}\beta_{0,2s}}$
$E_{0,2s} = A'_{2s} - F_{0,2s}$	$E_{0,2s} = A'_{2s} - F_{0,2s}$

II. Für Strahlen, die von einem seitlich von der Axe gelegenen unendlich entfernten Objectpunkte ausgehen.

a) Für Strahlen, die in der Axenebene gelegen sind.

1) Kein Radius unendlich oder sehr lang.	2) Der erste Radius unendlich.
$\sin\varphi_0 = \dfrac{(E_{2s,0} \mp R_0)\sin\tau_0}{\pm R_0}$ [1]	— [1]
$\eta_0 = \varphi_0 + \tau_0$	—
$H_0 = \pm R_0 \sin\eta_0$	$H_0 = E_{2s,0}\operatorname{tg}\tau_0$

1) Formeln zur Berechnung des Näherungswerthes von H_0 für den Hauptstrahl, für welchen die Winkel $\alpha_0 = \tau_0$, $\alpha_0' = \tau_0'$ .... $\alpha_{2s} = \tau_{2s}$, $\alpha'_{2s} = \tau'_{2s}$.

1) Kein Radius unendlich oder sehr lang.	2) Der erste Radius unendlich.
$\sin \eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	—
$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$	$\varphi_0 = \alpha_0$
$\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$
$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$	$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$
$A_0' \mp R_0 = \pm \frac{R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \alpha_0'}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \alpha_0'}$
. . . .	. . . .
$\sin \varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \sin \alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\sin \varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \pm R_{2r} - D_{2r-1}) \sin \alpha'_{r-2}}{\pm R_{2r}}$
$\sin \varphi'_{2r} = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin \varphi'_{2r} = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$	$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$
$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$	$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$
$[H_{2r} = \pm R_{2r} \sin(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r})]$	$[H_{2r} = \pm R_{2r} \sin(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r}]$
$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \sin \varphi'_{2r}}{\sin \alpha_{2r}}$	$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \sin \varphi'_{2r}}{\sin \alpha'_{2r}}$
. . . .	. . . .
$\sin \varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin \alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin \varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin \alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\sin \varphi'_{2s} = \sin \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin \varphi'_{2s} = \sin \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$	$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi'_{2s}}{\sin \alpha'_{2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi'_{2s}}{\sin \alpha'_{2s}}$
$H^*_{2s} = (A'_{2s} - B^*_{2s}) \operatorname{tg} \alpha'_{2s}$	$H^*_{2s} = (A'_{2s} - B^*_{2s}) \operatorname{tg} \alpha'_{2s}$
$X = \frac{\sin \varphi_0 \, R_0 \, \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0}$ [1]	$X = \frac{\sin \varphi_0 \, R_0 \, \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0}$ [1]
$V^2 = X^2 + Y^2$	$V^2 = U^2 + Y^2$
$\frac{X}{V} = \cos \zeta_0$	$\frac{X}{V} = \cos \zeta_0$
$U_0 = V_0$	$U_0 = V_0$

1) Formeln zur Berechnung der Constanten für einen Strahl ausser der Axenebene.

3) Der erste Radius sehr lang.	4) Der $r+1^{te}$ Radius unendlich.
$\sin\varphi_0 = \frac{(E_{2s,0} \mp R_0)\sin\tau_0}{\pm R_0}$ [1]	$\sin\varphi_0 = \frac{(E_{2s,0} \mp R_0)\sin\tau_0}{\pm R_0}$ [1]
$\eta_0 = \varphi_0 + \tau_0$	$\eta_0 = \varphi_0 + \tau_0$
$H_0 = \pm R_0 \sin\eta_0$	$H_0 = \pm R_0 \sin\eta_0$
$\sin\eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	$\sin\eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$
$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$	$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$
$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$
$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$	$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$
$A_0' = \frac{H_0}{\operatorname{tg}\alpha_0'} \pm 2 R_0 \sin^2\frac{\eta_0}{2}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\alpha_0'}$
. . . .	. . . .
$\sin\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1})\sin\alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\varphi_{2r} = -\alpha'_{2r-2}$
$\sin\varphi'_{2r} = \sin\varphi_{2r}\frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin\varphi'_{2r} = \sin\varphi_{2r}\frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$	———
$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$	$\alpha'_{2r} = \varphi_{2r}$
$[H_{2r} = \pm R_{2r}\sin(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r})]$	$A'_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} - D_{2r-1})\operatorname{tg}\alpha'_{2r-2}}{\operatorname{tg}'_{2r}}$
$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r}\sin\varphi'_{2r}}{\sin\alpha'_{2r}}$	$[H_{2r} = A'_{2r}\operatorname{tg}\alpha'_{2r}]$
. . . .	. . . .
$\sin\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\sin\alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\sin\alpha_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\sin\varphi'_{2s} = \sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin\varphi'_{2s} = \sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$	$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s}\sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s}\sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$

1) Formeln zur Berechnung des Näherungswerthes von H_0 für den Hauptstrahl, für welchen die Winkel $\alpha_0 = \tau_0$, $\alpha_0' = \tau_0'$ .... $\alpha_{2s} = \tau_{2s}$, $\alpha'_{2s} = \tau'_{2s}$.

3) Der erste Radius sehr lang.

$$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi'_{2s}}{\sin \alpha'_{2s}}$$

$$H^*_{2s} = (A'_{2s} - B^*_{2s}) \operatorname{tg} \alpha'_{2s}$$

$$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{\sin \varphi_0 R_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0} \\ V^2 = X^2 + Y^2 \\ \cos \zeta_0 = \dfrac{X}{V} \\ U_0 = V_0 \end{array}\right\} {}^{1)}$$

4) Der $r+1^{\text{te}}$ Radius unendlich.

$$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi'_{2s}}{\sin \alpha'_{2s}}$$

$$H^*_{2s} = (A'_{2s} - B^*_{2s}) \operatorname{tg} \alpha'_{2s}$$

$$\left.\begin{array}{l} H = \dfrac{\sin \varphi_0 R_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0} \\ V^2 = X^2 + Y^2 \\ \cos \zeta_0 = \dfrac{X}{V} \\ U_0 = V_0 \end{array}\right\} {}^{1)}$$

5) Der $r+1^{\text{te}}$ Radius sehr lang.

$$\left.\begin{array}{l} \sin \varphi_0 = \dfrac{(E_{2s,0} \mp R_0) \sin \tau_0}{\pm R_0} \\ \eta_0 = \varphi_0 + \tau_0 \\ H_0 = \pm R_0 \sin \eta_0 \end{array}\right\} {}^{2)}$$

$$\sin \eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$$

$$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$$

$$\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$$

$$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$$

$$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$$

$$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \alpha_0'},$$

. . . .

$$\sin \varphi_{2r} = \\ = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \sin \alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$$

$$\sin \varphi'_{2r} = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$$

$$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$$

$$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$$

5) Der $r+1^{\text{te}}$ Radius sehr lang.

$$\eta_{2r} = \varphi_{2r} + \alpha'_{2r}$$

$$H_{2r} = H'_{2r-2} - \\ -(D_{2r-1} - \Delta D_{2r-2} \pm \Delta D_{2r}) \operatorname{tg} \alpha'_{2r-2}$$

$$A'_{2r} = \frac{H_{2r}}{\operatorname{tg} \alpha'_{2r}} \pm 2 R_{2r} \sin^2 \frac{\eta_{2r}}{2}$$

. . . .

$$\sin \varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s} \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin \alpha'_{2s}}{\pm R_{2s}}$$

$$\sin \varphi'_{2s} = \sin \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$$

$$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$$

$$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$$

$$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin (\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$$

$$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi'_{2s}}{\sin \alpha'_{2s}}$$

$$H^*_{2s} = (A'_{2s} - B^*_{2s}) \operatorname{tg} \alpha'_{2s}$$

$$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{\sin \varphi_0 R_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \tau_0} \\ V^2 = X^2 + Y^2 \\ \cos \zeta_0 = \dfrac{X}{V} \\ U_0 = V \end{array}\right\} {}^{1)}$$

1) Formeln zur Berechnung der Constanten für einen Strahl ausser der Axenebene.

2) Formeln zur Berechnung des Näherungswerthes von H_0 für den Hauptstrahl, für welchen die Winkel $\alpha_0 = \tau_0$, $\alpha_0' = \tau_0'$ .... $\alpha_{2s} = \tau_{2s}$. $\alpha'_{2s} = \tau'_{2s}$.

b. Für Strahlen die ausser der Axenebene gelegen sind.

1) Kein Radius unendlich.	2) Erster Radius unendlich.	3) Der $r+1^{\text{te}}$ Radius unendlich.
$\cos\lambda_0 = \mp \sin\tau_0 \cos(\pi_0 - \zeta_0)$ [1]	$\cos\lambda_0 = \mp \sin\tau_0 \cos(\pi_0 - \zeta_0)$	$\cos\lambda_0 = \mp \sin\tau_0 \cos(\pi_0 - \zeta_0)$
$\sin\varphi_0 = \frac{U_0 \sin\lambda_0}{R_0}$	$\varphi_0 = \tau_0$	$\sin\varphi_0 = \frac{U_0 \sin\lambda_0}{R_0}$
$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\lambda_0' = \lambda_0 + (\varphi_0 - \varphi_0')$	$\lambda_0' = \lambda_0 + (\varphi_0 - \varphi_0')$	$\lambda_0' = \lambda_0 + (\varphi_0 - \varphi_0')$
$U_0' = \frac{R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\lambda_0'} = U_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}} \frac{\sin\lambda_0}{\sin\lambda_0'}$	$U_0' = U_0$	$U_0' = \frac{R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\lambda_0'} = U_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}} \frac{\sin\lambda_0}{\sin\lambda_0'}$
$\sin\tau_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0) =$ $= \frac{\sin\lambda_0'}{\sin\lambda_0} \sin\tau_0 \sin(\pi_0 - \zeta_0)$	$\tau_0' = \varphi_0'$	$\sin\tau_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0) =$ $= \frac{\sin\lambda_0'}{\sin\lambda_0} \sin\tau_0 \sin(\pi_0 - \zeta_0)$
$\sin\tau_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) = \mp \cos\lambda_0'$	$\pi_0' = \pi_0$	$\sin\tau_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) = \mp \cos\lambda_0'$
[$\operatorname{tg}\tau_0' = \operatorname{tg}\tau_0 \frac{\sin(\pi_0 - \zeta_0)}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$ $\pm \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0')}{\sin(\pi_0 - \pi_0')} = \frac{\sin\lambda_0 \sin\tau_0'}{\sin(\pi_0 - \zeta_0)}$ $= \frac{\sin\lambda_0' \sin\tau_0}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$ $\sin\varepsilon_0 = \sin\tau_0' \sin\pi_0'$ $\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0') \sin(\varphi_0 + \varphi_0')}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_0'} = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$] [1]	[$\sin\lambda_0 \sin\tau_0' = \sin\lambda_0' \sin\tau_0$ $\sin\varepsilon_0 = \sin\tau_0' \sin\pi_0'$ $\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0') \sin(\varphi_0 + \varphi_0')}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_0'} = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$] [1]	[$\operatorname{tg}\tau_0' = \operatorname{tg}\tau_0 \frac{\sin(\pi_0 - \zeta_0)}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$ $\pm \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0')}{\sin(\pi_0 - \pi_0')} = \frac{\sin\lambda_0 \sin\tau_0'}{\sin(\pi_0 - \zeta_0)} =$ $= \frac{\sin\lambda_0' \sin\tau_0}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$ $\sin\varepsilon_0 = \sin\tau_0' \sin\pi_0'$ $\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0') \sin(\varphi + \varphi_0')}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_0'} = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$] [1]

1) Controlformeln.

1) Kein Radius unendlich.	2) Erster Radius unendlich.	3) Der $r+1^{\text{te}}$ Radius unendlich.
$\tau_2 = \tau_0'$	$\tau_2 = \tau_0'$	$\tau_2 = \tau_0'$
$\pi_2 = \pi_0'$	$\pi_2 = \pi_0'$	$\pi_2 = \pi_0'$
$C_1 = D_1 \mp R_0 \pm R_2$	$C_1 = D_1 \pm R_2$	$C_1 = D_1 \mp R_0 \pm R_2$
$U_2 \sin(\pi_0' - \zeta_2) = U_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0)$	$U_2 = U_0'$	$U_2 \sin(\pi_0' - \zeta_2) = U_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0)$
$U_2 \cos(\pi_0' - \zeta_2) =$	$U_2 [\cos(\pi_0' - \zeta_2) - \cos(\pi_0' - \zeta_0)]$	$U_2 \cos(\pi_0' - \zeta_2) =$
$= U_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) - C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$	$= - C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$	$= U_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) - C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$
$\left[\frac{C_1 \operatorname{tg} \tau_0'}{\sin(\zeta_0 - \zeta_2)} = \frac{U_2}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)} = \frac{U_0'}{\sin(\pi_0' - \zeta_2)}\right]$[1]	$\left[\frac{C_1 \operatorname{tg} \tau_0'}{\sin(\zeta_0 - \zeta_2)} = \frac{U_2}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)} = \frac{U_0'}{\sin(\pi_0' - \zeta_2')}\right]$[1]	$\left[\frac{C_1 \operatorname{tg} \tau_0'}{\sin(\zeta_0 - \zeta_2)} = \frac{U_2}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)} = \frac{U_0'}{\sin(\pi_0' - \zeta_2)}\right]$[1]
. . . .	. . . .	. . . .
$\cos \lambda_{2r} = \mp \sin \tau_{2r} \cos(\pi_{2r} - \zeta_{2r})$	$\cos \lambda_{2r} = \mp \sin \tau_{2r} \cos(\pi_{2r} - \zeta_{2r})$	$\cos \lambda_{2r} = \mp \sin \tau_{2r} \cos(\pi_{2r} - \zeta_{2r})$
$\sin \varphi_{2r} = \frac{U_{2r} \sin \lambda_{2r}}{R_{2r}}$	$\sin \varphi_{2r} = \frac{U_{2r} \sin \lambda_{2r}}{R_{2r}}$	$\varphi_{2r} = \tau_{2r}$
$\sin \varphi_{2r}' = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin \varphi_{2r}' = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin \varphi_{2r}' = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\lambda_{2r}' = \lambda_{2r} + (\varphi_{2r} - \varphi_{2r}')$	$\lambda_{2r}' = \lambda_{2r} + (\varphi_{2r} - \varphi_{2r}')$	$\lambda_{2r}' = \lambda_{2r} + (\varphi_{2r} - \varphi_{2r}')$
$U_{2r}' = \frac{R_{2r} \sin \varphi_{2r}'}{\sin \lambda_{2r}'} =$	$U_{2r}' = \frac{R_{2r} \sin \varphi_{2r}'}{\sin \lambda_{2r}'} =$	
$= U_{2r-2} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}} \frac{\sin \lambda_{2r}}{\sin \lambda_{2r}'}$	$= U_{2r-2} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}} \frac{\sin \lambda_{2r}}{\sin \lambda_{2r}'}$	$U_{2r}' = U_{2r}$

1) Controlformeln.

$$\sin\tau'_{2r}\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r}) = \frac{\sin\lambda'_{2r}}{\sin\lambda_{2r}}\sin\tau_{2r}\sin(\pi_{2r}-\zeta_{2r})$$

$$\sin\tau'_{2r}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r}) = \mp\cos\lambda'_{2r}$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\tau'_{2r} = \operatorname{tg}\tau_{2r}\dfrac{\sin(\pi_{2r}-\zeta_{2r})}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})} \\ \quad \pm\dfrac{\sin(\varphi_{2r}-\varphi'_{2r})}{\sin(\pi_{2r}-\pi'_{2r})} = \\ \quad = \dfrac{\sin\lambda_{2r}\sin\tau'_{2r}}{\sin(\pi_{2r}-\zeta_{2r})} = \dfrac{\sin\lambda'_{2r}\sin\tau_{2r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})} \\ \sin\varepsilon_{2r} = \sin\tau'_{2r}\sin\pi'_{2r} \\ \dfrac{\sin(\varphi_{2r}-\varphi'_{2r})\sin(\varphi_{2r}+\varphi'_{2r})}{\sin\varphi_{2r}\sin\varphi'_{2r}} = \\ \quad = 2\operatorname{cotg}2\omega \end{array}\right]^{1)}$$

$$\tau_{2r+2} = \tau'_{2r}$$

$$\pi_{2r+2} = \pi'_{2r}$$

$$C_{2r+1} = D_{2r+1} \mp R_{2r} \pm R_{2r+2}$$

$$U_{2r+2}\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2}) = U'_{2r}\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})$$

$$U_{2r+2}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2}) = U'_{2r}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r}) - C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}$$

$$\sin\tau'_{2r}\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r}) = \frac{\sin\lambda'_{2r}}{\sin\lambda_{2r}}\sin\tau_{2r}\sin(\pi_{2r}-\zeta_{2r})$$

$$\sin\tau'_{2r}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r}) = \mp\cos\lambda'_{2r}$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\tau'_{2r} = \operatorname{tg}\tau_{2r}\dfrac{\sin(\pi_{2r}-\zeta_{2r})}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})} \\ \quad \pm\dfrac{\sin(\varphi_{2r}-\varphi'_{2r})}{\sin(\pi_{2r}-\pi'_{2r})} = \\ \quad = \dfrac{\sin\lambda_{2r}\sin\tau'_{2r}}{\sin(\pi_{2r}-\zeta_{2r})} = \dfrac{\sin\lambda'_{2r}\sin\tau_{2r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})} \\ \sin\varepsilon_{2r} = \sin\tau'_{2r}\sin\pi'_{2r} \\ \dfrac{\sin(\varphi_{2r}-\varphi'_{2r})\sin(\varphi_{2r}+\varphi'_{2r})}{\sin\varphi_{2r}\sin\varphi'_{2r}} = \\ \quad = 2\operatorname{cotg}2\omega \end{array}\right]^{1)}$$

$$\tau_{2r+2} = \tau'_{2r}$$

$$\pi_{2r+2} = \pi'_{2r}$$

$$C_{2r+1} = D_{2r+1} \mp R_{2r} \pm R_{2r+2}$$

$$U_{2r+2}\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2}) = U'_{2r}\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})$$

$$U_{2r+2}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2}) = U'_{2r}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r}) - C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}$$

$$\tau'_{2r} = \varphi'_{2r}$$

$$\pi'_{2r} = \pi_{2r}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\lambda_{2r}\sin\tau'_{2r} = \sin\lambda'_{2r}\sin\tau_{2r} \\ \sin\varepsilon_{2r} = \sin\tau'_{2r}\sin\pi'_{2r} \\ \dfrac{\sin(\varphi_{2r}-\varphi'_{2r})\sin(\varphi_{2r}+\varphi'_{2r})}{\sin\varphi_{2r}\sin\varphi'_{2r}} = \\ \quad = 2\operatorname{cotg}2\omega \end{array}\right]^{1)}$$

$$\tau_{2r+2} = \tau'_{2r}$$

$$\pi_{2r+2} = \pi'_{2r}$$

$$C_{2r+1} = D_{2r+1} \pm R_{2r+2}$$

$$U_{2r+2} = U'_{2r}$$

$$U_{2r+2}[\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2}) - \cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})] = -C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}$$

1) Controlformeln.

1) Kein Radius unendlich.

$$\left[\frac{C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}}{\sin(\zeta_{2r}-\zeta_{2r+2})}=\frac{U_{2r+2}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})}=\mp\frac{U'_{2r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2})}\right]^{1)}$$

$$\cos\lambda_{2s}=\mp\sin\tau_{2s}\cos(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\varphi_{2s}=\frac{U_{2s}\sin\lambda_{2s}}{R_{2s}}$$

$$\sin\varphi'_{2s}=\sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$$

$$\lambda'_{2s}=\lambda_{2s}+(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})$$

$$U'_{2s}=\frac{R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\lambda_{2s}}=$$

$$=U_{2s-2}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}\frac{\sin\lambda_{2s}}{\sin\lambda'_{2s}}$$

$$\sin\tau'_{2s}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=$$

$$=\frac{\sin\lambda'_{2s}}{\sin\lambda_{2s}}\sin\tau_{2s}\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\tau'_{2s}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=\mp\cos\lambda'_{2s}$$

2) Erster Radius unendlich.

$$\left[\frac{C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}}{\sin(\zeta_{2r}-\zeta_{2r+2})}=\frac{U_{2r+2}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})}=\frac{U'_{2r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2})}\right]^{1)}$$

$$\cos\lambda_{2s}=\mp\sin\tau_{2s}\cos(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\varphi_{2s}=\frac{U_{2s}\sin\lambda_{2s}}{R_{2s}}$$

$$\sin\varphi'_{2s}=\sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$$

$$\lambda'_{2s}=\lambda_{2s}+(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})$$

$$U'_{2s}=\frac{R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\lambda_{2s}}=$$

$$=U_{2s-2}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}\frac{\sin\lambda_{2s}}{\sin\lambda'_{2s}}$$

$$\sin\tau'_{2s}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=$$

$$=\frac{\sin\lambda'_{2s}}{\sin\lambda_{2s}}\sin\tau_{2s}\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\tau'_{2s}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=\mp\cos\lambda'_{2s}$$

3) Der $r+1^{\text{te}}$ Radius unendlich.

$$\left[\frac{C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}}{\sin(\zeta_{2r}-\zeta_{2r+2})}=\frac{U_{2r+r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})}=\frac{U'_{2r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2})}\right]^{1)}$$

$$\cos\lambda_{2s}=\mp\sin\tau_{2s}\cos(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\varphi_{2s}=\frac{U_{2s}\sin\lambda_{2s}}{R_{2s}}$$

$$\sin\varphi'_{2s}=\sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$$

$$\lambda'_{2s}=\lambda_{2s}\mp(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})$$

$$U'_{2s}=\frac{R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\lambda_{2s}}=$$

$$=U_{2s-2}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}\frac{\sin\lambda_{2s}}{\sin\lambda'_{2s}}$$

$$\sin\tau'_{2s}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=$$

$$=\frac{\sin\lambda'_{2s}}{\sin\lambda_{2s}}\sin\tau_{2s}\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\tau'_{2s}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=\mp\cos\lambda'_{2s}$$

---

1) Controlformeln.

$$\left[\begin{aligned} \operatorname{tg} \tau'_{2s} &= \operatorname{tg} \tau_{2s} \frac{\sin(\pi_{2s} - \zeta_{2s})}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})} \\ &\pm \frac{\sin(\varphi_{2s} - \varphi'_{2s})}{\sin(\pi_{2s} - \pi'_{2s})} = \frac{\sin \lambda_{2s} \sin \tau'_{2s}}{\sin(\pi_{2s} - \zeta_{2s})} = \\ &= \frac{\sin \lambda'_{2s} \sin \tau_{2s}}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})} \\ \sin \varepsilon_{2s} &= \sin \tau'_{2s} \sin \pi'_{2s} \\ \frac{\sin(\varphi_{2s} - \varphi'_{2s}) \sin(\varphi_{2s} + \varphi'_{2s})}{\sin \varphi_{2s} \sin \varphi'_{2s}} &= \\ &= 2 \operatorname{cotg} 2\omega \end{aligned}\right]^{1)}$$

$$\tau_{2s+2} = \tau'_{2s}$$

$$\pi_{2s+2} = \pi'_{2s}$$

$$C_{2s+1} = B^{\dagger}_{2s} \mp R_{2s+2}$$

$$U_{2s+2} \sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s} \sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})$$

$$U_{2s+2} \cos(\pi'_{2s} - \zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s} \cos(\pi'_{2s} - \zeta_{2s}) - C_{2s+1} \operatorname{tg} \tau'_{2s}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{C_{2s+2} \operatorname{tg} \tau'_{2s}}{\sin(\zeta_{2s} - \zeta_{2s+2})} &= \frac{U_{2s+2}}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})} = \\ &= \frac{U'_{2s}}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s+2})} \end{aligned}\right]^{1)}$$

$$\left[\begin{aligned} \operatorname{tg} \tau'_{2s} &= \operatorname{tg} \tau_{2s} \frac{\sin(\pi_{2s} - \zeta_{2s})}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})} \\ &\pm \frac{\sin(\varphi_{2s} - \varphi'_{2s})}{\sin(\pi_{2s} - \pi'_{2s})} = \frac{\sin \lambda_{2s} \sin \tau'_{2s}}{\sin(\pi_{2s} - \zeta_{2s})} = \\ &= \frac{\sin \lambda'_{2s} \sin \tau_{2s}}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})} \\ \sin \varepsilon_{2s} &= \sin \tau'_{2s} \sin \pi'_{2s} \\ \frac{\sin(\varphi_{2s} - \varphi'_{2s}) \sin(\varphi_{2s} + \varphi'_{2s})}{\sin \varphi_{2s} \sin \varphi'_{2s}} &= \\ &= 2 \operatorname{cotg} 2\omega \end{aligned}\right]^{1)}$$

$$\tau_{2s+2} = \tau'_{2s}$$

$$\pi_{2s+2} = \pi'_{2s}$$

$$C_{2s+1} = B^{\dagger}_{2s} \mp R_{2s+2}$$

$$U_{2s+2} \sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s} \sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})$$

$$U_{2s+2} \cos(\pi'_{2s} - \zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s} \cos(\pi'_{2s} - \zeta_{2s}) - C_{2s+1} \operatorname{tg} \tau'_{2s}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{C_{2s+2} \operatorname{tg} \tau'_{2s}}{\sin(\zeta_{2s} - \zeta_{2s+2})} &= \frac{U_{2s+2}}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})} = \\ &= \frac{U'_{2s}}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s+2})} \end{aligned}\right]^{1)}$$

$$\left[\begin{aligned} \operatorname{tg} \tau'_{2s} &= \operatorname{tg} \tau_{2s} \frac{\sin(\pi_{2s} - \zeta_{2s})}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})} \\ &\pm \frac{\sin(\varphi_{2s} - \varphi'_{2s})}{\sin(\pi_{2s} - \pi'_{2s})} = \frac{\sin \lambda_{2s} \sin \tau'_{2s}}{\sin(\pi_{2s} - \zeta_{2s})} = \\ &= \frac{\sin \lambda'_{2s} \sin \tau_{2s}}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})} \\ \sin \varepsilon_{2s} &= \sin \tau'_{2s} \sin \pi'_{2s} \\ \frac{\sin(\varphi_{2s} - \varphi'_{2s}) \sin(\varphi_{2s} + \varphi'_{2s})}{\sin \varphi_{2s} \sin \varphi'_{2s}} &= \\ &= 2 \operatorname{cotg} 2\omega \end{aligned}\right]^{1)}$$

$$\tau_{2s+2} = \tau'_{2s}$$

$$\pi_{2s+2} = \pi'_{2s}$$

$$C_{2s+1} = B^{\dagger}_{2s} \mp R_{2s+2}$$

$$U_{2s+2} \sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s} \sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})$$

$$U_{2s+2} \cos(\pi'_{2s} - \zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s} \cos(\pi'_{2s} - \zeta_{2s}) - C_{2s+1} \operatorname{tg} \tau'_{2s}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{C_{2s+2} \operatorname{tg} \tau'_{2s}}{\sin(\zeta_{2s} - \zeta_{2s+2})} &= \frac{U_{2s+2}}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s})} = \\ &= \frac{U'_{2s}}{\sin(\pi'_{2s} - \zeta_{2s+2})} \end{aligned}\right]^{1)}$$

1) Controlformeln.

III. Für Strahlen, die von einem in der Axe gelegenen, endlich entfernten Objectpunkte ausgehen.

a) Kein Radius, oder nur der erste sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	$\sin \eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$
$\alpha_0 = \frac{H_0}{O}$	$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{H_0}{O \mp 2 R_0 \sin^2 \frac{\eta_0}{2}}$
$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$	$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$
$\varphi_0' = \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin \varphi_0 = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$
$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$	$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$
$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \varphi_0'}{\alpha_0'}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \alpha_0'}$
$\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\alpha_0'}{\pm R_2}$	$\sin \varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1) \sin \alpha_0'}{\pm R_2}$
$\varphi_2' = \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$	$\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$
$\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$	$\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$
$[H_2 = \pm R_2(\varphi_2' + \alpha_2')]$	$[H_2 = \pm R_2 \sin(\varphi_2' + \alpha_2')]$
$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \varphi_2'}{\alpha_2'}$	$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin \varphi_2'}{\sin \alpha_2'}$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
$\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1})\alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\sin \varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \sin \alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$
$\varphi'_{2r} = \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin \varphi'_{2r} = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$	$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$
$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$	$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$
$[H_{2r} = \pm R_{2r}(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r})]$	$[H_{2r} = \pm R_{2r} \sin(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r})]$
$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \varphi'_{2r}}{\alpha'_{2r}}$	$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \sin \varphi'_{2r}}{\sin \alpha'_{2r}}$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .

a) Kein Radius, oder nur der erste sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\sin\alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\varphi'_{2s} = \varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin\varphi'_{2s} = \sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$	$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s}(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s}\sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s}\varphi'_{2s}}{\alpha'_{2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\alpha'_{2s}}$

b) Der erste Radius unendlich, die übrigen nicht sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\alpha_0 = \frac{H_0}{O}$	$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{H_0}{O}$
$\varphi_0 = -\alpha_0$	$\varphi_0 = -\alpha_0$
$\varphi_0' = \varphi_0\frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0\frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$
$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$	$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$
$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0\varphi_0'}{\alpha_0'}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0\sin\varphi_0'}{\sin\alpha_0'}$
$\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\alpha_0'}{\pm R_2}$	$\sin\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\sin\alpha_0'}{\pm R_2}$
$\varphi_2' = \varphi_2\frac{n_1}{n_3}$	$\sin\varphi_2' = \sin\varphi_2\frac{n_1}{n_3}$
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$
$\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$	$\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$
$[H_2 = \pm R_2(\varphi_2' + \alpha_2')]$	$[H_2 = \pm R_2\sin(\varphi_2' + \alpha_2')]$
$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2\varphi_2'}{\alpha_2'}$	$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2\sin\varphi_2'}{\sin\alpha_2'}$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .

b) Der erste Radius unendlich, die übrigen nicht sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1})\alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\sin\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1})\sin\alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$
$\varphi'_{2r} = \varphi_{2r}\frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin\varphi'_{2r} = \sin\varphi_{2r}\frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$	$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$
$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$	$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$
$[H_{2r} = \pm R_{2r}(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r})]$	$[H_{2r} = \pm R_{2r}\sin(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r})]$
$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r}\varphi'_{2r}}{\alpha'_{2r}}$	$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r}\sin\varphi'_{2r}}{\sin\alpha'_{2r}}$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
$\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\sin\alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\varphi'_{2s} = \varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin\varphi'_{2s} = \sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$	$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s}(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s}\sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s}\varphi'_{2s}}{\alpha'_{2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\alpha'_{2s}}$

c) Der erste Radius sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	$\sin\eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$
$\alpha_0 = \frac{H_0}{O}$	$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{H_0}{O \mp 2R_0\sin^2\frac{\eta_0}{2}}$
$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$	$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$
$\varphi_0' = \varphi_0\frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0\frac{n_{-1}}{n_{+1}}$

c) Der erste Radius sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$
$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$	$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$
$A_0' = \frac{H_0}{\alpha_0'}$	$A_0' = \frac{H_0}{\operatorname{tg} \alpha_0'} \mp 2 R_0 \sin^2 \frac{\eta_0}{2}$
$\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\alpha_0'}{\pm R_2}$	$\sin \varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1) \sin \alpha_0'}{\pm R_2}$
$\varphi_2' = \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$	$\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$
$\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$	$\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$
$[H_2 = \pm R_2(\varphi_2' + \alpha_2')]$	$[H_2 = \pm R_2 \sin(\varphi_2' + \alpha_2')]$
$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \varphi_2'}{\alpha_2'}$	$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin \varphi_2'}{\sin \alpha_2'}$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
$\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1})\alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\sin \varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \sin \alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$
$\varphi'_{2r} = \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin \varphi'_{2r} = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$	$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$
$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$	$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$
$[H_{2r} = \pm R_{2r}(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r})]$	$[H_{2r} = \pm R_{2r} \sin(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r})]$
$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \varphi'_{2r}}{\alpha'_{2r}}$	$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \sin \varphi'_{2r}}{\sin \alpha'_{2r}}$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
$\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin \varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin \alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\varphi'_{2s} = \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin \varphi'_{2s} = \sin \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$	$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s}(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \varphi'_{2s}}{\alpha'_{2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi'_{2s}}{\sin \alpha'_{2s}}$

d) Der $r+1^{te}$ Radius unendlich, die übrigen nicht sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	$\sin \eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$
$\alpha_0 = \frac{H_0}{O}$	$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{H_0}{O \mp 2 R_0 \sin^2 \frac{\eta_0}{2}}$
$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$	$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$
$\varphi_0' = \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$
$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$	$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$
$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \varphi_0'}{\alpha_0'}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \alpha_0'}$
$\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1) \alpha_0'}{\pm R_2}$	$\sin \varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1) \sin \alpha_0'}{\pm R_2}$
$\varphi_2' = \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$	$\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$
$\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$	$\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$
$[H_2 = \pm R_2 (\varphi_2' + \alpha_2')]$	$[H_2 = \pm R_2 \sin (\varphi_2' + \alpha_2')]$
$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \varphi_2'}{\alpha_2'}$	$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin \varphi_2'}{\sin \alpha_2'}$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
$\varphi_{2r} = \alpha_{2r-2}'$	$\varphi_{2r} = \alpha_{2r-2}'$
$\varphi_{2r}' = \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin \varphi_{2r}' = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\alpha_{2r}' = \varphi_{2r}'$	$\alpha_{2r}' = \varphi_{2r}'$
$A_{2r}' = \frac{(A_{2r-2}' - D_{2r-1}) \alpha_{2r-2}'}{\alpha_{2r}'}$	$A_{2r}' = \frac{(A_{2r-2}' - D_{2r-1}) \operatorname{tg} \alpha_{2r-2}'}{\operatorname{tg} \alpha_{2r}'}$
$[H_{2r} = A_{2r}' \alpha_{2r}']$	$[H_{2r} = A_{2r}' \operatorname{tg} \alpha_{2r}']$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
$\varphi_{2s} = \frac{(A_{2s-2}' \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \alpha_{2s-2}'}{\pm R_{2s}}$	$\sin \varphi_{2s} = \frac{(A_{2s-2}' \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin \alpha_{2s-2}'}{\pm R_{2s}}$
$\varphi_{2s}' = \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin \varphi_{2s}' = \sin \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$

d) Der $r+1^{te}$ Radius unendlich, die übrigen nicht sehr lang.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$	$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s}(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s}\varphi'_{2s}}{\alpha'_{2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi'_{2s}}{\sin \alpha'_{2s}}$

e) Der $r+1^{te}$ Radius sehr lang, die übrigen nicht.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	$\sin \eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$
$\alpha_0 = \frac{H_0}{O}$	$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{H_0}{O \mp 2R_0 \sin^2 \frac{\eta_0}{2}}$
$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$	$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$
$\varphi_0' = \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$
$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$	$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$
$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \varphi_0'}{\alpha_0'}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \alpha_0'}$
$\varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1)\alpha_0'}{\pm R_2}$	$\sin \varphi_2 = \frac{(A_0' \mp R_2 - D_1) \sin \alpha_0'}{\pm R_2}$
$\varphi_2' = \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$	$\sin \varphi_2' = \sin \varphi_2 \frac{n_1}{n_3}$
$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$	$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$
$\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$	$\alpha_2' = \delta_2 + \alpha_0'$
$[H_2 = \pm R_2(\varphi_2' + \alpha_2')]$	$[H_2 = \pm R_2 \sin(\varphi_2' + \alpha_2')]$
$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \varphi_2'}{\alpha_2'}$	$A_2' \mp R_2 = \frac{\pm R_2 \sin \varphi_2'}{\sin \alpha_2'}$
. . . .	. . . .
$\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1})\alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\sin \varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \sin \alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$

e) Der $r+1^{te}$ Radius sehr lang, die übrigen nicht.

Axenstrahl.	Randstrahl.
$\varphi'_{2r} = \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin \varphi'_{2r} = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$	$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$
$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$	$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$
$\eta_{2r} = \varphi'_{2r} + \alpha'_{2r}$	$\eta_{2r} = \varphi'_{2r} + \alpha'_{2r}$
$H_{2r} = H_{2r-2} - D_{2r-1}\alpha'_{2r-2}$	$H_{2r} = H_{2r-2} - -(D_{2r-1} \mp \Delta D_{2r-2} \pm \Delta D_{2r}) \operatorname{tg} \alpha'_{2r-2}$
$A'_{2r} = \frac{H_{2r}}{\alpha'_{2r}}$	$A'_{2r} = \frac{H_{2r}}{\operatorname{tg} \alpha'_{2r}} \pm 2 R_{2r} \sin^2 \frac{\eta_{2r}}{2}$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
$\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1})\alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin \varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin \alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\varphi'_{2s} = \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin \varphi'_{2s} = \sin \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$	$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s}(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s}\varphi'_{2s}}{\alpha'_{2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi'_{2s}}{\sin \alpha'_{2s}}$

IV. Für Strahlen, die von einem seitlich von der Axe gelegenen, endlich entfernten Objectpunkte ausgehen.

a) Für Strahlen, die in der Axenebene gelegen sind.

1) Kein Radius sehr lang.	2) Der erste Radius unendlich.
$\sin \varphi_0 = \frac{(E_{2s,0} \mp R_0) \sin \tau_0}{\pm R_0}$ [1]	——
$\eta_0 = \varphi_0 + \tau_0$	——
$H_0 = \pm R_0 \sin \eta_0$	$H_0 = E_{2s,0} \operatorname{tg} \tau_0$ [1]

1) Formeln zur Berechnung des Näherungswerthes von H_0 für den Hauptstrahl, für welchen die Winkel $\alpha_0 = \tau_0$; $\alpha_0' = \tau_0'$; . . . . . $\alpha_{2s} = \tau_{2s}$; $\alpha'_{2s} = \tau'_{2s}$ sind.

1) Kein Radius sehr lang.	2) Der erste Radius unendlich.
$\sin\eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	—
$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{H_0 + X}{O \mp 2 R_0 \sin^2\frac{\eta_0}{2}}$ [1]	$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{H_0 + X}{O}$ [1]
$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$	$\varphi_0 = -\alpha_0$
$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$
$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$	$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$
$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\alpha_0'}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\alpha_0'}$
. . . .	. . . .
$\sin\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \sin\alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$	$\sin\varphi_{2r} = \frac{(A'_{2r-2} \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \sin\alpha'_{2r-2}}{\pm R_{2r}}$
$\sin\varphi'_{2r} = \sin\varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin\varphi'_{2r} = \sin\varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$	$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi'_{2r}$
$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$	$\alpha'_{2r} = \delta_{2r} + \alpha'_{2r-2}$
$[H_{2r} = \pm R_{2r} \sin(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r})]$	$[H_{2r} = \pm R_{2r} \sin(\varphi'_{2r} + \alpha'_{2r})]$
$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \sin\varphi'_{2r}}{\sin\alpha'_{2r}}$	$A'_{2r} \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r} \sin\varphi'_{2r}}{\sin\alpha'_{2r}}$
. . . .	. . . .
$\sin\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin\alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$	$\sin\varphi_{2s} = \frac{(A'_{2s-2} \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin\alpha'_{2s-2}}{\pm R_{2s}}$
$\sin\varphi'_{2s} = \sin\varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin\varphi'_{2s} = \sin\varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi'_{2s}$
$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$	$\alpha'_{2s} = \delta_{2s} + \alpha'_{2s-2}$
$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin(\varphi'_{2s} + \alpha'_{2s})]$
$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin\varphi'_{2s}}{\sin\alpha'_{2s}}$	$A'_{2s} \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin\varphi'_{2s}}{\sin\alpha'_{2s}}$
$H^{\dagger}_{2s} = (A'_{2s} - B^{\dagger}_{2s}) \operatorname{tg}\alpha'_{2s}$	$H^{\dagger}_{2s} = (A'_{2s} - B^{\dagger}_{2s}) \operatorname{tg}\alpha'_{2s}$
$\left.\begin{array}{l} X = \frac{\sin\varphi_0 R_0 \operatorname{tg}\alpha_0}{\sin\alpha_0} \\ V^2 = X^2 + Y^2 \\ \cos\zeta_0 = \frac{X}{V} \\ U_0 = V \end{array}\right\}$ [2]	$\left.\begin{array}{l} X = \frac{\sin\varphi_0 R_0 \operatorname{tg}\alpha_0}{\sin\alpha_0} \\ V^2 = X^2 + Y^2 \\ \cos\zeta_0 = \frac{X}{V} \\ U_0 = V \end{array}\right\}$ [2]

1) Für den Hauptstrahl ist τ_0 gegeben.
2) Formeln zur Berechnung der Constanten für einen Strahl ausser der Axenebene.

3) Der erste Radius sehr lang.	4) Der $r+1^{\text{te}}$ Radius unendlich.
$\sin\varphi_0 = \frac{(E_{2s,0} \mp R_0)\sin\tau_0}{\pm R_0}$ [1]	$\sin\varphi_0 = \frac{(E_{2s,0} \mp R_0)\sin\tau_0}{\pm R_0}$ [1]
$\eta_0 = \varphi_0 + \tau_0$	$\eta_0 = \varphi_0 + \tau_0$
$H_0 = \pm R_0 \sin\eta_0$	$H_0 = \pm R_0 \sin\eta_0$
$\sin\eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$	$\sin\eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$
$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{H_0 + X}{O \mp 2R_0 \sin^2\frac{\eta_0}{2}}$ [2]	$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{H_0 + X}{O \mp 2R_0 \sin^2\frac{\eta_0}{2}}$ [2]
$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$	$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$
$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$	$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$
$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$	$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$
$A_0' = \frac{H_0}{\operatorname{tg}\alpha_0'} \pm 2R_0\sin^2\frac{\eta_0}{2}$	$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\alpha_0'}$
. . . .	. . . .
$\sin\varphi_{2r} = \frac{(A_{2r-2}' \mp R_{2r} - D_{2r-1})\sin\alpha_{2r-2}'}{\pm R_{2r}}$	$\varphi_{2r} = -\alpha_{2r}'$
$\sin\varphi_{2r}' = \sin\varphi_{2r}\frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$	$\sin\varphi_{2r}' = \sin\varphi_{2r}\frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$
$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi_{2r}'$	———
$\alpha_{2r}' = \delta_{2r} + \alpha_{2r-2}'$	$\alpha_{2r}' = \varphi_{2r}'$
$[H_{2r} = \pm R_{2r}\sin(\varphi_{2r}' + \alpha_{2r}')]$	$A_{2r}' = \frac{(A_{2r-2}' - D_{2r-1})\operatorname{tg}\alpha_{2r-2}'}{\operatorname{tg}\alpha_{2r}'}$
$A_{2r}' \mp R_{2r} = \frac{\pm R_{2r}\sin\varphi_{2r}'}{\sin\alpha_{2r}'}$	$[H_{2r} = A_{2r}'\operatorname{tg}\alpha_{2r}']$
. . . .	. . . .
$\sin\varphi_{2s} = \frac{(A_{2s-2}' \mp R_{2s} - D_{2s-1})\sin\alpha_{2s-2}'}{\pm R_{2s}}$	$\sin\varphi_{2s} = \frac{(A_{2s-2}' \mp R_{2s} - D_{2s-1})\sin\alpha_{2s-2}'}{\pm R_{2s}}$
$\sin\varphi_{2s}' = \sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$	$\sin\varphi_{2s}' = \sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$
$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi_{2s}'$	$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi_{2s}'$
$\alpha_{2s}' = \delta_{2s} + \alpha_{2s-2}'$	$\alpha_{2s}' = \delta_{2s} + \alpha_{2s-2}'$
$[H_{2s} = \pm R_{2s}\sin(\varphi_{2s}' + \alpha_{2s}')]$	$[H_{2s} = \pm R_{2s}\sin(\varphi_{2s}' + \alpha_{2s}')]$

1) Formeln zur Berechnung des Näherungswerthes von H_0 für den Hauptstrahl, für welchen die Winkel $\alpha_0 = \tau_0$; $\alpha_0' = \tau_0'$; .... $\alpha_{2s} = \tau_{2s}$; $\alpha_{2s}' = \tau_{2s}'$ sind.

2) Für den Hauptstrahl ist τ_0 gegeben.

3) Der erste Radius sehr lang.

$$A_{2s}' \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi_{2s}'}{\sin \alpha_{2s}'}$$

$$H_{2s}^{\dagger} = (A_{2s}' - B_{2s}^{\dagger}) \operatorname{tg} \alpha_{2s}'$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\sin \varphi_0 \, R_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0} \\ V^2 &= X^2 + Y^2 \\ \cos \zeta_0 &= \frac{X}{V} \\ U_0 &= V \end{aligned}\right\} {}^{1)}$$

4) Der $r+1^{te}$ Radius unendlich.

$$A_{2s}' \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi_{2s}'}{\sin \alpha_{2s}'}$$

$$H_{2s}^{\dagger} = (A_{2s}' - B_{2s}^{\dagger}) \operatorname{tg} \alpha_{2s}'$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\sin \varphi_0 \, R_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0} \\ V^2 &= X^2 + Y^2 \\ \cos \zeta_0 &= \frac{X}{V} \\ U_0 &= V \end{aligned}\right\} {}^{1)}$$

5) Der $r+1^{te}$ Radius sehr lang.

$$\left.\begin{aligned} \sin \varphi_0 &= \frac{(E_{2s,0} \mp R_0) \sin \tau_0}{\pm R_0} \\ \eta_0 &= \varphi_0 + \tau_0 \\ H_0 &= \pm R_0 \sin \eta_0 \end{aligned}\right\} {}^{2)}$$

$$\sin \eta_0 = \frac{H_0}{\pm R_0}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{H_0 + X}{O \mp 2 R_0 \sin^2 \frac{\eta_0}{2}} \quad {}^{3)}$$

$$\varphi_0 = \eta_0 - \alpha_0$$

$$\sin \varphi_0' = \sin \varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$$

$$\delta_0 = \varphi_0 - \varphi_0'$$

$$\alpha_0' = \delta_0 + \alpha_0$$

$$A_0' \mp R_0 = \frac{\pm R_0 \sin \varphi_0'}{\sin \alpha_0'}$$

. . . .

. . . .

$$\sin \varphi_{2r} = \frac{(A_{2r-2}' \mp R_{2r} - D_{2r-1}) \sin \alpha_{2r-2}'}{\pm R_{2r}}$$

$$\sin \varphi_{2r}' = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$$

$$\delta_{2r} = \varphi_{2r} - \varphi_{2r}'$$

$$\alpha_{2r}' = \delta_{2r} + \alpha_{2r-2}'$$

5) Der $r+1^{te}$ Radius sehr lang.

$$\eta_{2r} = \varphi_{2r}' + \alpha_{2r}'.$$

$$H_{2r} = H_{2r-2} - (D_{2r-1} \mp \mp \Delta D_{2r-2} \pm \Delta D_{2r}) \operatorname{tg} \alpha_{2r-2}'$$

$$A_{2r}' = \frac{H_{2r}}{\operatorname{tg} \alpha_{2r}'} \pm 2 R_{2r} \sin^2 \frac{\eta_{2r}}{2}$$

. . . .

. . . .

$$\sin \varphi_{2s} = \frac{(A_{2s-2}' \mp R_{2s} - D_{2s-1}) \sin \alpha_{2s-2}'}{\pm R_{2s}}$$

$$\sin \varphi_{2s}' = \sin \varphi_{2s} \frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$$

$$\delta_{2s} = \varphi_{2s} - \varphi_{2s}'$$

$$\alpha_{2s}' = \delta_{2s} + \alpha_{2s-2}'$$

$$[H_{2s} = \pm R_{2s} \sin (\varphi_{2s}' + \alpha_{2s}')]$$

$$A_{2s}' \mp R_{2s} = \frac{\pm R_{2s} \sin \varphi_{2s}'}{\sin \alpha_{2s}'}$$

$$H_{2s}^{\dagger} = (A_{2s}' - B_{2s}^{\dagger}) \operatorname{tg} \alpha_{2s}'$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\sin \varphi_0 \, R_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sin \alpha_0} \\ V^2 &= X^2 + Y^2 \\ \cos \zeta_0 &= \frac{X}{V} \\ U_0 &= V \end{aligned}\right\} {}^{1)}$$

---

1) Formeln zur Berechnung der Constanten für einen Strahl ausser der Axenebene.

2) Formeln zur Berechnung des Näherungswerthes von H_0 für den Hauptstrahl, für welchen die Winkel $\alpha_0 = \tau_0$; $\alpha_0' = \tau_0' \ldots \alpha_{2s} = \tau_{2s}$; $\alpha_{2s}' = \tau_{2s}'$ sind.

3) Für den Hauptstrahl ist τ_0 gegeben.

b. Für Strahlen die ausser der Axenebene gelegen sind.

1) Kein Radius unendlich.	2) Erster Radius unendlich.	3) Der $r+1^{\text{te}}$ Radius unendlich.
$\cos\lambda_0 = \mp \sin\tau_0 \cos(\pi_0 - \zeta_0)$ [1]	$\cos\lambda_0 = \mp \sin\tau_0 \cos(\pi_0 - \zeta_0)$ [1]	$\cos\lambda_0 = \mp \sin\tau_0 \cos(\pi_0 - \zeta_0)$ [1]
$\sin\varphi_0 = \frac{U_0 \sin\lambda_0}{R_0}$	$\varphi_0 = \tau_0$	$\sin\varphi_0 = \frac{U_0 \sin\lambda_0}{R_0}$
$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$	$\sin\varphi_0' = \sin\varphi_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}}$
$\lambda_0' = \lambda_0 + (\varphi_0 - \varphi_0')$	$\lambda_0' = \lambda_0 + (\varphi_0 - \varphi_0')$	$\lambda_0' = \lambda_0 + (\varphi_0 - \varphi_0')$
$U_0' = \frac{R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\lambda_0'} = U_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}} \frac{\sin\lambda_0}{\sin\lambda_0'}$	$U_0' = U_0$	$U_0' = \frac{R_0 \sin\varphi_0'}{\sin\lambda_0'} = U_0 \frac{n_{-1}}{n_{+1}} \frac{\sin\lambda_0}{\sin\lambda_0'}$
$\sin\tau_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0) = \frac{\sin\lambda_0'}{\sin\lambda_0} \sin\tau_0 \sin(\pi_0 - \zeta_0)$	$\tau_0' = \varphi_0'$	$\sin\tau_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0) = \frac{\sin\lambda_0'}{\sin\lambda_0} \sin\tau_0 \sin(\pi_0 - \zeta_0)$
$\sin\tau_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) = \mp \cos\lambda_0'$	$\pi_0' = \pi_0$	$\sin\tau_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) = \mp \cos\lambda_0'$
[2] $\operatorname{tg}\tau_0' = \operatorname{tg}\tau_0 \frac{\sin(\pi_0 - \zeta_0)}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$ $\pm \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0')}{\sin(\pi_0 - \pi_0')} = \frac{\sin\lambda_0 \sin\tau_0'}{\sin(\pi_0 - \zeta_0)} = \frac{\sin\lambda_0' \sin\tau_0}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$	[2] $\sin\lambda_0 \sin\tau_0' = \sin\lambda_0' \sin\tau_0$	[2] $\operatorname{tg}\tau_0' = \operatorname{tg}\tau_0 \frac{\sin(\pi_0 - \zeta_0)}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$ $\pm \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0')}{\sin(\pi_0 - \pi_0')} = \frac{\sin\lambda_0 \sin\tau_0'}{\sin(\pi_0 - \zeta_0)} = \frac{\sin\lambda_0' \sin\tau_0}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)}$
$\sin\varepsilon_0 = \sin\tau_0' \sin\pi_0'$ $\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0') \sin(\varphi_0 + \varphi_0')}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_0'} = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$	$\sin\varepsilon_0 = \sin\tau_0' \sin\pi_0'$ $\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0') \sin(\varphi_0 + \varphi_0')}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_0'} = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$	$\sin\varepsilon_0 = \sin\tau_0' \sin\pi_0'$ $\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_0') \sin(\varphi_0 + \varphi_0')}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_0'} = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$

1) Für Strahlen ausser der Axenebene sind die Formeln, wenn der Objectpunkt in endlicher Entfernung ist, ebenso, wie wenn der Objectpunkt in unendlicher Entfernung sich befindet.

2) Controlformeln.

$$\tau_2 = \tau_0'$$
$$\pi_2 = \pi_0'$$
$$C_1 = D_1 \mp R_0 \pm R_2$$
$$U_2 \sin(\pi_0' - \zeta_2) = U_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0)$$
$$U_2 \cos(\pi_0' - \zeta_2) = U_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) - $$
$$- C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$$
$$\left[\frac{C_1 \operatorname{tg} \tau_0'}{\sin(\zeta_0 - \zeta_2)} = \frac{U_2}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)} = \frac{U_0'}{\sin(\pi_0' - \zeta_2)}\right]^{1)}$$

. . . .

$$\cos \lambda_{2r} = \mp \sin \tau_{2r} \cos(\pi_{2r} - \zeta_{2r})$$
$$\sin \varphi_{2r} = \frac{U_{2r} \sin \lambda_{2r}}{R_{2r}}$$
$$\sin \varphi_{2r}' = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$$
$$\lambda_{2r}' = \lambda_{2r} + (\varphi_{2r} - \varphi_{2r}')$$
$$U_{2r}' = \frac{R_{2r} \sin \varphi_{2r}'}{\sin \lambda_{2r}'} =$$
$$= U_{2r-2} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}} \frac{\sin \lambda_{2r}}{\sin \lambda_{2r}'}$$
$$\sin \tau_{2r}' \sin(\pi_{2r}' - \zeta_{2r}) =$$
$$= \frac{\sin \lambda_{2r}'}{\sin \lambda_{2r}} \sin \tau_{2r} \sin(\pi_{2r} - \zeta_{2r})$$

$$\tau_2 = \tau_0'$$
$$\pi_2 = \pi_0'$$
$$C_1 = D_1 \pm R_2$$
$$U_2 = U_0'$$
$$U_2 [\cos(\pi_0' - \zeta_2) - \cos(\pi_0 - \zeta_0)] =$$
$$= - C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$$
$$\left[\frac{C_1 \operatorname{tg} \tau_0'}{\sin(\zeta_0 - \zeta_2)} = \frac{U_2}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)} = \frac{U_0'}{\sin(\pi_0' - \zeta_2)}\right]^{1)}$$

. . . .

$$\cos \lambda_{2r} = \mp \sin \tau_{2r} \cos(\pi_{2r} - \zeta_{2r})$$
$$\sin \varphi_{2r} = \frac{U_{2r} \sin \lambda_{2r}}{R_{2r}}$$
$$\sin \varphi_{2r}' = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$$
$$\lambda_{2r}' = \lambda_{2r} + (\varphi_{2r} - \varphi_{2r}')$$
$$U_{2r}' = \frac{R_{2r} \sin \varphi_{2r}'}{\sin \lambda_{2r}'} =$$
$$= U_{2r-2} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}} \frac{\sin \lambda_{2r}}{\sin \lambda_{2r}'}$$
$$\sin \tau_{2r}' \sin(\pi_{2r}' - \zeta_{2r}) =$$
$$= \frac{\sin \lambda_{2r}'}{\sin \lambda_{2r}} \sin \tau_{2r} \sin(\pi_{2r} - \zeta_{2r})$$

$$\tau_2 = \tau_0'$$
$$\pi_2 = \pi_0'$$
$$C_1 = D_1 \mp R_0 \pm R_2$$
$$U_2 \sin(\pi_0' - \zeta_2) = U_0' \sin(\pi_0' - \zeta_0)$$
$$U_2 \cos(\pi_0' - \zeta_2) = U_0' \cos(\pi_0' - \zeta_0) - $$
$$- C_1 \operatorname{tg} \tau_0'$$
$$\left[\frac{C_1 \operatorname{tg} \tau_0'}{\sin(\zeta_0 - \zeta_2)} = \frac{U_2}{\sin(\pi_0' - \zeta_0)} = \frac{U_0'}{\sin(\pi_0' - \zeta_2)}\right]^{1)}$$

. . . .

$$\cos \lambda_{2r} = \mp \sin \tau_{2r} \cos(\pi_{2r} - \zeta_{2r})$$
$$\varphi_{2r} = \tau_{2r}$$
$$\sin \varphi_{2r}' = \sin \varphi_{2r} \frac{n_{2r-1}}{n_{2r+1}}$$
$$\lambda_{2r}' = \lambda_{2r} + (\varphi_{2r} - \varphi_{2r}')$$
$$U_{2r}' = U_{2r}$$
$$\tau_{2r}' = \varphi_{2r}'$$

---

1) Controlformeln.

1) Kein Radius unendlich.	2) Erster Radius unendlich.	3) Der $r+1^{\text{te}}$ Radius unendlich.
$\sin\tau'_{2r}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r}) = \mp\cos\lambda'_{2r}$	$\sin\tau'_{2r}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r}) = \mp\cos\lambda'_{2r}$	$\pi'_{2r} = \pi_{2r}$
$\left[\operatorname{tg}\tau'_{2r} = \operatorname{tg}\tau_{2r}\frac{\sin(\pi_{2r}-\zeta_{2r})}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})} \pm \frac{\sin(\varphi_{2r}-\varphi'_{2r})}{\sin(\pi_{2r}-\pi'_{2r})} = \frac{\sin\lambda_{2r}\sin\tau'_{2r}}{\sin(\pi_{2r}-\zeta_{2r})} = \frac{\sin\lambda'_{2r}\sin\tau_{2r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})}\right.$	$\left[\operatorname{tg}\tau'_{2r} = \operatorname{tg}\tau_{2r}\frac{\sin(\pi_{2r}-\zeta_{2r})}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})} \pm \frac{\sin(\varphi_{2r}-\varphi'_{2r})}{\sin(\pi_{2r}-\pi'_{2r})} = \frac{\sin\lambda_{2r}\sin\tau'_{2r}}{\sin(\pi_{2r}-\zeta_{2r})} = \frac{\sin\lambda'_{2r}\sin\tau_{2r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})}\right.$	$\left[\sin\lambda_{2r}\sin\tau'_{2r} = \sin\lambda'_{2r}\sin\tau_{2r}\right.$
$\sin\varepsilon_{2r} = \sin\tau'_{2r}\sin\pi'_{2r}$	$\sin\varepsilon_{2r} = \sin\tau'_{2r}\sin\pi'_{2r}$	$\sin\varepsilon_{2r} = \sin\tau'_{2r}\sin\pi'_{2r}$
$\left.\frac{\sin(\varphi_{2r}-\varphi'_{2r})\sin(\varphi_{2r}+\varphi'_{2r})}{\sin\varphi_{2r}\sin\varphi'_{2r}} = 2\operatorname{cotg}2\omega\right]$ [1]	$\left.\frac{\sin(\varphi_{2r}-\varphi'_{2r})\sin(\varphi_{2r}+\varphi'_{2r})}{\sin\varphi_{2r}\sin\varphi'_{2r}} = 2\operatorname{cotg}2\omega\right]$ [1]	$\left.\frac{\sin(\varphi_{2r}-\varphi'_{2r})\sin(\varphi_{2r}+\varphi'_{2r})}{\sin\varphi_{2r}\sin\varphi'_{2r}} = 2\operatorname{cotg}2\omega\right]$ [1]
$\tau_{2r+2} = \tau'_{2r}$	$\tau_{2r+2} = \tau'_{2r}$	$\tau_{2r+2} = \tau'_{2r}$
$\pi_{2r+2} = \pi'_{2r}$	$\pi_{2r+2} = \pi'_{2r}$	$\pi_{2r+2} = \pi'_{2r}$
$C_{2r+1} = D_{2r+1} \mp R_{2r} \pm R_{2r+2}$	$C_{2r+1} = D_{2r+1} \mp R_{2r} \pm R_{2r+2}$	$C_{2r+1} = D_{2r+1} \pm R_{2r+2}$
$U_{2r+2}\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2}) = U'_{2r}\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})$	$U_{2r+2}\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2}) = U'_{2r}\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})$	$U_{2r+2} = U'_{2r}$
$U_{2r+2}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2}) = U'_{2r}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r}) - C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}$	$U_{2r+2}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2}) = U'_{2r}\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r}) - C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}$	$U_{2r+2}[\cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2}) - \cos(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})] = -C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}$

1) Controlformeln.

$$\left[\frac{C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}}{\sin(\zeta_{2r}-\zeta_{2r+2})}=\frac{U_{2r+2}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})}=\frac{U'_{2r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2})}\right]^{1)}$$

$$\cos\lambda_{2s}=\mp\sin\tau_{2s}\cos(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\varphi_{2s}=\frac{U_{2s}\sin\lambda_{2s}}{R_{2s}}$$

$$\sin\varphi'_{2s}=\sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$$

$$\lambda'_{2s}=\lambda_{2s}+(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})$$

$$U'_{2s}=\frac{R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\lambda'_{2s}}=U_{2s-2}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}\frac{\sin\lambda_{2s}}{\sin\lambda'_{2s}}$$

$$\sin\tau'_{2s}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=\frac{\sin\lambda'_{2s}}{\sin\lambda_{2s}}\sin\tau_{2s}\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\tau'_{2s}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=\mp\cos\lambda_{2s}$$

$$\left[\frac{C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}}{\sin(\zeta_{2r}-\zeta_{2r+2})}=\frac{U_{2r+2}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})}=\frac{U'_{2r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2})}\right]^{1)}$$

$$\cos\lambda_{2s}=\mp\sin\tau_{2s}\cos(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\varphi_{2s}=\frac{U_{2s}\sin\lambda_{2s}}{R_{2s}}$$

$$\sin\varphi'_{2s}=\sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$$

$$\lambda'_{2s}=\lambda_{2s}+(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})$$

$$U'_{2s}=\frac{R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\lambda'_{2s}}=U_{2s-2}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}\frac{\sin\lambda_{2s}}{\sin\lambda'_{2s}}$$

$$\sin\tau'_{2s}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=\frac{\sin\lambda'_{2s}}{\sin\lambda_{2s}}\sin\tau_{2s}\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\tau'_{2s}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=\mp\cos\lambda_{2s}$$

$$\left[\frac{C_{2r+1}\operatorname{tg}\tau'_{2r}}{\sin(\zeta_{2r}-\zeta_{2r+2})}=\frac{U_{2r+2}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r})}=\frac{U'_{2r}}{\sin(\pi'_{2r}-\zeta_{2r+2})}\right]^{1)}$$

$$\cos\lambda_{2s}=\mp\sin\tau_{2s}\cos(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\varphi_{2s}=\frac{U_{2s}\sin\lambda_{2s}}{R_{2s}}$$

$$\sin\varphi'_{2s}=\sin\varphi_{2s}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}$$

$$\lambda'_{2s}=\lambda_{2s}+(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})$$

$$U'_{2s}=\frac{R_{2s}\sin\varphi'_{2s}}{\sin\lambda'_{2s}}=U_{2s-2}\frac{n_{2s-1}}{n_{2s+1}}\frac{\sin\lambda_{2s}}{\sin\lambda'_{2s}}$$

$$\sin\tau'_{2s}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=\frac{\sin\lambda'_{2s}}{\sin\lambda_{2s}}\sin\tau_{2s}\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})$$

$$\sin\tau'_{2s}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})=\mp\cos\lambda_{2s}$$

1) Controlformeln.

1) Kein Radius unendlich.

$$\left[\begin{aligned} \operatorname{tg}\tau'_{2s} &= \operatorname{tg}\tau_{2s}\frac{\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})} \\ &\pm\frac{\sin(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})}{\sin(\pi_{2s}-\pi'_{2s})}=\frac{\sin\lambda_{2s}\sin\tau'_{2s}}{\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})}= \\ &=\frac{\sin\lambda'_{2s}\sin\tau_{2s}}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})} \\ \sin\varepsilon_{2s} &= \sin\tau'_{2s}\sin\pi'_{2s} \\ \frac{\sin(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})\sin(\varphi_{2s}+\varphi'_{2s})}{\sin\varphi_{2s}\sin\varphi'_{2s}} &= \\ &= 2\operatorname{cotg}2\omega \end{aligned}\right]^{1)}$$

$$\tau_{2s+2} = \tau'_{2s}$$
$$\pi_{2s+2} = \pi'_{2s}$$
$$C_{2s+1} = B^{\dagger}_{2s} \mp R_{2s+2}$$
$$U_{2s+2}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})$$
$$U_{2s+2}\cos\pi'_{2s}-\zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s}) - C_{2s+1}\operatorname{tg}\tau'_{2s}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{C_{2s}\operatorname{tg}\tau'_{2s}}{\sin(\zeta_{2s}-\zeta_{2s+2})} &= \frac{U_{2s+2}}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})} = \\ &= \frac{U'_{2s}}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s+2})} \end{aligned}\right]^{1)}$$

2) Erster Radius unendlich.

$$\left[\begin{aligned} \operatorname{tg}\tau'_{2s} &= \operatorname{tg}\tau_{2s}\frac{\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})} \\ &\pm\frac{\sin(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})}{\sin(\pi_{2s}-\pi'_{2s})}=\frac{\sin\lambda_{2s}\sin\tau'_{2s}}{\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})}= \\ &=\frac{\sin\lambda'_{2s}\sin\tau_{2s}}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})} \\ \sin\varepsilon_{2s} &= \sin\tau'_{2s}\sin\pi'_{2s} \\ \frac{\sin(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})\sin(\varphi_{2s}+\varphi'_{2s})}{\sin\varphi_{2s}\sin\varphi'_{2s}} &= \\ &= 2\operatorname{cotg}2\omega \end{aligned}\right]^{1)}$$

$$\tau_{2s+2} = \tau'_{2s}$$
$$\pi_{2s+2} = \pi'_{2s}$$
$$C_{2s+1} = B^{\dagger}_{2s} \mp R_{2s+2}$$
$$U_{2s+2}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})$$
$$U_{2s+2}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s}) - C_{2s+1}\operatorname{tg}\tau'_{2s}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{C_{2s}\operatorname{tg}\tau'_{2s}}{\sin(\zeta_{2s}-\zeta_{2s+2})} &= \frac{U_{2s+2}}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})} = \\ &= \frac{U'_{2s}}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s+2})} \end{aligned}\right]^{1)}$$

3) Der $r+1^{te}$ Radius unendlich.

$$\left[\begin{aligned} \operatorname{tg}\tau'_{2s} &= \operatorname{tg}\tau_{2s}\frac{\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})} \\ &\pm\frac{\sin(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})}{\sin(\pi_{2s}-\pi'_{2s})}=\frac{\sin\lambda_{2s}\sin\tau'_{2s}}{\sin(\pi_{2s}-\zeta_{2s})}= \\ &=\frac{\sin\lambda'_{2s}\sin\tau_{2s}}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})} \\ \sin\varepsilon_{2s} &= \sin\tau'_{2s}\sin\pi'_{2s} \\ \frac{\sin(\varphi_{2s}-\varphi'_{2s})\sin(\varphi_{2s}+\varphi'_{2s})}{\sin\varphi_{2s}\sin\varphi'_{2s}} &= \\ &= 2\operatorname{cotg}2\omega \end{aligned}\right]^{1)}$$

$$\tau_{2s+2} = \tau'_{2s}$$
$$\pi_{2s+2} = \pi'_{2s}$$
$$C_{2s+1} = B^{\dagger}_{2s} \mp R_{2s+2}$$
$$U_{2s+2}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s}\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})$$
$$U_{2s+2}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s+2}) = \\ = U'_{2s}\cos(\pi'_{2s}-\zeta_{2s}) - C_{2s+1}\operatorname{tg}\tau'_{2s}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{C_{2s}\operatorname{tg}\tau'_{2s}}{\sin(\zeta_{2s}-\zeta_{2s+2})} &= \frac{U_{2s+2}}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s})} = \\ &= \frac{U'_{2s}}{\sin(\pi'_{2s}-\zeta_{2s+2})} \end{aligned}\right]^{1)}$$

---

1) Controlformeln.

E. Formeln für die Berechnung der Radien von Linsen.

I. Eine Linse.

a) Allgemeine Formeln.

Gegeben sind: H_0, δ_0, δ_2, D_1, n_{+1} und $n_{-1} = n_3 = 1$.

Gesucht: R_0 und R_2.

Man findet R_0 und R_2 in Werthen, deren Einheit gleich der Brennweite.

$$R_0 = \frac{H_0\,(n_{+1} - 1)}{\delta_0\, n_{+1}},$$

$$R_2 = \frac{(H_0 - D_1\,\delta_0)\,(n_{+1} - 1)}{-\,\delta_2 + \delta_0\,(n_{+1} - 1)}.$$

b) Formeln für specielle Fälle.

Sammellinsen: $\beta_{0,2} = +1$.

1) $\delta_0 = +2$; $\delta_2 = -1$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1$.

$$R_0 = \frac{H_0\,(n_{+1} - 1)}{2\,n_{+1}},$$

$$R_2 = \frac{(H_0 - 2\,D_1)\,(n_{+1} - 1)}{2\,n_{+1} - 1}.$$

2) $\delta_0 = +1$; $\delta_2 = 0$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1$.

$$R_0 = \frac{H_0\,(n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$

$$R_2 = (H_0 - D_1).$$

Zerstreuungslinsen: $\beta_{0,2} = -1$.

1) $\delta_0 = -2$; $\delta_2 = +1$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1$.

$$R_0 = -\frac{H_0\,(n_{+1} - 1)}{2\,n_{+1}},$$

$$R_2 = -\frac{(H_0 + 2\,D_1)\,(n_{+1} - 1)}{2\,n_{+1} - 1}.$$

2) $\delta_0 = -1$; $\delta_2 = 0$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1$.

$$R_0 = -\frac{H_0\,(n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$

$$R_2 = -(H_0 - D_1).$$

Sammellinsen: $\beta_{0,2} = +1$.

3) $\delta_0 = \frac{1}{n_{+1}}$; $\delta_2 = \frac{n_{+1} - 1}{n_{+1}}$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1$.

$$R_0 = H_0 (n_{+1} - 1),$$
$$R_2 = \infty.$$

4) $\delta_0 = \delta_2 = 0.5$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1$.

$$R_0 = \frac{2 H_0 (n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$
$$R_2 = -\frac{(2 H_0 - D_1)(n_{+1} - 1)}{2 - n_{+1}}.$$

5) $\delta_0 + \delta_2 = \beta_{0,2} = +1$; $R_0 = -R_2$.

$$R_0 = -R_2 = H_0 (n_{+1} - 1) \pm$$
$$\pm \sqrt{-\frac{H_0 D_1 (n_{+1} - 1)^2}{n_{+1}} + H_0^2 (n_{+1} - 1)^2}.$$

6) $\delta_0 = 0$; $\delta_2 = +1$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1$.

$$R_0 = \infty,$$
$$R_2 = -H_0 (n_{+1} - 1).$$

7) $\delta_0 = -1$; $\delta_2 = +2$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = +1$.

$$R_0 = -\frac{H_0 (n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$
$$R_2 = -\frac{(H_0 + D_1)(n_{+1} - 1)}{n_{+1} + 1}.$$

Zerstreuungslinsen: $\beta_{0,2} = -1$.

3) $\delta_0 = -\frac{1}{n_{+1}}$; $\delta_2 = -\frac{n_{+1} - 1}{n_{+1}}$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1$.

$$R_0 = -H_0 (n_{+1} - 1),$$
$$R_2 = \infty.$$

4) $\delta_0 = \delta_2 = -0.5$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1$.

$$R_0 = -\frac{2 H_0 (n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$
$$R_2 = +\frac{(2 H_0 + D_1)(n_{+1} - 1)}{2 - n_{+1}}.$$

5) $\delta_0 + \delta_2 = \beta_{0,2} = -1$; $R_0 = -R_2$.

$$R_0 = -R_2 = -H_0 (n_{+1} - 1) \mp$$
$$\mp \sqrt{-\frac{H_0 D_1 (n_{+1} - 1)^2}{n_{+1}} + H_0^2 (n_{+1} - 1)^2}.$$

6) $\delta_0 = 0$; $\delta_2 = -1$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1$.

$$R_0 = \infty,$$
$$R_2 = +H_0 (n_{+1} - 1).$$

7) $\delta_0 = +1$; $\delta_2 = -2$; $\beta_{0,2} = \delta_0 + \delta_2 = -1$.

$$R_0 = +\frac{H_0 (n_{+1} - 1)}{n_{+1}},$$
$$R_2 = +\frac{(H_0 - D_1)(n_{+1} - 1)}{n_{+1} - 1}.$$

II. Ein Linsensystem.

(Bei fortlaufender trigonometrischer Rechnung.)

1) Der erste Radius (R_0) wird gesucht.

Gegeben: δ_0, H_0, D_1, n_{+1} und $n_{-1} = 1$.

Es ist dann:
$$R_0 = \frac{H_0 (n_{+1} - 1)}{\delta_0 \, n_{+1}}.$$

2) Ein beliebiger Radius, z. B. der dritte (R_4) wird gesucht.

Gegeben: δ_4, A_2', $\beta_{0,2}$, D_3, n_3 und n_5.

Es ist dann:
$$\varphi_4 = \frac{\delta_4}{1 - \frac{n_3}{n_5}}$$

und

$$R_4 = \frac{(A_2' - D_3)\, \beta_{0,2}}{\beta_{0,2} + \varphi_4}.$$

In einzelnen speciellen Fällen will man die Brechung eines Randstrahles, ohne Berücksichtigung des Axenstrahles, halten; man rechnet dann in folgender Weise:

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{\sin \delta_4}{\cos \delta_4 - \frac{n_3}{n_5}},$$

und

$$R_4 = \frac{(A_2' - D_3) \sin \beta_{0,2}}{\sin \beta_{0,2} + \sin \varphi_4}.$$

F. Formeln zur Berechnung der Maximalöffnung von Linsen.

1) Sammellinsen.

a) Wenn weder R_0 noch R_2 unendlich, wird die Oeffnung:

$$H_0 = \frac{2}{\pm R_0 \mp R_2 - D_1} \times$$
$$\sqrt{\left(\pm R_0 \mp R_2 - \frac{D_1}{2}\right) \frac{D_1}{2} \left(\mp R_2 - \frac{D_1}{2}\right) \left(\pm R_0 - \frac{D_1}{2}\right)}.$$

b) Wenn R_2 unendlich:

$$H_0 = \sqrt{\pm 2 R_0 D_1 - D_1^2}.$$

c) Wenn R_0 unendlich:

$$H_0 = \sqrt{\mp 2 R_2 D_1 - D_1^2}.$$

2) Zerstreuungslinsen.

Die Maximalöffnung der Zerstreuungslinsen ist immer gleich dem Werthe des kleineren Radius.

G. Tabelle über das Verhältniss von Objectabstand zu Bildabstand bei gegebenen Grössenverhältnissen zwischen Object und Bild für die Brennweite 1.

I Verkleinerung.	II Bildabstand.	III Objectabstand.	I Verkleinerung.	II Bildabstand.	III Objectabstand.
1 mal	2.00	2.00	6.5	1.15	7.50
1.1	1.91	2.10	7.0	1.14	8.00
1.2	1.83	2.20	7.5	1.13	8.50
1.3	1.77	2.30	8.0	1.12	9.00
1.4	1.72	2.40	8.5	1.12	9.50
1.5	1.67	2.50	9.0	1.11	10.00
1.6	1.62	2.60	9.5	1.10	10.50
1.7	1.59	2.70	10.0	1.10	11.00
1.8	1.56	2.80	11.0	1.09	12.00
1.9	1.53	2.90	12.0	1.08	13.00
2.0	1.50	3.00	13.0	1.08	14.00
2.1	1.48	3.10	14.0	1.07	15.00
2.2	1.45	3.20	15.0	1.07	16.00
2.3	1.43	3.30	16.0	1.06	17.00
2.4	1.42	3.40	18.0	1.06	19.00
2.5	1.40	3.50	20.0	1.05	21.00
2.6	1.38	3.60	22.0	1.04	23.00
2.7	1.37	3.70	24.0	1.04	25.00
2.8	1.36	3.80	26.0	1.04	27.00
2.9	1.34	3.90	28.0	1.04	29.00
3.0	1.33	4.00	30.0	1.03	31.00
3.2	1.31	4.20	35.0	1.03	36.00
3.4	1.29	4.40	40.0	1.02	41.00
3.6	1.28	4.60	45.0	1.02	46.00
3.8	1.26	4.80	50.0	1.02	51.00
4.0	1.25	5.00	60.0	1.02	61.00
4.5	1.22	5.50	70.0	1.01	71.00
5.0	1.20	6.00	80.0	1.01	81.00
5.5	1.18	6.50	90.0	1.01	91.00
6.0	1.17	7.00	100.0	1.01	101.00
Vergrösserung. I	Objectabstand. II	Bildabstand. III	Vergrösserung. I	Objectabstand. II	Bildabstand. III

Gebrauch der Tabelle.

Man drücke den grössten Durchmesser des Objectes und den grössten Durchmesser des zu erhaltenden Bildes im gleichen Maassstabe aus.

Soll das Bild grösser werden als das Object, so liegt ein Fall für Vergrösserung vor, und man benütze die unteren Köpfe der Tafel; soll das Bild kleiner werden als das Object, so liegt Verkleinerung vor, und man benütze die oberen Köpfe der Tafel.

Sollen Object und Bild gleich gross sein, so hat man (1 malige Vergrösserung oder Verkleinerung) natürliche Grösse.

Zur Bestimmung, wie viel mal die Vergrösserung oder Verkleinerung werden soll, dividirt man mit der kleineren Zahl in die grössere, geht mit der gefundenen Zahl in Rubrik I, liest die auf derselben Horizontal-

linie stehenden Zahlen der Rubriken II und III ab und multiplicirt diese mit der Brennweite des Objectives, um die gesuchten Längen für Bild- und Objectabstand zu finden.

Z. B. Eine Karte von 40 Centimeter Durchmesser soll auf 25 Ctm. Durchmesser reproducirt werden. Weil das Bild kleiner wird als das Object, liegt Verkleinerung vor; und zwar 1.6 mal. Sucht man in Rubrik I die Zahl 1.6, so finden sich auf derselben Horizontallinie die Zahl 1.62 in Rubrik II für Bildabstand und 2.60 in Rubrik III für Objectabstand. Hat man die Brennweite 40 cm, so erhält man:

$$1.6 \times 40 = 64 \text{ cm}$$

als Bildabstand und $2.6 \times 40 = 104$ cm Objectabstand.

Oder z. B. auf einen Gegenstand, der 6.40 m von einem Objectiv entfernt ist, dessen Brennweite 40 cm beträgt, soll eingestellt werden. Der Objectabstand ist somit $\frac{640}{40} = 16$ Brennweiten; man sucht in Rubrik III die Zahl 16, so findet man auf derselben Horizontalen in Rubrik II den Bildabstand mit 1.07 Brennweiten, gleich 42.8 cm, und in Rubrik I die Verkleinerung des Bildes 15mal.

Beilage II.

Ueber die Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisses verschiedener Medien.

Von

C. A. v. Steinheil und L. v. Seidel.

Abdruck aus den Abhandl. der II. Cl. der Kgl. bayr. Akademie der Wissenschaften. V. Bd. II. Abth. pg. 1; nur sind die Bezeichnungen, entsprechend den von uns eingeführten, umgeändert.

Die schöne Entdeckung der fixen Linien im Sonnenspectrum, durch welche allein eine scharfe Bestimmung des Brechungsverhältnisses jedes bestimmten Lichtstrahles möglich wird, hat im Allgemeinen weniger Anwendung gefunden, als die treffliche Arbeit Fraunhofer's hatte erwarten lassen. Die Ursache hievon mag theils in den von ihm zu diesen Messungen angegebenen kostspieligen Apparaten, welche Wenige besitzen, theils darin zu suchen sein, dass Fraunhofer selbst auf eine Differenz aufmerksam macht zwischen dem aus diesen Beobachtungen abgeleiteten mittlern Zerstreuungsverhältniss, und demjenigen, mit dessen Zugrundelegung er die besten Effecte erhalten hat, — wodurch das theoretische Resultat zweifelhaft wird.

Obschon die Fraunhofer'schen Apparate zur Bestimmung des Brechungsverhältnisses ihren Zweck völlig erreichen, wird es dennoch dem Beobachter nicht entgehn, dass die e n d l i c h e Entfernung der Lichtquelle unbequeme Reductionen nöthig macht, und sehr grosse Localitäten erfordert. Wir wollen nun versuchen nachzuweisen, dass man mit einem gewöhnlichen terrestrischen Theodolithen, mit leicht anzubringenden kleinen Vorrichtungen, selbst in sehr beengter Localität und ohne jene Reductionen diese Bestimmungen vornehmen kann. Wir werden ferner zeigen, dass die oben angedeutete Fraunhofer'sche Wahrnehmung nicht gegen die Uebereinstimmung zwischen dem durch Theorie und Erfahrung abgeleiteten besten Zerstreuungsverhältniss spricht, sondern durch ein Versehen, das sich in seiner Rechnungsvorschrift eingeschlichen zu haben scheint, erklärt werden kann.

Die Ableitung des Brechungsverhältnisses setzt die Kenntniss des P r i s m e n w i n k e l s, sowie des Winkels zwischen dem in dasselbe eintretenden und dem austretenden Strahle voraus, wozu noch gehört, dass beide gegen ihre Brechungsflächen gleich geneigt seien.

Die Bestimmung des b r e c h e n d e n W i n k e l s eines Prisma ergibt sich sehr leicht, wenn dasselbe centrisch und normal auf der Alhidade des

Theodolithen befestigt und letztere so gedreht wird, dass das äussere von einer der brechenden Flächen erzeugte Reflexionsbild eines scharf begrenzten entfernten Objectes am Mittelfaden eines feststehenden gegen das Prisma gerichteten Fernrohrs erscheint. Sei nun der brechende Winkel des Prisma $= \psi$, so wird das Reflexbild der 2ten brechenden Fläche im Fernrohr erscheinen, wenn man die Alhidade um plus oder minus $180^0 - \psi$ dreht. Da nun Kreis und Alhidade in dieser Stellung verbunden und gemeinschaftlich in die erste Lage der Fläche I zurückgebracht werden können, so bestimmt sich ψ durch Repetition, und folglich einfacher und sicherer als mittelst des von Fraunhofer hiezu vorgeschlagenen Tangirungsfernrohrs.

Fraunhofer muss nun zur Bestimmung des Ablenkungswinkels eines Strahls den Theodolithen in bedeutender Entfernung von der Spalte, durch welche das Licht eintritt, aufstellen, theils wegen der erforderlichen Verlängerung des Fernrohres durch Ausziehen des Oculars, theils um kleine Reductionen des Winkels zu erhalten, — zu deren Ermittlung eine besondere kleine Triangulation nothwendig wird.

Es ist leicht zu sehen, dass man beiden Uebelständen begegnet und gar keiner Reduction der Winkel bedarf, wenn man die Lichtspalte im Brennpunkt eines achromatischen Objectives erzeugt, wodurch ein unendlich entferntes Bild derselben hervorgebracht und eine Annäherung des Messinstrumentes bis an dieses Objectiv möglich wird.

Um demgemäss die, wie bei Fraunhofer, von einem Heliostatspiegel oder irgend einem andern Reflexionsapparat durch die schmale Verticalöffnung eintretenden Lichtstrahlen unter sich parallel zu machen, mag etwa das Versicherungsfernrohr des Theodolithen dienen. Man löse es von dem letzteren, entferne das Ocular, und bringe statt dessen zwei Platten mit scharfen geraden Rändern an, welche zwischen sich die Spalte lassen. Man verstelle nun die Ocularröhre, bis die Spalte genau im Brennpunkte des Objectives ist. Dieser Apparat muss nun so aufgestellt werden, dass die vom Heliostaten kommenden Lichtstrahlen durch die vertical gestellte Oeffnung fallen und durch das horizontale Rohr und das Objectiv unter sich parallel in das dunkle Zimmer eintreten. An die Objectivfassung dieses Rohres, das etwa am Fensterladen befestigt sein kann, wird nun zum Aufstellen des Prisma ein kleiner horizontaler Tisch angebracht, und zwar in solcher Höhe, dass das Licht aus dem Objectiv in die Mitte der Höhe des Prisma trifft. Dieses selbst kann auf dieser Fläche um seine vertical gestellte Axe gedreht werden. Auf diese Art wird im Zimmer ein Spectrum von unendlich entfernter Lichtquelle erzeugt, und es ist nun die Aufgabe, den Theodolithen so einzurichten, dass die Winkel gefunden werden können zwischen dem durch das Objectiv direct gesehenen Bild der Verticalöffnung und zwischen den verschieden gefärbten durch das Prisma abgelenkten Bildern. Denn hier vereinigen sich die Winkel nicht im Centrum des Theodolithen, sondern sie kehren demselben ihre Oeffnung zu. Der Zweck ist leicht zu erreichen, indem man das Fernrohr des Instrumentes anstatt seiner Horizontalaxe mit einer cylindrischen Drehungsaxe von etwa der doppelten Länge versieht, und diese mit dem Fernrohr rechtwinklig verbindet. Der Theodolith wird nun vor das Objectiv des Licht bringenden Fernrohrs möglichst

nahe an das Prisma aufgestellt, so dass sein Fernrohr in gleicher Höhe mit jenem steht, und in dieser Lage nivellirt.

Zur Messung des Ablenkungswinkels einer bestimmten fixen Linie wird das Fernrohr zwischen den Alhidadenlagern mit seiner Axe so viel auf die Seite geschoben, und die Alhidade so gedreht, dass das Bild der fixen Linie im Fernrohr erscheint. Wir wissen jetzt noch nicht, ob das Prisma diejenige Lage hat, bei welcher Ein- und Austrittswinkel des zu beobachtenden Strahls gleich sind. Man findet diese Lage bekanntlich dadurch, dass in ihr das Bild am wenigsten[1]) abgelenkt erscheint, was durch Drehung des Prisma um seine Verticalaxe bewirkt wird. Dabei muss natürlich die Einstellung des Theodolithen nachfolgen. Ist in solcher Art genau auf die fixe Linie in ihrer grössten Digression eingestellt und der Kreis abgelesen, so dreht man das Prisma nahezu 180^0 um seine Verticalaxe, so dass der Strahl nun auf die entgegengesetzte Seite abgelenkt wird, löst hierauf die Alhidade, und stellt wieder durch Verschieben des Fernrohrs mit seiner Axe in den Lagern und durch Drehung der Alhidade und berichtigende Stellung des Prismas auf die kleinste[1]) Digression des nämlichen Strahles, ebenso wie wir es in der ersten Lage beschrieben haben. Der Unterschied der jetzigen Ablesung und der erstern ist der doppelte Ablenkungswinkel $2\gamma (= 2\mu$ nach Fraunhofer), d. h. der doppelte Winkel des einfallenden Strahles mit dem austretenden, für gleiche Ein- und Austrittswinkel, und bedarf hiernach durchaus keiner weitern Correction mehr. Es versteht sich von selbst, dass diese Messung repetirt werden könne. Von der Willkür des Beobachters hängt es nun allein ab, ob er den Brechungswinkel jeder andern fixen Linie ebenso bestimmen will, oder ob er es vorzieht, nur die Winkelunterschiede der einzelnen fixen Linien unter einander durch Repetition zu messen und mit dem gehörigen Zeichen dem gemessenen ganzen Winkel zuzulegen. Man ist genöthigt, stets von einer der grössern fixen Linien zur folgenden zu messen, weil für eine Stellung des Oculars nicht alle zugleich deutlich erscheinen, daher schon zur Messung des Abstandes je zweier consecutiven das Ocular so gestellt werden muss, dass es beide möglichst deutlich zeigt, also nicht die vortheilhafteste Stellung für jede einzelne hat. Man würde letzteres erreichen nach der von uns zuerst angegebenen Methode, nämlich durch Bestimmung des ganzen doppelten Ablenkungswinkels jeder für sich.

Bezeichnen wir nun, wie oben, den brechenden Winkel des Prismas mit ε, den Winkel des eintretenden Strahles mit dem austretenden mit γ, so ist nach dem Fraunhofer'schen Ausdruck, für den von uns gewählten Fall gleichen Ein- und Austrittswinkels, das Brechungsverhältniss für diese Linie:

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \psi)}{\sin \frac{1}{2}\psi}.$$

Nach diesem Ausdrucke wird man die Brechungsverhältnisse der Glasart, aus welcher das Prisma besteht, für jede der fixen Linien A,

1) In dem Original ist hier durch Uebersehen, meisten, beziehungsweise grösste gesetzt.

$B, C \ldots$ nach Fraunhofer erhalten. Wir wollen sie der Reihe nach mit

$$_An, \quad _Bn, \quad _Cn, \ldots$$

bezeichnen.

Für eine andere Glasart wird man ebenso

$$_An', \quad _Bn', \quad _Cn', \ldots$$

erhalten. Bekanntlich setzt nun die Berechnung eines achromatischen Objectives die Kenntniss des Zerstreuungsverhältnisses der beiden angewandten Glasarten voraus, d. h. das Verhältniss der Differenzen der n' zu den Differenzen der n:

$$\frac{\Delta n'}{\Delta n}.$$

Allein dieses Verhältniss ist den Fraunhofer'schen Erfahrungen gemäss nicht constant, sondern variirt für verschiedene Stellen des Spectrums. Es entsteht daher ein Zweifel darüber, in welcher Weise dasjenige Verhältniss angenommen werden soll, welches bei der Berechnung eines achromatischen Objectives den besten Effect herbeiführt. Fraunhofer hat sich dafür entschieden, aus den einzelnen Werthen des Zerstreuungsverhältnisses, welche von je einer fixen Linie zur nächsten gelten, nämlich aus den Werthen

$$\frac{_Bn' - _An'}{_Bn - _An}, \quad \frac{_Cn' - _Bn'}{_Cn - _Bn}, \quad \frac{_Dn' - _Cn'}{_Dn - _Cn}, \text{ etc.},$$

das Mittel mit Rücksicht auf die Intensität des entsprechenden Strahls zu nehmen. Durch practische Versuche fand er jedoch als den vortheilhaftesten einen Werth von $\frac{\Delta n'}{\Delta n}$, der von dem nach dieser Annahme berechneten nicht unbedeutend abweicht. Wir glauben, dass diese Abweichung ihren Grund blos darin hat, dass seine Wahl der Rechnungsvorschrift sich nicht strenge rechtfertigen lässt. Denn die Unsicherheit über den vortheilhaftesten Werth von $\frac{\Delta n'}{\Delta n}$ wird nur entschieden werden können aus der Bedeutung, welche diese Grösse in den bei der Rechnung zu Grunde gelegten Formeln hat. In diesen stellt aber $\frac{\Delta n'}{\Delta n}$ einen wahren Differentialquotienten vor, dessen Einführung dazu dient, von einer bestimmten Stelle des Spectrums aus, für welche das Objectiv die geforderten Bedingungen erfüllt, und der das angenommene n und n' zugehören, mit Annäherung auf jede andere überzugehen. Wollten wir beispielsweise von einem Strahl R, dessen $n = {_Rn}$ und $n' = {_Rn'}$ in der Rechnung zu Grunde gelegt sind, nur übergehen auf den bestimmten Strahl C, so würden wir offenbar nehmen müssen

$$\frac{\Delta n'}{\Delta n} = \frac{_Cn' - _Rn'}{_Cn - _Rn};$$

ebenso, wenn wir übergehen wollten auf den Strahl D:

$$\frac{\Delta n'}{\Delta n} = \frac{_Dn' - _Rn'}{_Dn - _Rn};$$



desgleichen für den Strahl E:

$$\frac{\Delta n'}{\Delta n} = \frac{{}_E n' - {}_R n'}{{}_E n - {}_R n}, \text{ etc.}$$

Um daher für das ganze Spectrum gleichzeitig, so weit es möglich ist, der Bedingung zu entsprechen, wird man offenbar aus allen solchen Werthen den mittlern mit Berücksichtigung der verschiedenen Dichtigkeit der Strahlen zu nehmen haben. Nennen wir S den allgemeinen Index irgend einer Stelle des Spectrums (entsprechend dem B, C . . .) und bezeichnet K die derselben zugehörige Intensität, so wird demnach der wahre Mittelwerth sein:

$$\text{I.} \qquad \frac{\Delta n'}{\Delta n} = \left(\int K \frac{{}_S n' - {}_R n'}{{}_S n - {}_R n} dS\right) : \int K dS = p : q,$$

wo die Integrale über das ganze Spectrum zu nehmen sind. Man kann sie natürlich nur annähernd, durch mechanische Quadratur, finden. Zerfällt man zu diesem Ende jedes von ihnen in die einzelnen Theile, welche der Reihe nach begrenzt sind: durch das rothe Ende A des Spectrums und die erste fixe Linie B, durch die Linie B und Linie C, durch C und D, etc., endlich durch die letzte Fraunhofer'sche Linie H und durch das violette Ende I, so wird man mit ausreichender Näherung in jedem der Theile den Factor

$$\frac{{}_S n' - {}_R n'}{{}_S n - {}_R n}$$

constant und gleich dem arithmetischen Mittel der beiden an den Grenzen dieses Theils giltigen Werthe setzen können, — welche Werthe sich aus den Messungen ergeben und demnach bekannt sind. Der Zähler nimmt dadurch die Form an:

$$\text{II.} \qquad p = \tfrac{1}{2}({}_R a + {}_R b)\int_A^B K dS + \tfrac{1}{2}({}_R b + {}_R c)\int_B^C K dS +$$
$$+ \tfrac{1}{2}({}_R c + {}_R d)\int_C^D K dS + \cdots \tfrac{1}{2}({}_R h + {}_R i)\int_H^I K dS,$$

wo zur Abkürzung, analog den Fraunhofer'schen Bezeichnungen gesetzt ist:

$$\text{III.} \qquad \begin{cases} {}_R a = \dfrac{{}_A n' - {}_R n'}{{}_A n - {}_R n} \\ {}_R b = \dfrac{{}_B n' - {}_R n'}{{}_B n - {}_R n} \\ {}_R c = \dfrac{{}_C n' - {}_R n'}{{}_C n - {}_R n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ {}_R i = \dfrac{{}_I n' - {}_R n'}{{}_I n - {}_R n}. \end{cases}$$

Die Integrale, welche noch in II. vorkommen, und deren Summe zugleich den Nenner in I. bildet, sind nichts anderes als die Maasse der Lichtmengen, welche sich im Spectrum zwischen A und B, B und $C, \ldots,$ H und I befinden. Fraunhofer hat diese aus photometrischer Messung der Intensitäten der Strahlen abgeleitet. Bezeichnen wir sie mit

$$_{A,B}K, \quad _{B,C}K, \quad _{C,D}K, \ \ldots$$

d. h. setzen wir

$$\int_A^B K dS = {}_{A,B}K; \quad \int_B^C K dS = {}_{B,C}K; \ldots \quad \int_H^I K dS = {}_{H,I}K,$$

so ist nach seiner Bestimmung:

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} _{A,B}K = 0.000 \\ _{B,C}K = 0.021 \\ _{C,D}K = 0.299 \\ _{D,E}K = 1.000 \\ _{E,F}K = 0.328 \\ _{F,G}K = 0.185 \\ _{G,H}K = 0.035 \\ _{H,I}K = 0.000 \end{cases}$$

und wir erhalten hiermit aus I. annähernd:

$$_R\left(\frac{\Delta n'}{\Delta n}\right) = \frac{\frac{1}{2}(_Ra + _Rb)_{A,B}K + \frac{1}{2}(_Rb + _Rc)_{B,C}K + \frac{1}{2}(_Rc + _Rd)_{C,D}K + \cdots + \frac{1}{2}(_Rh + _Ri)_{H,I}K}{_{A,B}K + {}_{B,C}K + {}_{C,D}K + \cdots + {}_{H,I}K}.$$

Da die Grössen $_Ra$, $_Rb$, $_Rc, \ldots {}_Ri$ ihrer Bedeutung nach (s. III.) nicht bloss von der Lage des Strahls $A, B, C, \ldots I,$ auf welchen sich jede bezieht, sondern auch von dem Strahle R, welchem das zu Grunde gelegte n und n' zugehören, abhängig sind, so wird der Mittelwerth $\frac{\Delta n'}{\Delta n}$ nothwendig ebenfalls Function von R werden, weshalb wir ihm gleichfalls R zum Index gegeben haben.

Man sieht daraus, dass nicht nur der Werth der Brechungsverhältnisse n und n' abhängig ist von dem Strahle R, für welchen die Rechnung zunächst geführt wird, sondern dass sich auch der Mittelwerth des Zerstreuungsverhältnisses $\frac{\Delta n'}{\Delta n}$ bei denselben Glasarten je nach der Wahl von R verändert. Hierin besteht nun ein wesentlicher Unterschied zwischen der von uns abgeleiteten Rechnungsvorschrift (V.) und der von Fraunhofer gegebenen; denn in der seinigen kommen nur die Verhältnisse der Unterschiede der n je zweier auf einander folgenden fixen Linien vor, wodurch der (von ihm mit x bezeichnete) Mittelwerth von $\frac{\Delta n'}{\Delta n}$ ganz unabhängig wird von R oder derjenigen Stelle des Spectrums, für welche n und n' gelten. Nach Fraunhofer giebt es daher innerhalb der Grenzen des Spectrums zwar unendlich viele Paare von zusammengehörigen n

und n', aber nur ein Einziges $\frac{\Delta n'}{\Delta n}$, d. h. er macht diesen Differentialquotienten constant für das ganze Spectrum, während seine vortheilhafteste Bestimmung der Natur der Sache nach abhängen muss von der Wahl der Stelle, für welche er gelten soll.

Wir werden nun durch numerische Berechnung des von ihm gegebenen Falles nachweisen, dass die Abweichung seiner Rechnungsvorschrift von der unsrigen gross genug ist, um die Annahme zum Mindesten sehr möglich zu machen, dass der bemerkte Unterschied zwischen seiner Theorie und Erfahrung nur in dem eben erörterten Versehen seinen Grund habe.

Wir müssen, um nach unserer Formel ${}_R\left(\frac{\Delta n'}{\Delta n}\right)$ berechnen zu können, eine bestimmte Stelle des Spectrum (R) zu Grunde legen. Fraunhofer hat nicht angegeben, auf welchen Strahl sich n und n' beziehen, welche er bei der Berechnung der Objective angewandt hatte, an denen er seine Wahrnehmung über die bestmögliche Aufhebung der Farbenzerstreuung gemacht hat. Wir sind daher genöthigt, hierüber eine Voraussetzung zu machen, und werden demnach die Rechnung für die beiden Strahlen D und E führen, da diese die hellste Stelle des Spectrums, welche bei der Berechnung eines Objectives vor allem berücksichtigt werden muss, zunächst einschliessen. Vorher müssen wir aber noch unsere Formel für den Fall specificiren, wo R mit einer der fixen Linien, z. B. D, zusammenfällt. Wollte man nämlich in V. unmittelbar $R = D$ setzen, so würde der Ausdruck unbestimmt werden, weil der darin vorkommende Coefficient d die Form $\frac{0}{0}$ annehmen würde. Die Zweideutigkeit wird leicht durch eine andere Zerlegung des im Zähler bei I. vorkommenden Integrals gehoben, welches man im gegenwärtigen Fall abtheilen müsste in die einzelnen, deren Grenzen sind: A bis B, B bis C, C bis E, E bis F, F bis G, G bis H, H bis I. Im Uebrigen bleibt die Entwickelung der obigen ganz analog, weshalb wir nur das Resultat anführen:

VI.

$${}_D\left(\frac{\Delta n'}{\Delta n}\right) = \frac{\frac{1}{2}({}_Da + {}_Db)\,{}_{A,B}K + \frac{1}{2}({}_Db + {}_Dc)\,{}_{B,C}K + \frac{1}{2}({}_Dc + {}_De)\,{}_{C,D}K + \frac{1}{2}({}_Dc + {}_De)\,{}_{D,E}K + \frac{1}{2}({}_De + {}_Df)\,{}_{E,F}K + \cdots}{{}_{A,B}K + {}_{B,C}K + {}_{C,D}K + {}_{D,E}K + {}_{E,F}K + \cdots}$$

Man ersieht aus dieser Formel, dass so oft R selbst eine der Fraunhofer'schen fixen Linien (D) ist, für das dadurch unbestimmt werdende Verhältniss (${}_Dd$) im ersten Gliede wo es vorkommt das nächstfolgende (${}_De$) und im zweiten das nächstvorhergehende bestimmte (${}_Dc$) genommen werden muss.

Die Fraunhofer'schen Bestimmungen, auf welche wir die Rechnung anwenden wollen, sind folgende für Crownglas Nr. 13 und Flintglas Nr. 30 giltigen:

	n	n'
B . . .	1.524312 . . .	1.623570
C . . .	1.525299 . . .	1.625477
D . . .	1.527982 . . .	1.630585
E . . .	1.531372 . . .	1.637356
F . . .	1.534337 . . .	1.643466
G . . .	1.539908 . . .	1.655406
H . . .	1.544684 . . .	1.666072

${}_Bn - {}_Dn = -\ 3670$	${}_Bn' - {}_Dn' = -\ 7015$
${}_Cn - {}_Dn = -\ 2683$	${}_Cn' - {}_Dn' = -\ 5108$
${}_En - {}_Dn = +\ 3390$	${}_En' - {}_Dn' = +\ 6771$
${}_Fn - {}_Dn = +\ 6355$	${}_Fn' - {}_Dn' = +\ 12881$
${}_Gn - {}_Dn = +\ 11926$	${}_Gn' - {}_Dn' = +\ 24821$
${}_Hn - {}_Dn = +\ 16702$	${}_Hn' - {}_Dn' = +\ 35487$

log ${}_Bn - {}_Dn = 3.5647n$	log ${}_Bn' - {}_Dn' = 3.8460n$
${}_Cn - {}_Dn$ ... 3.4286n	${}_Cn' - {}_Dn'$ ... 3.7082n
${}_En - {}_Dn$ ... 3.5302	${}_En' - {}_Dn'$ ... 3.8307
${}_Fn - {}_Dn$ ... 3.8032	${}_Fn' - {}_Dn'$ ... 4.1099
${}_Gn - {}_Dn$ ... 4.0764	${}_Gn' - {}_Dn'$ ... 4.3949
${}_Hn - {}_Dn$ ... 4.2227	${}_Hn' - {}_Dn'$ ... 4.5501

log ${}_Db = 0.2813$	${}_Db = 1.911$	$\frac{1}{2}({}_Db + {}_Dc) = 1.907$
${}_Dc$ ... 0.2796	${}_Dc = 1.904$	$\frac{1}{2}({}_Dc + {}_De) = 1.906$
${}_De$ ... 0.2805	${}_Dc = 1.908$	$\frac{1}{2}({}_Dc + {}_Df) = 1.967$
${}_Df$ ... 0.3067	${}_Df = 2.026$	$\frac{1}{2}({}_Df + {}_Dg) = 2.054$
${}_Dg$ ... 0.3185	${}_Dg = 2.082$	$\frac{1}{2}({}_Dg + {}_Dh) = 2.104$
${}_Dh$ ... 0.3274	${}_Dh = 2.125$	

log $\frac{1}{2}({}_Db + {}_Dc) = 0.2804$	log ${}_{B,C}K = 8.3222$
$\frac{1}{2}({}_Dc + {}_Dc)$ ... 0.2801	${}_{C,D}K$ ... 9.4757
$\frac{1}{2}({}_Dc + {}_De)$ ... 0.2801	${}_{D,E}K$ ... 0.0000
$\frac{1}{2}({}_Dc + {}_Df)$ ... 0.2938	${}_{E,F}K$ ... 9.5159
$\frac{1}{2}({}_Df + {}_Dg)$ ... 0.3126	${}_{F,G}K$ ... 9.2672
$\frac{1}{2}({}_Dg + {}_Dh)$ ... 0.3230	${}_{G,H}K$ ... 8.5441

	Logar.	Zahlen.
$\frac{1}{2}({}_Db + {}_Dc) \cdot {}_{B,C}K$	8.6026	0.040
$\frac{1}{2}({}_Dc + {}_De) \cdot {}_{C,D}K$	9.7558	0.570
$\frac{1}{2}({}_Dc + {}_De) \cdot {}_{D,E}K$	0.2801	1.906
$\frac{1}{2}({}_Dc + {}_Df) \cdot {}_{E,F}K$	9.8097	0.645
$\frac{1}{2}({}_Df + {}_Dg) \cdot {}_{F,G}K$	9.5798	0.380
$\frac{1}{2}({}_Dg + {}_Dh) \cdot {}_{G,H}K$	8.8671	0.074

Zähler von ${}_D\left(\frac{\Delta n'}{\Delta n}\right)$ . . . . 3.615 log = 0.5581

Nenner $= {}_{A,B}K + {}_{B,C}K + {}_{C,D}K + \cdots + {}_{H,I}K = 1.868$ 0.2713

log ${}_D\left(\frac{\Delta n'}{\Delta n}\right)$ 0.2868

$${}_D\left(\frac{\Delta n'}{\Delta n}\right) = 1.935.$$

Führt man in ganz gleicher Weise die Rechnung für die fixe Linie E ($R = E$), so findet sich:

$$_E\left(\frac{\Delta n'}{\Delta n}\right) = 2{,}028.$$

Der nach Fraunhofer's Erfahrung als der vortheilhafteste gefundene Werth 1,98 fällt genau in die Mitte zwischen unsere beiden Werthe, es ist daher kein Grund vorhanden, auf die Fraunhofer'sche Beobachtung einen Zweifel über die Uebereinstimmung zwischen der Erfahrung und der berichtigten Theorie zu gründen.

Schliesslich bemerken wir noch, dass wir zwar die Wahl von R (d. h. des n und zugehörigen n', welche der Rechnung zu Grunde gelegt werden) innerhalb der Grenze des Spectrums willkürlich gelassen haben, indem unsere Formeln V. und VI. den für jedes R vortheilhaftesten Werth von $\frac{\Delta n'}{\Delta n}$ geben: da aber doch immer die hellsten Strahlen bei jeder achromatischen Combination die wichtigsten bleiben, so würde es unpassend sein, R zu nahe an Eines der Enden des Spectrums zu verlegen, und man wird immer wohlthun, entweder von einer der beiden fixen Linien D und E selbst, oder von einer dazwischen liegenden auszugehn.

Wir behalten uns vor, bei anderer Gelegenheit noch eine andere Methode bekannt zu machen, durch welche man ohne Messinstrumente aus den bekannten Brechungs- und Zerstreuungskräften eines Prismas die eines andern mit einer Genauigkeit findet, welche für die meisten Zwecke ausreicht.

Beilage III.

Trigonometrische Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an centrirten sphärischen Flächen.

Von

Dr. L. v. Seidel.

Abdruck aus den Sitzungsberichten der math.-physikalischen Classe der kgl. bayr. Akademie der Wissenschaften, vom 10. Nov. 1866. Die Bezeichnungen sind entsprechend den von uns eingeführten umgeändert.

Die zum Gemeingut gewordenen mathematischen Formeln, nach welchen man (durch eine trigonometrische Rechnung) den Weg eines Lichtstrahles durch ein System centrirter Kugelflächen genau zu verfolgen im Stande ist, und von welchen der praktische Optiker Gebrauch macht, wenn er in der Rechnung die letzte Hand anlegen will zur Verbesserung der bereits annäherungsweise gefundenen Constructionen, — fassen bekanntlich das geometrische Problem nicht in seiner ganzen Allgemeinheit, sondern schränken sich ein auf die Betrachtung solcher Lichtstrahlen, die mit der optischen Axe ursprünglich in einer Ebene liegen, und in Folge dessen auch alle successiven Brechungen in dieser festen Ebene erleiden. Sie begreifen hiermit alle Strahlen des von einem Punkte ausgehenden Lichtkegels nur dann in sich, wenn dieser Punkt in der Mitte des Gesichtsfeldes (d. h. in der verlängerten optischen Axe) liegt; in jedem andern Falle genügen den besondern Voraussetzungen jener Formeln nur mehr die Strahlen, welche der den Kegel halbirenden Ebene angehören, d. h. der Ebene, die durch die Spitze des Kegels und durch die optische Axe gelegt wird. Denkt man zum Beispiel diese Axe horizontal gerichtet und den leuchtenden Punkt irgendwo gerade über ihr befindlich, so kann man nach den seither vorliegenden trigonometrischen Formeln Strahlen nicht verfolgen, welche von ihm aus entweder auf die rechte oder auf die linke Hälfte der Oeffnungsfläche des Apparates treffen, sondern allein diejenigen, deren Auffallspunkte genau in der Scheidungslinie beider Hälften sich befinden. Diese letzteren mussten bisher als die ausgewählten Repräsentanten des ganzen Lichtkegels gelten; schwerlich ist jemals (vor der ganz neuen Anwendung, welche die hernach mitzutheilenden Rechnungsvorschriften im Steinheil'schen Institute gefunden haben) der genaue Weg eines einzigen andern Strahls auch nur durch eine einfache Linse mittelst des Calculs verfolgt worden. Zwar genügt das Fraunhofer'sche Fernrohrobjectiv einer Bedingung der grössten Leistung auch in Bezug auf die Strahlen ausserhalb der Axenebene (wie ich an anderem Orte nachgewiesen habe), aber da es derselben Gleichung auch schon genügen musste, um jene repräsentativen Strahlen in der Axenebene möglichst gut

zur Vereinigung zu bringen, und da nach Berücksichtigung dieser letzteren an dem einfachen Doppelobjectiv überhaupt nichts mehr disponibel blieb, so konnte es gefunden werden, ohne dass eine Erweiterung der Rechnung auf den Raum nothwendiges Erforderniss war. Selbst Bessel's meisterhafte theoretische Discussion über die dioptrische Wirkung des Heliometerobjectivs der Königsberger Sternwarte hat die Strahlen ausserhalb der Axenebene bei Seite gelassen[1]; andrerseits geht Gauss bei der Ableitung seiner Näherungsformeln (in den „dioptrischen Untersuchungen") zwar aus von Gleichungen, welche Allgemeinheit mit Strenge verbinden, aber er giebt keine Anweisung für die Berechnung dreier in denselben auftretenden Winkel (Θ, λ, λ'), weil es für das Ziel seiner Untersuchung und unter den Voraussetzungen derselben genügte, zu constatiren, dass der Cosinus des ersten und die Sinus der beiden andern von der Einheit nur um kleine Grössen zweiter Ordnung verschieden seien. In ähnlicher Weise waren auch in meiner (Astronom. Nachrichten Nr. 1027 ff. veröffentlichten) Untersuchung, welche für den allgemeinsten Fall die Entwickelung der Glieder von der Ordnung der sogenannten sphärischen Abweichung zum Gegenstand hat, nur Näherungswerthe für die trigonometrischen Functionen jener Winkel zu Grunde zu legen. Es versteht sich, und ist auch von Bessel am oben angeführten Orte ausgesprochen worden, dass die Entwerfung strenger Formeln, durch welche für jede Lage des auffallenden Strahles die entsprechende des gebrochenen bestimmt wird, keine wirkliche mathematische Schwierigkeit bietet; man erhält aber bei einer nicht ganz angemessenen Wahl der Grössen, mit Hülfe deren diese Lage bestimmt wird, die Rechnungsvorschriften leicht in einer Gestalt, die ganz geeignet ist, von ihrer wirklichen Benützung selbst einen ausdauernden Rechner zurückzuschrecken, (um so mehr, da die Verfolgung einzelner Strahlen im Raume überhaupt nur angezeigt ist, wenn man über eine etwas grössere Anzahl von Brechungen verfügt) — z. B. in solcher Form, dass bei jeder einzelnen Ablenkung, die der Strahl erleidet, entweder ein unbequemes sphärisches Dreieck aufgelöst, oder durch successive Näherung vorgegangen werden muss. Nachdem indessen die steigenden Anforderungen an Oeffnung und Gesichtsfeld, namentlich bei Photographenobjectiven, nicht mehr erlauben, die Strahlen ausser der Axenebene zu ignoriren, so hoffe ich, einigen denkenden Optikern einen Dienst zu leisten durch die Mittheilung der folgenden Rechnungsvorschriften, welche die Probe der Anwendbarkeit bereits vielfach bestanden haben. Den nächsten Anlass, sie definitiv zusammenzustellen, hat mir der Wunsch des Herrn Ministerialraths Dr. Steinheil gegeben. Für die Zwecke des von ihm begründeten optischen Instituts hat seit einem Jahre Dr. Ad. Steinheil, der Sohn, meine Formeln zum öftern benützt: er findet nach denselben die Mühe der Berechnung Eines Strahles ausserhalb der Axenebene nur sehr wenig grösser als diejenige, unter analoger Vorsicht gegen Irrungen des Calculs, zwei Strahlen in der Axenebene zu verfolgen. Hiernach scheinen die Formeln das Maximum der erreichbaren Bequemlichkeit sehr nahe darzubieten; denn nicht nur erfordert nach der Natur der Sache die Bestimmung der Lage im Raume

1) Astronomische Untersuchungen, Bd. I, Abh. II, § 18.

überall zwei Projectionen, wo in der Ebene eine genügt, sondern der allgemeine Fall ist auch deshalb verwickelter, weil auf jede einzelne Grösse eine grössere Anzahl von einander unabhängiger Variabeln Einfluss erhält.

Handelt es sich um die Berechnung eines Apparates, der ausgeführt werden soll, so wird man der Sicherheit halber genöthigt sein, für jeden Strahl, der theoretisch verfolgt wird, entweder nach den Gleichungen, welche zur Bestimmung der gesuchten Stücke aufgestellt worden sind und ausreichen, die ganze Rechnung zweimal unabhängig zu führen, oder neben diesen Gleichungen noch besondere Controlformeln zur Prüfung der erhaltenen Zahlenwerthe zu benützen. Die letztere Art der Verification (natürlich unter der Voraussetzung, dass die Controlen erschöpfend für die einzelnen Acte der Rechnung sind) verdient unter den beiden Wegen den Vorzug, falls ein Rechner die ganze Arbeit zu machen hat, weil ein solcher bekanntlich leicht an gleicher Stelle wieder in den gleichen Fehler verfällt; ich habe deshalb bei der Entwerfung der nachstehenden Vorschriften ein besonderes Augenmerk auf die Herstellung geeigneter Probeformeln gerichtet. Das Princip, nach welchem man erkennt, welche Theile einer numerischen Rechnung durch die richtige Erfüllung einer bestimmten Controlgleichung verificirt sind und welche nicht, ist einfach und fliesst aus der Natur der Sache. Wenn zur Berechnung einer Anzahl von Unbekannten eine gleich grosse Anzahl von Gleichungen einmal aufgestellt ist, so ist dadurch die Art der Abhängigkeit jener gesuchten Grössen von den gegebenen mathematisch vollkommen fest gelegt: dieselben Variabeln (oder einige von ihnen) können nicht noch einer weiteren überzähligen Bedingung sich unterwerfen, welche nicht aus ihrer bereits fixirten mathematischen Functionsform von selbst folgt. Jede sich darbietende überzählige Gleichung (Controlformel) für die Unbekannten muss also aus einigen der Gleichungen, die schon zur Bestimmung dieser Unbekannten benützt sind (oder aus ihnen allen zusammen), als eine identische Folgerung sich ableiten lassen, auch wenn vielleicht die Betrachtung, durch welche wir zunächst auf sie gestossen sind, ursprünglich eine andere Richtung eingeschlagen hätte. Man wird also auch in dem letzteren Falle (der ziemlich häufig bei Grössen sich ergiebt, die für unsere Anschauung eine Bedeutung darbieten) nur zu untersuchen haben, welche unter den Bestimmungsgleichungen der Unbekannten nothwendig und ausreichend sind, um die überzählige (d. i. Control-) Gleichung aus ihnen abzuleiten: es ist klar, dass das richtige numerische Eintreffen der Controle nur eine Probe für die richtige Erfüllung derjenigen Bestimmungsgleichungen abgiebt, aus welchen sie selbst mathematisch hervorgeht, und nicht auch für die übrigen, die keinen Antheil an ihr haben.

Der geradlinige Strahl, welcher an einer der sphärischen Flächen eines centrirten optischen Apparates gebrochen wird, möge diese Fläche treffen im Punkte $\mathfrak{P}$. Durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Kugelfläche denken wir uns senkrecht zur optischen Axe eine Ebene gelegt: der auffallende Strahl (nöthigenfalls vor- oder rückwärts verlängert) durchdringe dieselbe in $\mathfrak{Q}$, der gebrochene aber in $\mathfrak{Q}'$. Der eine wie der andere wird nach

seiner Lage im Raume vollkommen bestimmt durch je vier Stücke, die sehr verschieden gewählt werden können; wir nehmen dafür zwei Coordinaten, welche in der durch 𝔐 gelegten Transversalebene die Lage des Punktes 𝔔 (oder resp. 𝔔′) fixiren, und zwei Winkel, durch welche die Richtung definirt wird, unter der der Strahl (oder seine virtuelle Fortsetzung) den Punkt 𝔔 (resp. 𝔔′) passirt. Es ist die Aufgabe, aus den gegebenen vier Stücken für den auffallenden Strahl zu berechnen die vier ähnlichen für den gebrochenen, — natürlich unter Voraussetzung der Kenntniss des Brechungsverhältnisses und der Krümmung der brechenden Sphäre. Weil ferner, wenn mehrere Brechungen auf einander folgen, bei dem Uebergang von der einen zur andern jedesmal der Punkt 𝔐 ein anderer wird, und also die durch ihn gelegte Transversalebene sich zugleich verrückt, so muss auch der Zusammenhang hergestellt werden zwischen den Coordinaten, welche sich auf die eine beziehen, und denjenigen in der nächstfolgenden.

Die Ebene des Dreiecks 𝔓𝔔𝔐 enthält den auffallenden Strahl 𝔓𝔔 und das Einfallsloth 𝔓𝔐: folglich nach dem Gesetze der Brechung auch den gebrochenen Strahl 𝔓𝔔′. Oder mit andern Worten: die beiden Ebenen 𝔓𝔔𝔐 und 𝔓𝔔′𝔐 coincidiren. Folglich haben sie auch eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie mit der durch 𝔐 gelegten Transversalebene, d. h. die drei Punkte 𝔔, 𝔔′, 𝔐 liegen in einer Geraden, oder die beiden Radienvectoren, welche von 𝔐 aus nach 𝔔 und 𝔔′ gezogen werden, haben einerlei Richtung[1]).

Bedient man sich also zur Bestimmung der Lage von 𝔔 und 𝔔′ innerhalb unserer Transversalebene der Polarcoordinaten, nämlich der eben gedachten Radienvectoren $\mathfrak{MQ} = U$, $\mathfrak{MQ}' = U'$, und der von diesen mit einer festen Richtung gebildeten Winkel, so hat man den Vortheil, dass die anguläre Coordinate durch die Brechung sich nicht verändert.

Die feste Richtung, von der aus die Polarwinkel zählen, ist an sich ganz willkürlich, sie soll aber in allen nach einander zur Betrachtung kommenden Transversalebenen dieselbe sein, d. h. in diesen verschiedenen Ebenen bezeichnet durch unter sich parallele und von der optischen Axe aus in gleichem Sinne einseitig gezogene Gerade. Der Bequemlichkeit des Ausdrucks halber mag sie für uns die Richtung von 𝔐 aus nach oben heissen (wobei die Vorstellung horizontaler Lage der optischen Axe zu Grunde liegt); von ihr an werden die Winkel, welche verschiedene aus 𝔐 gezogene (und nie rückwärts über 𝔐 verlängerte) Radienvectoren mit ihr einschliessen, alle in einem festgesetzten Sinne („rechts herum“ sei er genannt) durchgezählt von 0 bis 360 Grad[2]). In dieser Weise

1) Im Falle die sphärische Fläche eine spiegelnde statt einer brechenden wäre, würden beide Richtungen einander diametral entgegengesetzt sein: von diesem besondern und zugleich besonders einfachen Fall werde ich im Folgenden nicht weiter reden.

2) Es ist übrigens erlaubt, von dem so gerechneten Winkel 360° abzuziehen, also z. B. statt der Winkel im 3. und 4. Quadranten negative stumpfe oder spitze Winkel einzuführen, — überhaupt beliebige Vielfache der ganzen Kreisperipherie zu addiren oder zu subtrahiren, — weil dadurch weder die durch die Winkel bestimmten Richtungen noch die goniometrischen Functionen der ganzen Winkel sich ändern, halbirte oder sonst getheilte Winkel aber in unseren Ausdrücken nicht auftreten.

gerechnet bezeichne ζ den gemeinschaftlichen Winkel unserer beiden Radienvectoren $\mathfrak{M}\mathfrak{O}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{O}'$ mit der Richtung nach oben, während U, U' die (nothwendig positiven) Längen dieser Radienvectoren vorstellen.

Durch diese Polarcoordinaten U, ζ und resp. U', ζ' werden die Durchschnittspunkte $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}'$ des Strahles, vor und nach der Brechung, mit der festen Transversalebene fixirt. Die Winkel, welche wir noch gebrauchen zur Bestimmung der Richtung, aus welcher er auf jene Punkte gelangt, kann man, in der Sprache der sphärischen Astronomie, kurzweg bezeichnen als die scheinbare Distanz (τ) desjenigen Punktes am Himmel, auf welchen der rückwärts verlängerte Strahl weist, von der Mitte des Gesichtsfeldes, und als den Positionswinkel (π) eben dieses Punktes am Himmel, genommen an der Mitte des Gesichtsfeldes und von der Richtung nach oben aus. Ohne diese technische Ausdrucksweise definirt man dieselben Grössen wie folgt: Denkt man sich von $\mathfrak{O}$ aus nach derjenigen Seite zu, von welcher her ursprünglich das Licht kommt, eine Parallele mit der optischen Axe gezogen, so wird dieselbe mit dem auf der nämlichen Seite unserer Transversalebene liegenden Stück des auffallenden Strahles (oder seiner Verlängerung) einen Winkel bilden, den wir τ nennen (und welcher klein ist in den zunächst wichtigen Fällen); projicirt man ferner das eben bezeichnete Stück unseres Strahles in unsere durch $\mathfrak{M}$ gelegte Transversalebene, so schliesst seine (von $\mathfrak{O}$ aus einseitig fortgehende) Projection mit der aus $\mathfrak{O}$ nach oben führenden Richtung einen Winkel π ein, welcher von der letzteren Richtung aus genau so, wie vorhin ζ, nämlich rechts herum bis zu 360^0 gezählt werden soll[1]). Für den gebrochenen Strahl treten zwei analoge Winkel τ', π' (deren Scheitel in $\mathfrak{O}'$ liegen) an die Stelle von τ, π.

Um den Uebergang von den Grössen U, τ, π zu den durch die Brechung veränderten Werthen U', τ', π' in einer für die Zahlenrechnung angemessenen Weise herzustellen, ist noch die Einführung von einigen Hülfswinkeln nöthig. Wir bezeichnen mit λ den (inneren) Winkel bei $\mathfrak{O}$ im Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{O}\mathfrak{M}$, mit λ' den analogen bei $\mathfrak{O}'$ im Dreiecke $\mathfrak{P}\mathfrak{O}'\mathfrak{M}$, ferner mit φ den Winkel bei $\mathfrak{P}$ im ersteren Dreiecke, d. h. den Einfallswinkel des Strahls, mit φ' den ähnlichen im zweiten Dreiecke, oder den Brechungswinkel.

Das Verhältniss der Sinus der beiden letzteren Winkel ist nach dem Brechungsgesetz für Strahlen irgend einer bestimmten Farbe eine von der Natur der beiden Medien abhängige Constante; wir setzen, nach der üblichen Bezeichnung

$$\sin\varphi : \sin\varphi' = \frac{1}{n} : \frac{1}{n'}.$$

Der Radius der brechenden Kugelfläche, ausgedrückt in derselben Längeneinheit, deren man sich für die Radienvectoren U, U' bedient, sei mit R bezeichnet. Wir nehmen hier diese Grösse immer als positiv an,

---

1) Man kann auch τ, π analog dem U, ζ definiren, nämlich τ als den angulären Werth des Radiusvectors, π als den Polarwinkel des Punktes, in welchem der Strahl eine auf der Axe senkrechte Ebene trifft, welche auf derjenigen Seite, von der das Licht kommt, in unendlicher Entfernung gedacht wird. [Vergleiche übrigens noch den Zusatz am Ende dieses Wiederabdrucks.]

und halten die beiden Fälle, in welchen die Sphäre ihre Convexität oder Concavität gegen diejenige Seite wendet, von welcher her ursprünglich das Licht kommt, in den Formeln durch Doppelzeichen auseinander. Ueberall bezieht sich im Folgenden, wo ein solches Doppelzeichen steht, das obere auf den ersten, das untere auf den zweiten der so eben bezeichneten Fälle. Man könnte beide durch ein und dieselbe Formel umfassen, wenn man an R selbst (wie es gewöhnlich geschieht) ein Vorzeichen unterscheiden und zugleich die Definition der Winkel λ, λ' etwas anders einrichten wollte, als wir sie aufgestellt haben: für den Gebrauch in numerischer Rechnung, und besonders für die mit derselben zu verbindende geometrische Vorstellung scheint mir aber die hier getroffene Anordnung etwas bequemer.

Zu den gegebenen Grössen τ, π, ζ wird zuerst λ berechnet. Wir denken uns um den Punkt $\mathfrak{O}$ unserer Transversalebene, und zwar auf derjenigen Seite der letzteren, von welcher her ursprünglich das Licht kommt, mit beliebigem Radius eine Halbkugel beschrieben: auf der Oberfläche derselben werde momentan mit $\mathfrak{R}$ der Punkt bezeichnet, in welchem sie von einer durch $\mathfrak{O}$ parallel zur optischen Axe gelegten Geraden getroffen wird; mit $\mathfrak{S}$ der Punkt, in welchem sie vom Strahl $\mathfrak{P}\mathfrak{O}$ (oder dessen Verlängerung) durchdrungen wird: mit $\mathfrak{T}$ (in unserer Transversalebene gelegen) der Punkt, in welchem der über $\mathfrak{O}$ hinaus verlängerte Radiusvector $\mathfrak{M}\mathfrak{O}$ sie trifft. Im sphärischen Dreiecke $\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ ist Seite $\mathfrak{R}\mathfrak{T} = 90^0$, Seite $\mathfrak{R}\mathfrak{S} = \tau$, der Winkel bei $\mathfrak{R}$ hat einen der Werthe $\zeta - \pi$ oder $\pi - \zeta$; endlich ist Seite $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ gleich dem äusseren oder dem inneren Winkel bei $\mathfrak{O}$ im ebenen Dreiecke $\mathfrak{P}\mathfrak{O}\mathfrak{M}$, also gleich $180^0 - \lambda$ oder λ, je nachdem der Punkt $\mathfrak{P}$ auf derselben Seite der Transversalebene liegt, auf welcher unsere Halbkugel gedacht wird, oder auf der entgegengesetzten, d. h. je nachdem die Convexität der brechenden Fläche nach der Seite gerichtet ist, von welcher her ursprünglich das Licht kommt, oder nach der andern. Man erhält daher, mit der oben angegebenen Bedeutung des Doppelzeichens:

$$\cos\lambda = \mp \sin\tau \cos(\pi - \zeta). \tag{1}$$

Die Bestimmung von λ durch seinen Cosinus ist frei von Zweideutigkeit, weil der Winkel seiner Definition nach zwischen 0 und 180^0 liegen muss. Zugleich ist sie günstig für die numerische Rechnung, weil in den zunächst wichtigen Fällen λ von 90^0 wenig verschieden ist.

Man kennt jetzt im ebenen Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{O}\mathfrak{M}$ die Seiten $\mathfrak{P}\mathfrak{M} = R$, $\mathfrak{O}\mathfrak{M} = U$ und den Winkel λ bei $\mathfrak{O}$; man kann also rechnen den Winkel bei $\mathfrak{P}$, d. h. den Einfallswinkel φ des Strahles:

$$\sin\varphi = \frac{U \sin\lambda}{R}, \tag{2}$$

und mit ihm sogleich den analogen Winkel im Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{O}'\mathfrak{M}$, nämlich den Brechungswinkel:

$$\sin\varphi' = \frac{n}{n'} \sin\varphi. \tag{3}$$

Im letzteren Dreiecke ist nun auch der Winkel bei $\mathfrak{O}'$, oder λ', be-

kannt, weil der dritte Winkel, bei $\mathfrak{M}$, den beiden Dreiecken gemeinschaftlich und also $\lambda' + \varphi' = \lambda + \varphi$:

$$\lambda' = \lambda + (\varphi - \varphi'). \tag{4}$$

Ferner findet man die Seite $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}' = U'$ desselben Dreiecks:

$$U' = \frac{R \sin \varphi'}{\sin \lambda'} = U \frac{n}{n'} \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda'}. \tag{5}$$

Rechnet man diesen Werth nach den beiden angesetzten Formeln, die ihn genau übereinstimmend ergeben müssen, so controlirt sich zugleich die richtige Bildung von $\sin \varphi$ und $\sin \varphi'$ gemäss den Gleichungen (2) und (3). Der Quotient $\frac{\sin \lambda}{\sin \lambda'}$ wird ohnedies noch gebraucht.

Der Punkt $\mathfrak{Q}'$ ist jetzt durch seine Polarcoordinaten U', ζ bestimmt. Es fehlen noch für den gebrochenen Strahl die Grössen τ', π'. Die eine der nöthigen Gleichungen ergiebt sich ohne Weiteres aus (1), wenn man die Zeichen λ, τ, π mit Accenten versieht (und ζ beibehält); weil natürlich für den gebrochenen Strahl ein sphärisches Dreieck völlig analoger Bedeutung mit dem vorhin betrachteten existirt. Die zweite Gleichung erhält man am directesten durch die Bemerkung, dass (nach der vorhin angewandten Bezeichnung) der Winkel bei $\mathfrak{T}$ im ersteren Dreieck übereinstimmen muss mit dem entsprechenden im zweiten. Denn die Ebene des grössten Kreises $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ geht durch den auffallenden Strahl und durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$: sie bleibt also nach dem Brechungsgesetz unverändert, wenn man den gebrochenen Strahl statt des auffallenden nimmt; die Ebene des grössten Kreises $\mathfrak{R}\mathfrak{T}$ aber (welche mit jener den Winkel $\mathfrak{T}$ einschliesst) enthält die beiden Geraden $\mathfrak{Q}\mathfrak{T}$, die über $\mathfrak{Q}$ verlängert die Axe in $\mathfrak{M}$ schneidet, und $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$, die der Axe parallel ist: sie enthält also selbst die Axe, oder sie ist die durch die Axe und durch den Radiusvector $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}$ gelegte Ebene. Da nun $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}$ in der Richtung auf einander fallen, so bleibt auch diese Ebene unverändert, wenn man $\mathfrak{Q}'$ an die Stelle von $\mathfrak{Q}$ setzt, — und die aufgestellte Behauptung ist hiermit evident.

Der Ausdruck für $\sin \mathfrak{T}$, wie er aus dem ersten sphärischen Dreiecke sich ergiebt, nämlich $\frac{\sin \tau \sin (\pi - \zeta)}{\sin \lambda}$ muss sonach gleich sein dem ähnlichen, welchen das zweite Dreieck liefert, und in welchem τ', π', λ' statt τ, π, λ auftreten. Man hat daher jetzt zur Berechnung von τ', π' die zwei Gleichungen:

$$\sin \tau' \sin (\pi' - \zeta) = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda} \sin \tau \sin (\pi - \zeta), \tag{6}$$

$$\sin \tau' \cos (\pi' - \zeta) = + \cos \lambda'. \tag{7}$$

Weil τ' einen spitzigen Winkel vorstellt, dessen Sinus nothwendig positiv ist, so kennt man die Vorzeichen von sin und cos $(\pi' - \zeta)$, kann also in keinem Zweifel sein wegen des Quadranten. Was τ' angeht, so ist zu bemerken, dass der Winkel selbst in der weiteren Rechnung nicht gebraucht wird, sondern neben dem Sinus nur noch die Tangente; diese letztere kann man auch direct berechnen. Wenn man nämlich aus

den beiden sphärischen Dreiecken statt des sin $\mathfrak{T}$ den cos $\mathfrak{T}$ bestimmt, so findet man ihn aus dem ersten $= \frac{\cos \tau}{\sin \lambda}$, aus dem zweiten $= \frac{\cos \tau'}{\sin \lambda'}$; man hat also auch

$$\cos \tau' = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda} \cos \tau .$$

Diese Gleichung würde vor Nr. 6 den Vorzug grösserer Einfachheit haben, sie liefert aber für die numerische Rechnung in den practisch wichtigsten Fällen, in welchen τ und τ' klein sind, eine ungünstigere Bestimmung des Winkels. Verbindet man sie dagegen mit (6), so erhält man noch

$$(8) \qquad \operatorname{tg} \tau' = \operatorname{tg} \tau \frac{\sin (\pi - \zeta)}{\sin (\pi' - \zeta)},$$

so dass der Rechner die Wahl hat, den Logarithmus der Tangente (welcher beim Uebergang zur folgenden Brechung jedenfalls gebracht wird) entweder zum vorher gefundenen des Sinus aus der Tafel zu nehmen, oder ihn selbständig aus Zahlen zu bilden, die bereits vorliegen. Für die Controle der Rechnung hätte übrigens die Uebereinstimmung der beiderlei Werthe wenig Gewicht, weil die Gleichung (8) aus der ohnedies benützten Gleichung (6) direct mit Hülfe der Gleichung für cos τ' hervorgeht, diese letztere aber (in der nur Grössen vorkommen, die nahe $= 1$ sind) durchaus kein empfindliches Kriterium abgiebt. Ein ungleich besseres liefert die folgende Gleichung:

$$(\mathrm{I}) \qquad \pm \frac{\sin (\varphi - \varphi')}{\sin (\pi - \pi')} = \frac{\sin \lambda \sin \tau}{\sin (\pi - \zeta)} = \frac{\sin \lambda' \sin \tau}{\sin (\pi' - \zeta)},$$

vorausgesetzt, dass man nicht bloss die Zahlenwerthe der beiden (nach Gleichung 6 identischen) letzten Ausdrücke, sondern auch den des erstern dabei zuzieht. Man überzeugt sich von ihrer Richtigkeit, indem man links Zähler und Nenner mit sin τ sin τ' multiplicirt, im Zähler gemäss Gleichung (4) $\lambda' - \lambda$ statt $\varphi - \varphi'$ setzt, im Nenner aber $\sin(\pi - \pi') = \sin[(\pi - \zeta) - (\pi' - \zeta)]$ auflöst, und für die einzelnen Producte $\sin \tau \cos (\pi - \zeta)$, $\sin \tau' \cos (\pi' - \zeta)$, $\sin \tau' \sin (\pi' - \zeta)$ nach den Gleichungen (1), (7), (6), ihre Werthe setzt. Hieraus erkennt man zugleich, dass das richtige Eintreffen der Gleichung (I), (vorausgesetzt, dass der substituirte Zahlenwerth $\sin (\varphi - \varphi')$ mit $\sin (\lambda' - \lambda)$ übereinstimmt) als eine blosse Consequenz aus den Gleichungen (1), (6), (7) sich ergiebt und nichts als diese controlirt. Andrerseits sind (unter Voraussetzung, dass die Constanten R und $\frac{n}{n'}$ nicht fehlerhaft sind) die Werthe von sin φ und sin φ' selbst zugleich mit U' durch die doppelte Berechnung dieser letzteren Grösse nach Gleichung (5) geprüft: es wäre aber noch möglich, dass entweder φ oder φ' zum richtigen Sinus falsch aufgeschlagen, und dadurch, oder durch ein Versehen in der Bildung ihrer Differenz selbst, $\varphi - \varphi'$ und in Folge dessen auch λ' fehlerhaft geworden wäre, ohne dass sich dieser Irrthum durch die bisherigen Controlen verriethe[1]). Eine weitere Controle für die angedeuteten Uebergänge muss

1) Wäre $\varphi - \varphi'$ noch richtig und erst λ' selbst fehlerhaft, so würde die Probe (I) den Fehler anzeigen. Ebenso auch, wenn zu richtigem cos λ und sin λ ein falsches λ wäre aufgeschrieben worden, dessen Fehler sich auf λ' mit übertragen hätte.



deshalb erwünscht sein; ich halte die nachstehende für die bequemste. Man hat

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} - \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \frac{n'}{n} - \frac{n}{n'}.$$

Wenn also gesetzt wird

ad (II) $$\frac{n}{n'} = \operatorname{tg}\omega,$$

so ergiebt sich

$$\frac{(\sin\varphi)^2 - (\sin\varphi')^2}{\sin\varphi\sin\varphi'} = \operatorname{ctg}\omega - \operatorname{tg}\omega,$$

das ist

(II) $$\frac{\sin(\varphi - \varphi')\sin(\varphi + \varphi')}{\sin\varphi\sin\varphi'} = 2\operatorname{cotg} 2\omega.$$

Die Grösse zur Rechten ist constant für alle Strahlen gleicher Farbe, welche zwischen denselben beiden Medien gebrochen werden. Hat man die Rechnung für mehrere solche Strahlen gleichzeitig zu führen, so ist es nicht nöthig, die Constante wirklich zu bilden, sondern man hat nur zuzusehen, ob die Grösse links für diese verschiedenen Strahlen einerlei Werth annimmt. Wer selten Fehler begeht und deshalb die Gefahr, eventuell einen grösseren Theil des Calculs wiederholen zu müssen, nicht hoch anschlägt, kann überhaupt das Aufschlagen von ω und $\operatorname{cotg} 2\omega$ ersparen, so fern er mit dem gewöhnlichen Falle zu thun hat, in welchem der Strahl an zwei auf einander folgenden Flächen übertritt aus einem Medium A in B und aus diesem wieder in A, z. B. aus Luft in eine Glaslinse und aus dieser direct wieder in Luft. In diesem Falle ist nämlich der Werth von $2\operatorname{cotg} 2\omega = \frac{n'}{n} - \frac{n}{n'}$, an den zwei auf einander folgenden Brechungen der entgegengesetzte, so dass es genügt, sich zu überzeugen, ob auch der Bruch zur Linken in Gleichung (II) entgegengesetzte numerische Werthe annimmt.

Andrerseits könnte man auch, wenn die Constante $2\operatorname{cotg} 2\omega$ berechnet ist, dafür das Aufschlagen von $\sin(\varphi - \varphi')$ für die Gleichungen (I) und (II) ersparen, indem man den Ausdruck dieser Grösse aus der Gleichung (II) in (I) substituiren und so die beiden Controlen in eine verschmelzen würde. Indessen werden die meisten Rechner vorziehen, ihre Verificationen schon nach den kürzeren Abschnitten evident zu halten[1]).

Wenn es in besonderen Fällen ein Interesse hat (etwa zur Bestimmung der Oeffnung irgend einer brechenden Fläche) den (spitzen) Winkel η zu kennen, welchen das Einfallsloth $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ mit der Axe einschliesst, — der übrigens nach dem hier vorgeschlagenen Rechnungsgange sonst nicht gebraucht wird, — so findet man ihn wohl am bequemsten durch die Betrachtung, dass die Distanz des Punktes $\mathfrak{P}$ von unserer durch $\mathfrak{M}$ gelegten Transversalebene gemessen wird einerseits durch $R\cos\eta$, andrerseits auch durch $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}\cos\tau$. Es ist also $\cos\eta = \frac{\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}}{R}\cos\tau$. Setzt man hier

1) In keinem Falle kann die Gleichung (II) die Prüfung entbehrlich machen, welche man für $\sin\varphi$ aus der doppelten Berechnung von U' (Gleichung (5)) erhält: denn jene controlirt ihrer Entstehung nach den $\sin\varphi$ überhaupt nicht.

statt des Verhältnisses $\frac{\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}}{R}$ zweier Seiten im Dreiecke $\mathfrak{P}\mathfrak{M}\mathfrak{Q}$ das Verhältniss der Sinus ihrer gegenüber liegenden Winkel, so ergiebt sich

$$\cos\eta \doteq \frac{\sin(\lambda+\varphi)}{\sin\lambda}\cos\tau = \frac{\sin(\lambda'+\varphi')}{\sin\lambda'}\cos\tau'.$$

Die Identität der beiden angesetzten Ausdrücke (eine nothwendige Folge des Umstandes, dass die Normale $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ für den gebrochenen Strahl dieselbe Bedeutung hat, wie für den auffallenden) lässt sich auch direct erweisen aus Gleichung (4), verbunden mit derjenigen, welche schon oben zur Ableitung von Gleichung (8) gedient hat. — Die Bestimmung des kleinen Winkels η durch seinen Cosinus ist zwar etwas ungünstig für die numerische Präcision, man wird aber nicht leicht in den Fall kommen, ihn genau kennen zu müssen, weshalb ich es unterlasse, hier, wo er weiter nicht vorkommt, eine der minder eleganten Formeln aufzuführen, die zu seiner schärferen Berechnung dienen könnten.

Die bisher aufgestellten Gleichungen enthalten alles, was auf die Wirkung der einzelnen brechenden Fläche Bezug hat. Trifft nun der bereits gebrochene Strahl auf eine neue solche Fläche, so haben für den Vorgang an dieser letzteren unsere τ', π' dieselbe Bedeutung, welche anfangs den τ und π zukam. Bezeichnen wir also durch Buchstaben mit unten angefügten Indices 1, 2, ... die Grössen, welche für die zweite, dritte etc. Brechung die nämliche Rolle spielen, wie die gleichnamigen ohne Index für die erste, so wird man haben

$$(9) \qquad \begin{aligned} \tau_1 &= \tau', \\ \pi_1 &= \pi', \end{aligned}$$

(dazu auch $n_1 = n'$). Hingegen sind U_1, ζ_1 nicht identisch mit U' und $\zeta' = \zeta$, weil diese letztern Coordinaten noch zählen in der Transversalebene, welche durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der ersten brechenden Sphäre gelegt ward, und welcher $\mathfrak{Q}'$ sowie $\mathfrak{Q}$ angehört, — während nunmehr der Durchschnittspunkt $\mathfrak{Q}_1$ des einmal gebrochenen Strahles mit der Transversalebene des Mittelpunktes $\mathfrak{M}_1$, der zweiten brechenden Kugel in Betracht kommt. Die Distanz der letzteren Ebene von der ersten, oder des Punktes $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$ (natürlich ausgedrückt in gleichem Maasse wie R und wie die U, U') werde hier mit C bezeichnet: positiv im Falle $\mathfrak{M}$ auf derjenigen Seite von $\mathfrak{M}_1$ liegt, von welcher her ursprünglich die Strahlen kommen, und negativ im entgegengesetzten. Will man statt ihrer die (in der Axe gemessene) Dicke D der zwischen den beiden brechenden Flächen gelegenen Schicht einführen, so hat man

$$C = D \mp R \pm R_1,$$

wo vor jedem einzelnen der Halbmesser R, R_1 das obere oder untere Zeichen anzuwenden ist (je nach Lage der Fläche, zu welcher er gehört) conform unserer allgemeinen Regel.

Die bequemste Form für die Berechnung der Grössen U_1, ζ_1 erhält man am directesten auf die Art, dass man sich den Punkt $\mathfrak{Q}'$ und das

ganze zwischen ihm und $\mathfrak{O}_1$ liegende Stück des einmal gebrochenen Strahles der Axe parallel projicirt denkt in die neue durch $\mathfrak{M}_1$ gelegte Transversalebene. Die Länge der Projection dieses Stückes ist (abgesehen vom Vorzeichen) $C \operatorname{tg} \tau'$; wenn man also innerhalb der eben gedachten Ebene Abscissen dieser Länge parallel und Ordinaten senkrecht auf ihr rechnet, so ist auch $C \operatorname{tg} \tau'$ der Unterschied der Abscissen beider Endpunkte unseres Stückes, während ihre beiden Ordinaten gleich sind. Aus dieser Betrachtung erhält man die Gleichungen:

$$(10) \qquad \begin{aligned} U_1 \sin(\pi' - \zeta_1) &= U' \sin(\pi' - \zeta) \\ U_1 \cos(\pi' - \zeta_1) &= U' \cos(\pi' - \zeta) - C \operatorname{tg} \tau' \end{aligned}$$

zur Bestimmung von U_1 und ζ_1. (Weil erstere Grösse positiv sein muss, ist der Quadrant von $\pi' - \zeta_1$ festgelegt.) Zur Controle kann man die aus beiden abgeleitete Formel benützen:

$$(\text{III}) \qquad \frac{C \operatorname{tg} \tau'}{\sin(\zeta - \zeta_1)} = \frac{U_1}{\sin(\pi' - \zeta)} = \frac{U'}{\sin(\pi' - \zeta_1)}.$$ [1]

Sind hiernach U_1, ζ_1 gefunden, und also τ_1, π_1, U_1, ζ_1 nunmehr bekannt, so wiederholen sich in Bezug auf die zweite Brechung alle Rechnungen, welche in Bezug auf die erste nach den Gleichungen (1) bis (7) vorzunehmen waren: man findet so der Reihe nach Grössen λ_1, φ_1, φ_1' (mit Hülfe von $n_1 = n'$ und $n_1' = n_2$), λ_1', U_1', $\tau_1' = \tau_2$, $\pi_1' = \pi_2$, und wird ganz in derselben Weise auch noch weitere Brechungen verfolgen, wenn solche vorkommen. Zuletzt wird es sich dann darum handeln, zu untersuchen, wo der definitiv gebrochene Strahl die Ebene durchdringt, in welcher das Bild betrachtet werden soll. Zu dem Ende kommen wieder die Formeln (10) in Anwendung; wenn nämlich in denselben unter τ', π' die letzten Werthe dieser Grössen, unter U', ζ die Polarcoordinaten des Punktes verstanden werden, in welchem er, in seiner schliesslichen Lage, die Transversalebene des letzten Mittelpunktes durchdringt, und wenn jetzt C die Distanz der Bildebene von diesem letzten Mittelpunkte bezeichnet (positiv im Falle die Strahlen bei ihrer ursprünglichen Richtung später auf die Bildebene als auf die Mittelpunktsebene treffen würden), so werden U_1, ζ_1 übergehen in die Polarcoordinaten des Punktes der Bildebene, den der austretende Strahl trifft, — und zwar, wie immer, der Radiusvector gerechnet von der Axe aus, und der Polarwinkel rechts herum gezählt aus der Richtung nach oben.

Auch dann sind die Gleichungen (10) anzuwenden, wenn in der ursprünglichen Lage des auffallenden Strahles neben τ und π nicht direct sein Durchschnittspunkt mit der Ebene des ersten Mittelpunktes gegeben

---

1) [Zusatz des Verfassers zum Wiederabdruck.]
Verbindet man die Gleichung (III) mit (8), so ergiebt sich auch sofort:

$$\frac{C}{\sin(\zeta - \zeta_1)} = \frac{U_1}{\operatorname{tg} \tau \sin(\pi' - \zeta)} = \frac{U'}{\operatorname{tg} \tau_2 \sin(\pi_2 - \zeta_1)},$$

von welchen Gleichungen die erste (anstatt (III)) nach Berechnung von U_1, u_1, die andern nach Berechnung von $\tau_2 = \tau_1'$ und $\pi_2 = \pi_1'$ (aus den Gleichungen (6) und (7)) anzuwenden sind.

wäre, sondern statt des letztern der Punkt, in welchem er durch irgend eine andere auf der Axe senkrechte Ebene passirt, etwa durch diejenige des Kreises, der die erste sphärische Fläche begrenzt, oder auch durch die Ebene eines anvisirten Objectes. Nennen wir V, ξ die Polarcoordinaten in einer solchen Ebene, E den Abstand der letzteren von der Ebene unseres ersten Mittelpunktes $\mathfrak{M}$, und rechnen wir letztere Grösse positiv in dem Falle, der in der Anwendung der gewöhnlichere sein wird, nämlich von $\mathfrak{M}$ aus nach der Seite, von welcher die Strahlen ursprünglich kommen, so spielen hier die gegebenen Grössen τ, π, V, ξ, E und die gesuchten U, ζ der Reihe nach genau dieselben Rollen, wie die Grössen τ', π', U', ζ, C, U_1, ζ_1 in der vorigen Betrachtung; man wird also haben:

$$U \sin(\pi - \zeta) = V \sin(\pi - \xi)$$

$$U \cos(\pi - \zeta) = V \cos(\pi - \xi) - E \operatorname{tg} \tau$$

und die Controle

$$\frac{E \operatorname{tg} \tau}{\sin(\xi - \zeta)} = \frac{V}{\sin(\pi - \zeta)} = \frac{U}{\sin(\pi - \xi)}.$$

Bei dem wirklichen Gebrauche der Formeln wird der Rechner von selbst darauf aufmerksam sein, dass sehr viele der vorkommenden Grössen in ganz gleicher Weise in mehreren Gleichungen auftreten, wodurch die Arbeit bedeutend verringert wird. Wenn z. B. nach den letzten Gleichungen cos und sin $(\pi - \zeta)$ gefunden worden sind, so dient der Cosinus direct wieder in Gleichung (1), der Sinus in Gleichung (6) und in (8); ebenso kommen die nach (6) und (7) berechneten sin und cos von $(\pi' - \zeta)$ wieder vor in (10), der Sinus auch noch in (8); die Differenz $\varphi - \varphi'$ in Gleichung (4) und ihr Sinus in den Controlgleichungen (I) und (II); das Verhältniss $\frac{\sin \lambda}{\sin \lambda'}$ in (5), und sein reciproker Werth in (6), so wie auch in der Gleichung für $\cos \tau'$, und dergleichen mehr.

Es giebt einen Ausnahmefall, in welchem die von uns gewählte Art, die Lage des Strahles zu bestimmen, nicht anwendbar ist, nämlich den Fall einer brechenden Planfläche. Hier würde die zugehörige Mittelpunktsebene ins Unendliche fallen, und damit den Dienst versagen. Dafür bietet sich von selbst die Aushülfe dar, hier unsere Transversalebene mit der brechenden Ebene coincidiren zu lassen, d. h. für U, ζ die Polarcoordinaten desjenigen Punktes zu wählen, in welchem die Planfläche vom Strahle getroffen wird. Sind dieselben nicht im Voraus gegeben, so werden sie, wenn noch keine Brechung vorausgegangen ist, nach den letzten Gleichungen, im andern Falle nach den Gleichungen (10) berechnet: natürlich muss jetzt für E oder C derjenige Werth genommen werden, welcher der Distanz von der vorher betrachteten Transversalebene bis an die brechende Ebene selbst entspricht. Durch die Brechung an dieser werden dann U, ζ beide nicht verändert, weil der Auffallspunkt auch dem gebrochenen Strahle angehört; man hat also hier $U' = U$. Auch die übrigen Gleichungen der Brechung vereinfachen sich. Weil nämlich das Einfallsloth der Axe parallel wird, so ist hier $\varphi = \tau$ und $\varphi' = \tau'$; man hat daher einfach

$$\sin \tau' = \frac{n}{n'} \sin \tau$$

und dazu

$$\pi' = \pi,$$

weil die Brechungsebene, welche der Strahl nicht verlässt, hier selbst durch die in seinem Auffallspunkte der Axe parallel gezogene Gerade geht. Es sind also die vier Bestimmungsstücke für die Lage des gebrochenen Strahles bekannt (τ', $\pi' = \pi$, $U' = U$, ζ); hat man Anlass, seinen Weg noch weiter zu verfolgen, und zu dem Ende eine neue Transversalebene einzuführen, so dienen abermals die Gleichungen (10) in der Weise, dass der eine Endpunkt der Distanz C in der brechenden Planfläche selbst liegt.

Die vorstehenden Rechnungsvorschriften (welche natürlich auch den speciellen Fall eines in der Axenebene gelegenen Strahles mit umfassen) schliessen sich in ihrer Gestalt sehr nahe denjenigen an, welche für den eben gedachten besondern Fall im allgemeinen Gebrauch sind. Ich muss indessen zum Schlusse noch bemerken, dass ich für die eigentlich angemessene (d. h. der Natur der Aufgabe am besten entsprechende) Art, in oder ausser der Axenebene den Gang des Lichtes durch optische Apparate rechnerisch zu verfolgen, eine wesentlich andere halte, nach welcher man direct nicht die ganzen Grössen sucht, welche die Lage eines Strahles nach beliebig viel Brechungen bestimmen, sondern nur ihre Abweichungen von denjenigen Werthen, die nach den Näherungsformeln (ersten Grades) stattfinden würden. Nach diesem Verfahren hat man nur mit kleinen Grössen zu agiren, die durch wenige Decimalen genau genug gefunden werden, weil sie unmittelbar Das repräsentiren, was uns im optischen Bilde als Fehler erscheint. Auch diese Behandlung der Aufgabe ist eleganter Ausdrücke fähig, welche in einer ganz analogen Beziehung zu denjenigen der früher von mir entwickelten Fehler dritter Ordnung (im allgemeinen Falle des Raumes) stehen, wie die „Gleichungen mit endlichen Differenzen" zu den Differentialformeln. Indessen entfernt sich das angedeutete Verfahren ziemlich stark von der rechnerischen Gewohnheit der Optiker, deren practisches Bedürfniss ich bei der gegenwärtigen Publication zunächst im Auge habe; ich verspare daher das Nähere für eine andere Gelegenheit.

[Zusatz des Verfassers zum vorliegenden Wiederabdruck.]

Da die Grössen (π) und (τ) die Richtung des Strahles bestimmen, so können andere Grössen, die nur von der Richtung abhängen, aus jenen Werthen allein berechnet werden. Dahin gehört z. B. der Winkel, unter welchem der Strahl gegen unsere, durch die Axe gehende (vertical gedachte) Grundebene geneigt ist, dessen Kenntniss Dr. A. Steinheil für die practische Verwendung der Formeln nützlich gefunden hat und welcher hier k heissen mag.

Denkt man sich auf einer mit beliebigem Radius um einen Punkt in der Axe beschriebenen Kugel den grössten Kreis verzeichnet, welchen unsere (verticale) Grundebene auf der Kugelfläche ausschneidet, sowie in diesem Kreise den Punkt I nach welchem die Axe gerichtet ist, ferner

den Punkt II, der durch seine sphärischen Coordinaten π und τ gegeben ist, so kann man von II aus nach einem Punkte III im erst gedachten grössten Kreise den Bogen II, III so gezogen denken, dass in dem durch ihn abgeschlossenen sphärischen Dreiecke I, II, III der Winkel bei III ein rechter wird. Man hat alsdann die Hypotenuse des Dreiecks I, $II = \tau$, den Winkel bei $I = \pi$, und die diesem gegenüber liegende Kathete II, $III = k$, und es ergiebt sich sonach die Gleichung

$$\sin k = \sin \tau \cdot \sin \pi$$

zur Berechnung von k.

Selbstverständlich berechnen sich auf dieselbe Weise die durch die successiven Brechungen veränderten Werthe von k, indem man an die Stelle der ursprünglichen Werthe von π und τ ihre durch eine, zwei, u.s.w. Brechungen veränderten und durch den im Texte gegebenen Rechnungsgang gefundenen Werthe setzt.

Beilage IV.

Tabelle.
Unterschied zwischen Sinus und Bogen von 10 zu 10 Secunden von 0° bis 80°.

0°

′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
0	0	0.000	6	0	0.000	12	0	0.002	18	0	0.005	24	0	0.012
	10	0.000		10	0.000		10	0.002		10	0.005		10	0.012
	20	0.000		20	0.000		20	0.002		20	0.005		20	0.012
	30	0.000		30	0.000		30	0.002		30	0.006		30	0.013
	40	0.000		40	0.000		40	0.002		40	0.006		40	0.013
	50	0.000		50	0.000		50	0.002		50	0.006		50	0.013
1	0	0.000	7	0	0.000	13	0	0.002	19	0	0.006	25	0	0.013
	10	0.000		10	0.000		10	0.002		10	0.006		10	0.014
	20	0.000		20	0.000		20	0.002		20	0.006		20	0.014
	30	0.000		30	0.000		30	0.002		30	0.006		30	0.014
	40	0.000		40	0.000		40	0.002		40	0.007		40	0.014
	50	0.000		50	0.000		50	0.002		50	0.007		50	0.015
2	0	0.000	8	0	0.000	14	0	0.002	20	0	0.007	26	0	0.015
	10	0.000		10	0.001		10	0.002		10	0.007		10	0.015
	20	0.000		20	0.001		20	0.003		20	0.007		20	0.016
	30	0.000		30	0.001		30	0.003		30	0.007		30	0.016
	40	0.000		40	0.001		40	0.003		40	0.008		40	0.016
	50	0.000		50	0.001		50	0.003		50	0.008		50	0.017
3	0	0.000	9	0	0.001	15	0	0.003	21	0	0.008	27	0	0.017
	10	0.000		10	0.001		10	0.003		10	0.008		10	0.017
	20	0.000		20	0.001		20	0.003		20	0.009		20	0.017
	30	0.000		30	0.001		30	0.003		30	0.009		30	0.017
	40	0.000		40	0.001		40	0.003		40	0.009		40	0.018
	50	0.000		50	0.001		50	0.003		50	0.009		50	0.018
4	0	0.000	10	0	0.001	16	0	0.004	22	0	0.009	28	0	0.019
	10	0.000		10	0.001		10	0.004		10	0.009		10	0.019
	20	0.000		20	0.001		20	0.004		20	0.010		20	0.019
	30	0.000		30	0.001		30	0.004		30	0.010		30	0.020
	40	0.000		40	0.001		40	0.004		40	0.010		40	0.020
	50	0.000		50	0.001		50	0.004		50	0.010		50	0.020
5	0	0.000	11	0	0.001	17	0	0.004	23	0	0.010	29	0	0.020
	10	0.000		10	0.001		10	0.004		10	0.011		10	0.021
	20	0.000		20	0.001		20	0.004		20	0.011		20	0.021
	30	0.000		30	0.001		30	0.005		30	0.011		30	0.022
	40	0.000		40	0.001		40	0.005		40	0.011		40	0.022
	50	0.000		50	0.001		50	0.005		50	0.012		50	0.023
6	0	0.000	12	0	0.002	18	0	0.005	24	0	0.012	30	0	0.023

0°

′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
30	0	0.023	36	0	0.040	42	0	0.063	48	0	0.094	54	0	0.134
	10	0.023		10	0.040		10	0.064		10	0.095		10	0.134
	20	0.024		20	0.041		20	0.064		20	0.095		20	0.136
	30	0.024		30	0.041		30	0.065		30	0.097		30	0.138
	40	0.025		40	0.042		40	0.066		40	0.098		40	0.139
	50	0.025		50	0.043		50	0.066		50	0.099		50	0.140
31	0	0.025	37	0	0.043	43	0	0.068	49	0	0.100	55	0	0.141
	10	0.026		10	0.044		10	0.068		10	0.101		10	0.143
	20	0.026		20	0.044		20	0.069		20	0.101		20	0.144
	30	0.027		30	0.045		30	0.070		30	0.103		30	0.145
	40	0.027		40	0.045		40	0.070		40	0.104		40	0.146
	50	0.028		50	0.046		50	0.072		50	0.106		50	0.147
32	0	0.028	38	0	0.046	44	0	0.073	50	0	0.106	56	0	0.149
	10	0.028		10	0.047		10	0.073		10	0.108		10	0.150
	20	0.029		20	0.048		20	0.074		20	0.108		20	0.152
	30	0.029		30	0.048		30	0.075		30	0.109		30	0.153
	40	0.030		40	0.049		40	0.076		40	0.110		40	0.154
	50	0.030		50	0.049		50	0.077		50	0.111		50	0.155
33	0	0.031	39	0	0.051	45	0	0.078	51	0	0.112	57	0	0.157
	10	0.031		10	0.051		10	0.078		10	0.114		10	0.158
	20	0.031		20	0.052		20	0.079		20	0.115		20	0.160
	30	0.032		30	0.052		30	0.080		30	0.116		30	0.161
	40	0.033		40	0.053		40	0.081		40	0.117		40	0.162
	50	0.033		50	0.054		50	0.082		50	0.118		50	0.163
34	0	0.033	40	0	0.054	46	0	0.082	52	0	0.119	58	0	0.166
	10	0.034		10	0.055		10	0.083		10	0.121		10	0.166
	20	0.034		20	0.056		20	0.085		20	0.122		20	0.168
	30	0.035		30	0.056		30	0.085		30	0.123		30	0.170
	40	0.035		40	0.057		40	0.086		40	0.123		40	0.171
	50	0.036		50	0.058		50	0.087		50	0.125		50	0.172
35	0	0.036	41	0	0.059	47	0	0.088	53	0	0.126	59	0	0.174
	10	0.037		10	0.060		10	0.089		10	0.128		10	0.175
	20	0.038		20	0.060		20	0.090		20	0.129		20	0.177
	30	0.038		30	0.060		30	0.091		30	0.130		30	0.179
	40	0.039		40	0.061		40	0.091		40	0.131		40	0.180
	50	0.039		50	0.062		50	0.093		50	0.133		50	0.182
36	0	0.040	42	0	0.063	48	0	0.094	54	0	0.134	60	0	0.183

1°

′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
0	0	0.183	2	0	0.202	4	0	0.222	6	0	0.244	8	0	0.266
	10	0.184		10	0.203		10	0.224		10	0.245		10	0.269
	20	0.187		20	0.205		20	0.226		20	0.247		20	0.271
	30	0.188		30	0.207		30	0.227		30	0.249		30	0.273
	40	0.189		40	0.208		40	0.229		40	0.251		40	0.274
	50	0.191		50	0.210		50	0.231		50	0.253		50	0.276
1	0	0.192	3	0	0.211	5	0	0.232	7	0	0.255	9	0	0.279
	10	0.194		10	0.214		10	0.234		10	0.256		10	0.280
	20	0.196		20	0.215		20	0.236		20	0.258		20	0.282
	30	0.197		30	0.218		30	0.238		30	0.261		30	0.285
	40	0.198		40	0.219		40	0.240		40	0.262		40	0.287
	50	0.200		50	0.220		50	0.242		50	0.264		50	0.288
2	0	0.202	4	0	0.222	6	0	0.244	8	0	0.266	10	0	0.291

1°

′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
10	0	0.291	19	0	0.417	28	0	0.577	37	0	0.773	46	0	1.007
	10	0.292		10	0.420		10	0.580		10	0.777		10	1.012
	20	0.295		20	0.423		20	0.584		20	0.781		20	1.018
	30	0.297		30	0.426		30	0.587		30	0.785		30	1.022
	40	0.299		40	0.429		40	0.590		40	0.788		40	1.026
	50	0.301		50	0.431		50	0.594		50	0.793		50	1.032
11	0	0.303	20	0	0.434	29	0	0.598	38	0	0.796	47	0	1.037
	10	0.306		10	0.436		10	0.600		10	0.801		10	1.042
	20	0.307		20	0.439		20	0.604		20	0.804		20	1.046
	30	0.310		30	0.442		30	0.607		30	0.809		30	1.051
	40	0.312		40	0.444		40	0.610		40	0.814		40	1.057
	50	0.314		50	0.447		50	0.614		50	0.818		50	1.062
12	0	0.316	21	0	0.449	30	0	0.617	39	0	0.822	48	0	1.067
	10	0.318		10	0.453		10	0.621		10	0.826		10	1.072
	20	0.320		20	0.455		20	0.624		20	0.830		20	1.077
	30	0.323		30	0.459		30	0.628		30	0.834		30	1.081
	40	0.325		40	0.461		40	0.631		40	0.838		40	1.087
	50	0.327		50	0.465		50	0.635		50	0.843		50	1.091
13	0	0.330	22	0	0.467	31	0	0.638	40	0	0.846	49	0	1.097
	10	0.331		10	0.470		10	0.641		10	0.851		10	1.101
	20	0.334		20	0.473		20	0.646		20	0.856		20	1.106
	30	0.336		30	0.475		30	0.649		30	0.860		30	1.112
	40	0.339		40	0.478		40	0.652		40	0.864		40	1.117
	50	0.341		50	0.482		50	0.656		50	0.868		50	1.121
14	0	0.343	23	0	0.484	32	0	0.659	41	0	0.872	50	0	1.126
	10	0.345		10	0.487		10	0.663		10	0.876		10	1.132
	20	0.347		20	0.491		20	0.667		20	0.880		20	1.137
	30	0.350		30	0.493		30	0.671		30	0.885		30	1.142
	40	0.353		40	0.497		40	0.673		40	0.890		40	1.148
	50	0.355		50	0.499		50	0.677		50	0.893		50	1.152
15	0	0.358	24	0	0.501	33	0	0.681	42	0	0.899	51	0	1.158
	10	0.360		10	0.505		10	0.685		10	0.903		10	1.163
	20	0.362		20	0.508		20	0.688		20	0.907		20	1.168
	30	0.364		30	0.511		30	0.692		30	0.913		30	1.174
	40	0.367		40	0.514		40	0.696		40	0.917		40	1.178
	50	0.370		50	0.516		50	0.700		50	0.920		50	1.183
16	0	0.372	25	0	0.520	34	0	0.703	43	0	0.924	52	0	1.189
	10	0.375		10	0.524		10	0.707		10	0.930		10	1.194
	20	0.376		20	0.526		20	0.710		20	0.933		20	1.200
	30	0.379		30	0.529		30	0.714		30	0.939		30	1.206
	40	0.382		40	0.533		40	0.718		40	0.943		40	1.211
	50	0.384		50	0.535		50	0.721		50	0.947		50	1.216
17	0	0.387	26	0	0.538	35	0	0.726	44	0	0.952	53	0	1.220
	10	0.389		10	0.542		10	0.730		10	0.957		10	1.227
	20	0.392		20	0.546		20	0.734		20	0.962		20	1.233
	30	0.395		30	0.548		30	0.737		30	0.967		30	1.238
	40	0.397		40	0.551		40	0.741		40	0.971		40	1.244
	50	0.400		50	0.554		50	0.745		50	0.975		50	1.248
18	0	0.401	27	0	0.558	36	0	0.749	45	0	0.980	54	0	1.254
	10	0.404		10	0.561		10	0.753		10	0.984		10	1.259
	20	0.408		20	0.565		20	0.756		20	0.990		20	1.265
	30	0.410		30	0.567		30	0.761		30	0.994		30	1.270
	40	0.412		40	0.571		40	0.765		40	1.000		40	1.276
	50	0.415		50	0.574		50	0.768		50	1.003		50	1.282
19	0	0.417	28	0	0.577	37	0	0.773	46	0	1.007	55	0	1.287

1°

′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
55	0	1.287	56	0	1.321	57	0	1.356	58	0	1.392	59	0	1.427
	10	1.292		10	1.327		10	1.361		10	1.397		10	1.433
	20	1.298		20	1.332		20	1.368		20	1.403		20	1.438
	30	1.305		30	1.339		30	1.374		30	1.408		30	1.443
	40	1.310		40	1.345		40	1.379		40	1.415		40	1.451
	50	1.316		50	1.350		50	1.385		50	1.420		50	1.457
56	0	1.321	57	0	1.356	58	0	1.392	59	0	1.427	60	0	1.462

2°

′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
0	0	1.462	7	0	1.735	14	0	2.037	21	0	2.371	28	0	2.743
	10	1.468		10	1.740		10	2.044		10	2.381		10	2.752
	20	1.475		20	1.747		20	2.052		20	2.388		20	2.762
	30	1.482		30	1.754		30	2.061		30	2.398		30	2.771
	40	1.487		40	1.761		40	2.068		40	2.406		40	2.782
	50	1.493		50	1.768		50	2.075		50	2.416		50	2.792
1	0	1.500	8	0	1.775	15	0	2.082	22	0	2.422	29	0	2.800
	10	1.505		10	1.782		10	2.091		10	2.431		10	2.808
	20	1.512		20	1.789		20	2.098		20	2.439		20	2.818
	30	1.518		30	1.796		30	2.106		30	2.449		30	2.829
	40	1.524		40	1.802		40	2.113		40	2.457		40	2.838
	50	1.532		50	1.811		50	2.121		50	2.467		50	2.846
2	0	1.537	9	0	1.818	16	0	2.129	23	0	2.475	30	0	2.855
	10	1.544		10	1.823		10	2.136		10	2.484		10	2.867
	20	1.549		20	1.832		20	2.145		20	2.492		20	2.875
	30	1.556		30	1.838		30	2.153		30	2.500		30	2.885
	40	1.563		40	1.845		40	2.160		40	2.510		40	2.892
	50	1.569		50	1.852		50	2.170		50	2.520		50	2.904
3	0	1.575	10	0	1.859	17	0	2.177	24	0	2.527	31	0	2.915
	10	1.581		10	1.867		10	2.183		10	2.535		10	2.923
	20	1.588		20	1.873		20	2.191		20	2.544		20	2.933
	30	1.593		30	1.882		30	2.200		30	2.553		30	2.942
	40	1.600		40	1.887		40	2.209		40	2.562		40	2.952
	50	1.607		50	1.895		50	2.217		50	2.570		50	2.962
4	0	1.614	11	0	1.904	18	0	2.223	25	0	2.580	32	0	2.973
	10	1.621		10	1.911		10	2.232		10	2.590		10	2.983
	20	1.627		20	1.918		20	2.242		20	2.598		20	2.992
	30	1.634		30	1.924		30	2.248		30	2.608		30	3.002
	40	1.640		40	1.931		40	2.258		40	2.616		40	3.011
	50	1.647		50	1.940		50	2.266		50	2.624		50	3.021
5	0	1.653	12	0	1.947	19	0	2.273	26	0	2.634	33	0	3.030
	10	1.660		10	1.953		10	2.281		10	2.643		10	3.040
	20	1.667		20	1.962		20	2.290		20	2.652		20	3.051
	30	1.672		30	1.969		30	2.298		30	2.661		30	3.060
	40	1.679		40	1.976		40	2.306		40	2.669		40	3.070
	50	1.688		50	1.984		50	2.313		50	2.680		50	3.081
6	0	1.693	13	0	1.991	20	0	2.323	27	0	2.688	34	0	3.089
	10	1.700		10	2.000		10	2.331		10	2.698		10	3.102
	20	1.707		20	2.006		20	2.339		20	2.706		20	3.111
	30	1.714		30	2.013		30	2.347		30	2.716		30	3.121
	40	1.719		40	2.022		40	2.356		40	2.726		40	3.132
	50	1.726		50	2.030		50	2.363		50	2.735		50	3.143
7	0	1.735	14	0	2.037	21	0	2.371	28	0	2.743	35	0	3.151

2°

′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″
35	0	3.151	40	0	3.467	45	0	3.802	50	0	4.16	55	0	4.53
	10	3.161		10	3.478		10	3.814		10	4.17		10	4.55
	20	3.172		20	3.487		20	3.825		20	4.18		20	4.56
	30	3.183		30	3.498		30	3.836		30	4.20		30	4.57
	40	3.193		40	3.509		40	3.849		40	4.21		40	4.58
	50	3.202		50	3.522		50	3.859		50	4.22		50	4.60
36	0	3.211	41	0	3.531	46	0	3.872	51	0	4.23	56	0	4.614
	10	3.222		10	3.544		10	3.882		10	4.24		10	4.62
	20	3.234		20	3.553		20	3.895		20	4.26		20	4.64
	30	3.245		30	3.564		30	3.905		30	4.27		30	4.65
	40	3.254		40	3.576		40	3.918		40	4.28		40	4.67
	50	3.265		50	3.587		50	3.93		50	4.29		50	4.68
37	0	3.274	42	0	3.598	47	0	3.94	52	0	4.30	57	0	4.69
	10	3.285		10	3.609		10	3.95		10	4.32		10	4.70
	20	3.296		20	3.620		20	3.97		20	4.33		20	4.72
	30	3.307		30	3.632		30	3.98		30	4.34		30	4.74
	40	3.317		40	3.642		40	3.99		40	4.36		40	4.75
	50	3.326		50	3.655		50	4.00		50	4.37		50	4.76
38	0	3.337	43	0	3.664	48	0	4.013	53	0	4.38	58	0	4.77
	10	3.350		10	3.676		10	4.03		10	4.39		10	4.79
	20	3.359		20	3.689		20	4.04		20	4.41		20	4.80
	30	3.370		30	3.700		30	4.05		30	4.42		30	4.81
	40	3.380		40	3.709		40	4.06		40	4.43		40	4.83
	50	3.391		50	3.720		50	4.07		50	4.44		50	4.84
39	0	3.402	44	0	3.734	49	0	4.08	54	0	4.459	59	0	4.85
	10	3.411		10	3.745		10	4.10		10	4.47		10	4.87
	20	3.422		20	3.755		20	4.11		20	4.48		20	4.88
	30	3.433		30	3.766		30	4.12		30	4.50		30	4.89
	40	3.444		40	3.780		40	4.13		40	4.51		40	4.91
	50	3.456		50	3.791		50	4.15		50	4.52		50	4.92
40	0	3.467	45	0	3.802	50	0	4.16	55	0	4.53	60	0	4.933

3°

′	″	″	′	″	″	′	″	″	′	″	″	′	″	″
0	0	4.933	3	0	5.18	6	0	5.44	9	0	5.71	12	0	5.99
	10	4.95		10	5.20		10	5.46		10	5.72		10	6.00
	20	4.96		20	5 21		20	5.47		20	5.74		20	6.02
	30	4.98		30	5.23		30	5.49		30	5.76		30	6.03
	40	4.99		40	5.24		40	5.50		40	5 77		40	6.05
	50	5.00		50	5.26		50	5.52		50	5.79		50	6.07
1	0	5.02	4	0	5.27	7	0	5.53	10	0	5.80	13	0	6.08
	10	5.03		10	5.28		10	5.55		10	5.82		10	6.10
	20	5.04		20	5.30		20	5.56		20	5.83		20	6.11
	30	5.06		30	5.31		30	5.58		30	5.85		30	6 13
	40	5.07		40	5.33		40	5.59		40	5.87		40	6.15
	50	5.09		50	5.34		50	5.61		50	5.88		50	6.16
2	0	5.10	5	0	5.36	8	0	5.62	11	0	5.90	14	0	6.18
	10	5.11		10	5.37		10	5.64		10	5.91		10	6.20
	20	5.13		20	5.38		20	5.65		20	5.93		20	6.21
	30	5.14		30	5.40		30	5.67		30	5.94		30	6.23
	40	5.16		40	5.42		40	5.68		40	5.96		40	6.24
	50	5.17		50	5.43		50	5.70		50	5.97		50	6.26
3	0	5.18	6	0	5.44	9	0	5.71	12	0	5.99	15	0	6.27

3°

′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
15	0	6.27	24	0	7.18	33	0	8.18	42	0	9.26	51	0	10.43
	10	6.29		10	7.20		10	8.19		10	9.28		10	10.45
	20	6.30		20	7.22		20	8.21		20	9.30		20	10.47
	30	6.32		30	7.23		30	8.23		30	9.32		30	10.50
	40	6.34		40	7.25		40	8.25		40	9.34		40	10.52
	50	6.35		50	7.27		50	8.27		50	9.36		50	10.54
16	0	6.37	25	0	7.29	34	0	8.29	43	0	9.38	52	0	10.56
	10	6.38		10	7.31		10	8.31		10	9.40		10	10.59
	20	6.40		20	7.33		20	8.33		20	9.43		20	10.61
	30	6.42		30	7.34		30	8.35		30	9.45		30	10.64
	40	6.43		40	7.36		40	8.37		40	9.47		40	10.66
	50	6.45		50	7.38		50	8.39		50	9.49		50	10.68
17	0	6.47	26	0	7.40	35	0	8.41	44	0	9.51	53	0	10.70
	10	6.49		10	7.41		10	8.43		10	9.53		10	10.72
	20	6.50		20	7.43		20	8.45		20	9.55		20	10.75
	30	6.52		30	7.45		30	8.47		30	9.57		30	10.77
	40	6 54		40	7.47		40	8.49		40	9.59		40	10.79
	50	6.55		50	7.49		50	8.51		50	9.61		50	10.82
18	0	6.57	27	0	7.51	36	0	8.53	45	0	9.64	54	0	10.84
	10	6.58		10	7.52		10	8.55		10	9.66		10	10.86
	20	6.60		20	7.54		20	8.57		20	9.68		20	10.89
	30	6.62		30	7.56		30	8.59		30	9.70		30	10.91
	40	6.63		40	7.58		40	8.61		40	9.72		40	10.93
	50	6.65		50	7.60		50	8.63		50	9.74		50	10.95
19	0	6.67	28	0	7.62	37	0	8.65	46	0	9.77	55	0	10.98
	10	6.69		10	7.63		10	8.67		10	9.79		10	11.00
	20	6.70		20	7.65		20	8.69		20	9.81		20	11.03
	30	6.72		30	7.67		30	8.71		30	9.83		30	11.05
	40	6.74		40	7.69		40	8.73		40	9.85		40	11.07
	50	6.75		50	7.71		50	8.74		50	9.87		50	11.10
20	0	6.77	29	0	7.73	38	0	8.76	47	0	9.90	56	0	11.12
	10	6.79		10	7.75		10	8.78		10	9.92		10	11.14
	20	6.80		20	7.76		20	8.80		20	9.94		20	11.17
	30	6.82		30	7.78		30	8.83		30	9.96		30	11.20
	40	6.84		40	7.80		40	8.85		40	9.98		40	11.22
	50	6.85		50	7.82		50	8.87		50	10.01		50	11.24
21	0	6.87	30	0	7.83	39	0	8.89	48	0	10.03	57	0	11.26
	10	6.89		10	7.85		10	8.91		10	10.05		10	11.29
	20	6.91		20	7.87		20	8.93		20	10.07		20	11.31
	30	6.92		30	7.89		30	8.95		30	10.09		30	11.33
	40	6.94		40	7.91		40	8.97		40	10.12		40	11.36
	50	6.96		50	7.93		50	8.99		50	10.14		50	11.38
22	0	6.97	31	0	7.95	40	0	9.01	49	0	10.16	58	0	11.40
	10	6.99		10	7.97		10	9.03		10	10.18		10	11.43
	20	7.01		20	7.99		20	9.05		20	10.21		20	11.45
	30	7.03		30	8.00		30	9.07		30	10.23		30	11.48
	40	7.04		40	8.02		40	9.09		40	10.25		40	11.50
	50	7.06		50	8.04		50	9.11		50	10.27		50	11.53
23	0	7.08	32	0	8.06	41	0	9.13	50	0	10.30	59	0	11.55
	10	7.10		10	8.08		10	9.15		10	10.32		10	11.57
	20	7.12		20	8.10		20	9.17		20	10.34		20	11.60
	30	7.13		30	8.12		30	9.20		30	10.36		30	11.62
	40	7.15		40	8.14		40	9.22		40	10.39		40	11.65
	50	7.17		50	8.16		50	9.24		50	10.41		50	11.67
24	0	7.18	33	0	8.18	42	0	9.26	51	0	10.43	60	0	11.69

4^0

′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
0	0	11.69	9	0	13.06	18	0	14.53	27	0	16.10	36	0	17.79
	10	11.72		10	13.09		10	14.56		10	16.13		10	17.82
	20	11.74		20	13.12		20	14.59		20	16.16		20	17.85
	30	11.77		30	13.14		30	14.61		30	16.19		30	17.88
	40	11.79		40	13.17		40	14.64		40	16.22		40	17.92
	50	11.82		50	13.19		50	14.67		50	16.25		50	17.95
1	0	11.84	10	0	13.22	19	0	14.70	28	0	16.28	37	0	17.98
	10	11.87		10	13.24		10	14.73		10	16.31		10	18.01
	20	11.89		20	13.27		20	14.75		20	16.34		20	18.05
	30	11.92		30	13.30		30	14.78		30	16.37		30	18.08
	40	11.94		40	13.33		40	14.81		40	16.41		40	18.11
	50	11.97		50	13.35		50	14.84		50	16.44		50	18.14
2	0	11.99	11	0	13.38	20	0	14.87	29	0	16.47	38	0	18.17
	10	12.01		10	13.40		10	14.90		10	16.50		10	18.21
	20	12.04		20	13.43		20	14.93		20	16.53		20	18.24
	30	12.07		30	13.46		30	14.96		30	16.56		30	18.27
	40	12.09		40	13.49		40	14.98		40	16.59		40	18.31
	50	12.11		50	13.51		50	15.01		50	16.62		50	18.34
3	0	12.14	12	0	13.54	21	0	15.04	30	0	16.65	39	0	18.37
	10	12.16		10	13.56		10	15.07		10	16.68		10	18.40
	20	12.19		20	13.59		20	15.10		20	16.71		20	18.44
	30	12.21		30	13.62		30	15.13		30	16.75		30	18.47
	40	12.24		40	13.65		40	15.16		40	16.78		40	18.50
	50	12.27		50	13.67		50	15.18		50	16.81		50	18.54
4	0	12.29	13	0	13.70	22	0	15.21	31	0	16.84	40	0	18.57
	10	12.31		10	13.73		10	15.24		10	16.87		10	18.61
	20	12.34		20	13.75		20	15.27		20	16.90		20	18.64
	30	12.36		30	13.78		30	15.30		30	16.93		30	18.67
	40	12.39		40	13.81		40	15.33		40	16.96		40	18.70
	50	12.42		50	13.84		50	15.36		50	16.99		50	18.74
5	0	12.44	14	0	13.86	23	0	15.39	32	0	17.02	41	0	18.77
	10	12.47		10	13.89		10	15.42		10	17.05		10	18.80
	20	12.49		20	13.92		20	15.45		20	17.09		20	18.84
	30	12.52		30	13.95		30	15.48		30	17.12		30	18.87
	40	12.55		40	13.98		40	15.51		40	17.15		40	18.90
	50	12.57		50	14.00		50	15.54		50	17.18		50	18.94
6	0	12.60	15	0	14.03	24	0	15.57	33	0	17.21	42	0	18.97
	10	12.62		10	14.06		10	15.60		10	17.24		10	19.00
	20	12.65		20	14.08		20	15.62		20	17.28		20	19.04
	30	12.67		30	14.11		30	15.65		30	17.31		30	19.07
	40	12.70		40	14.14		40	15.68		40	17.34		40	19.11
	50	12.72		50	14.17		50	15.71		50	17.37		50	19.14
7	0	12.75	16	0	14.19	25	0	15.74	34	0	17.40	43	0	19.17
	10	12.77		10	14.22		10	15.77		10	17.43		10	19.21
	20	12.80		20	14.25		20	15.80		20	17.46		20	19.24
	30	12.83		30	14.27		30	15.83		30	17.50		30	19.27
	40	12.85		40	14.30		40	15.86		40	17.53		40	19.31
	50	12.88		50	14.33		50	15.89		50	17.56		50	19.34
8	0	12.90	17	0	14.36	26	0	15.92	35	0	17.59	44	0	19.38
	10	12.93		10	14.39		10	15.95		10	17.62		10	19.41
	20	12.96		20	14.42		20	15.98		20	17.66		20	19.45
	30	12.98		30	14.44		30	16.01		30	17.69		30	19.48
	40	13.01		40	14.47		40	16.04		40	17.72		40	19.51
	50	13.03		50	14.50		50	16.07		50	17.75		50	19.55
9	0	13.06	18	0	14.53	27	0	16.10	36	0	17.79	45	0	19.58

4⁰

′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″
45	0	19.58	48	0	20.21	51	0	20.85	54	0	21.50	57	0	22.16
	10	19.62		10	20.25		10	20.88		10	21.53		10	22.20
	20	19.65		20	20.28		20	20.92		20	21.57		20	22.24
	30	19.69		30	20.31		30	20.95		30	21.61		30	22.27
	40	19.72		40	20.35		40	20.99		40	21.64		40	22.31
	50	19.76		50	20.38		50	21.02		50	21.68		50	22.35
46	0	19.79	49	0	20.42	52	0	21.06	55	0	21.72	58	0	22.39
	10	19.82		10	20.45		10	21.10		10	21.75		10	22.43
	20	19 86		20	20.49		20	21.13		20	21.79		20	22.46
	30	19.89		30	20.52		30	21.17		30	21.82		30	22.50
	40	19.93		40	20.56		40	21.21		40	21.86		40	22.53
	50	19.96		50	20.60		50	21.24		50	21.90		50	22.57
47	0	20.00	50	0	20.63	53	0	21.28	56	0	21.94	59	0	22.61
	10	20.03		10	20.67		10	21.31		10	21 98		10	22.65
	20	20.06		20	20.70		20	21.35		20	22.01		20	22.69
	30	20.10		30	20.74		30	21.39		30	22.05		30	22.73
	40	20.14		40	20.77		40	21.42		40	22.09		40	22.76
	50	20.17		50	20.81		50	21.46		50	22.12		50	22.80
48	0	20.21	51	0	20.85	54	0	21.50	57	0	22.16	60	0	22.84

5⁰

′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″
0	0	22.84	5	0	24.00	10	0	25.20	15	0	26.44	20	0	27.72
	10	22.88		10	24.04		10	25.24		10	26.48		10	27.76
	20	22.91		20	24.08		20	25.28		20	26.52		20	27.80
	30	22.95		30	24,12		30	25.32		30	26.56		30	27.85
	40	22.99		40	24.16		40	25.36		40	26.60		40	27.89
	50	23.03		50	24.20		50	25.40		50	26.65		50	27.94
1	0	23.07	6	0	24.24	11	0	25.44	16	0	26.69	21	0	27.98
	10	23.10		10	24.27		10	25.48		10	26.73		10	28.02
	20	23.14		20	24.31		20	25.53		20	26.78		20	28.07
	30	23.18		30	24.36		30	25.57		30	26.82		30	28.11
	40	23.22		40	24.40		40	25.61		40	26.86		40	28.15
	50	23.26		50	24.43		50	25.65		50	26.90		50	28.20
2	0	23.30	7	0	24.47	12	0	25.69	17	0	26.95	22	0	28.24
	10	23.34		10	24.51		10	25.73		10	26.99		10	28.28
	20	23.37		20	24.55		20	25.77		20	27.03		20	28.33
	30	23.41		30	24.59		30	25.81		30	27.07		30	28.37
	40	23.45		40	24.63		40	25.85		40	27.11		40	28.41
	50	23.49		50	24.67		50	25.90		50	27.16		50	28.46
3	0	23.53	8	0	24.71	13	0	25.94	18	0	27.20	23	0	28.50
	10	23.57		10	24.75		10	25.98		10	27.24		10	28.55
	20	23.61		20	24.79		20	26.02		20	27.28		20	28.59
	30	23.65		30	24.83		30	26.06		30	27.32		30	28.64
	40	23.69		40	24.87		40	26.10		40	27.37		40	28.68
	50	23.73		50	24.91		50	26.14		50	27.41		50	28.72
4	0	23.77	9	0	24.96	14	0	26.19	19	0	27.46	24	0	28.77
	10	23.81		10	25.00		10	26.23		10	27.50		10	28.81
	20	23.84		20	25.04		20	26.27		20	27.55		20	28.86
	30	23.88		30	25 08		30	26.31		30	27.59		30	28.90
	40	23.92		40	25.12		40	26.36		40	27.63		40	28.95
	50	23.96		50	25.16		50	26.40		50	27.67		50	28.99
5	0	24.00	10	0	25.20	15	0	26.44	20	0	27.72	25	0	29.04

5°

′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
25	0	29.04	32	0	30.95	39	0	32.95	46	0	35.03	53	0	37.20
	10	29.08		10	31.00		10	33.00		10	35.08		10	37.26
	20	29.13		20	31.04		20	33.05		20	35.13		20	37.31
	30	29.17		30	31.09		30	33.10		30	35.18		30	37.36
	40	29.21		40	31.14		40	33.15		40	35.23		40	37.41
	50	29.26		50	31.19		50	33.20		50	35.28		50	37.46
26	0	29.30	33	0	31.23	40	0	33.24	47	0	35.33	54	0	37.52
	10	29.35		10	31.28		10	33.29		10	35.38		10	37.57
	20	29.40		20	31.33		20	33.34		20	35.44		20	37.62
	30	29.44		30	31.37		30	33.39		30	35.49		30	37.68
	40	29.48		40	31.42		40	33.44		40	35.54		40	37.73
	50	29.53		50	31.47		50	33.49		50	35.59		50	37.78
27	0	29.57	34	0	31.52	41	0	33.54	48	0	35.65	55	0	37.84
	10	29.62		10	31.56		10	33.59		10	35.70		10	37.89
	20	29.66		20	31.61		20	33.64		20	35.75		20	37.94
	30	29.71		30	31.66		30	33.69		30	35.80		30	38.00
	40	29.76		40	31.70		40	33.74		40	35.85		40	38.05
	50	29.80		50	31.75		50	33.79		50	35.90		50	38.10
28	0	29.85	35	0	31.80	42	0	33.84	49	0	35.95	56	0	38.16
	10	29.89		10	31.84		10	33.88		10	36.00		10	38.21
	20	29.94		20	31.89		20	33.93		20	36.05		20	38.27
	30	29.98		30	31.94		30	33.98		30	36.11		30	38.32
	40	30.03		40	31.99		40	34.03		40	36.16		40	38.37
	50	30.07		50	32.04		50	34.08		50	36.21		50	38.43
29	0	30.12	36	0	32.09	43	0	34.13	50	0	36.26	57	0	38.48
	10	30.17		10	32.13		10	34.18		10	36.31		10	38.54
	20	30.21		20	32.18		20	34.23		20	36.37		20	38.59
	30	30.25		30	32.23		30	34.28		30	36.42		30	38.64
	40	30.30		40	32.27		40	34.33		40	36.47		40	38.69
	50	30.35		50	32.32		50	34.38		50	36.52		50	38.75
30	0	30.40	37	0	32.37	44	0	34.43	51	0	36.57	58	0	38.80
	10	30.44		10	32.42		10	34.48		10	36.62		10	38.86
	20	30.49		20	32.47		20	34.53		20	36.68		20	38.92
	30	30.54		30	32.52		30	34.58		30	36.73		30	38.97
	40	30.58		40	32.56		40	34.63		40	36.78		40	39.02
	50	30.63		50	32.61		50	34.68		50	36.83		50	39.07
31	0	30.67	38	0	32.66	45	0	34.73	52	0	36.89	59	0	39.13
	10	30.72		10	32.71		10	34.78		10	36.94		10	39.18
	20	30.76		20	32.75		20	34.83		20	36.99		20	39.24
	30	30.81		30	32.80		30	34.88		30	37.04		30	39.29
	40	30.86		40	32.85		40	34.93		40	37.10		40	39.35
	50	30.90		50	32.90		50	34.98		50	37.15		50	39.40
32	0	30.95	39	0	32.95	46	0	35.03	53	0	37.20	60	0	39.46

6°

′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″	′	″	Unproportionalität. ″
0	0	39.46	1	0	39.79	2	0	40.12	3	0	40.45	4	0	40.79
	10	39.52		10	39.85		10	40.17		10	40.51		10	40.84
	20	39.57		20	39.90		20	40.23		20	40.57		20	40.90
	30	39.62		30	39.95		30	40.28		30	40.62		30	40.95
	40	39.68		40	40.00		40	40.34		40	40.67		40	41.01
	50	39.74		50	40.06		50	40.40		50	40.73		50	41.07
1	0	39.79	2	0	40.12	3	0	40.45	4	0	40.79	5	0	41.13

6°

′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ″
5	0	41.13	14	0	44.24	23	0	47.51	32	0	50.94	41	0	54.53
	10	41.18		10	44.30		10	47.57		10	51.01		10	54.60
	20	41.24		20	44.36		20	47.64		20	51.07		20	54.66
	30	41.29		30	44.42		30	47.70		30	51.14		30	54.73
	40	41.35		40	44.48		40	47.76		40	51.20		40	54.80
	50	41.41		50	44.54		50	47.82		50	51.26		50	54.87
6	0	41.46	15	0	44.60	24	0	47.89	33	0	51.33	42	0	54.94
	10	41.52		10	44.65		10	47.95		10	51.40		10	55.01
	20	41.58		20	44.71		20	48.01		20	51.46		20	55.08
	30	41.63		30	44.78		30	48.07		30	51.52		30	55.14
	40	41.69		40	44.83		40	48.14		40	51.59		40	55.21
	50	41.75		50	44.90		50	48.20		50	51.66		50	55.28
7	0	41.81	16	0	44.96	25	0	48.26	34	0	51.72	43	0	55.35
	10	41.86		10	45.02		10	48.32		10	51.79		10	55.42
	20	41.92		20	45.08		20	48.38		20	51.85		20	55.48
	30	41.97		30	45.13		30	48.45		30	51.92		30	55.55
	40	42.03		40	45.19		40	48.51		40	51.98		40	55.62
	50	42.09		50	45.25		50	48.57		50	52.05		50	55.69
8	0	42.15	17	0	45.31	26	0	48.63	35	0	52.11	44	0	55.76
	10	42.20		10	45.37		10	48.70		10	52.18		10	55.83
	20	42.26		20	45.43		20	48.76		20	52.25		20	55.89
	30	42.32		30	45.49		30	48.82		30	52.31		30	55.96
	40	42.38		40	45.56		40	48.89		40	52.38		40	56.04
	50	42.43		50	45.62		50	48.95		50	52.45		50	56.11
9	0	42.49	18	0	45.68	27	0	49.02	36	0	52.51	45	0	56.17
	10	42.55		10	45.74		10	49.08		10	52.58		10	56.25
	20	45.61		20	45.80		20	49.14		20	52.64		20	56.31
	30	42.66		30	45.86		30	49.20		30	52.71		30	56.38
	40	42.72		40	45.92		40	49.27		40	52.78		40	56.45
	50	42.78		50	45.97		50	49.33		50	52.85		50	56.52
10	0	42.84	19	0	46.04	28	0	49.40	37	0	52.91	46	0	56.59
	10	42.89		10	46.10		10	49.46		10	52.98		10	56.66
	20	42.95		20	46.16		20	49.52		20	53.04		20	56.73
	30	43.01		30	46.22		30	49.59		30	53.11		30	56.80
	40	43.07		40	46.28		40	49.65		40	53.18		40	56.87
	50	43.13		50	46.35		50	49.71		50	53.25		50	56.94
11	0	43.18	20	0	46.41	29	0	49.78	38	0	53.31	47	0	57.01
	10	43.24		10	46.47		10	49.84		10	53.38		10	57.08
	20	43.30		20	46.52		20	49.91		20	53.45		20	57.15
	30	43.36		30	46.59		30	49.97		30	53.51		30	57.22
	40	43.41		40	46.65		40	50.03		40	53.58		40	57.29
	50	43.47		50	46.71		50	50.10		50	53.65		50	57.37
12	0	43.53	21	0	46.77	30	0	50.16	39	0	53.71	48	0	57.43
	10	43.59		10	46.83		10	50.23		10	53.78		10	57.50
	20	43.65		20	46.90		20	50.29		20	53.85		20	57.57
	30	43.71		30	46.95		30	50.35		30	53.91		30	57.64
	40	43.77		40	47.02		40	50.42		40	53.98		40	57.71
	50	43.83		50	47.08		50	50.48		50	54.05		50	57.78
13	0	43.89	22	0	47.14	31	0	50.55	40	0	54.12	49	0	57.85
	10	43.95		10	47.20		10	50.61		10	54.19		10	57.93
	20	44.01		20	47.26		20	50.68		20	54.26		20	57.99
	30	44.06		30	47.33		30	50.75		30	54.32		30	58.06
	40	44.12		40	47.39		40	50.81		40	54.39		40	58.14
	50	44.18		50	47.45		50	50.88		50	54.46		50	58.21
14	0	44.24	23	0	47.51	32	0	50.94	41	0	54.53	50	0	58.27

6°

′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″
50	0	0	58.27	52	0	0	59.14	54	0	1	0.00	56	0	1	0.87	58	0	1	1.76
	10	0	58.34		10	0	59.21		10	1	0.07		10	1	0.95		10	1	1.83
	20	0	58.42		20	0	59.28		20	1	0.15		20	1	1.02		20	1	1.90
	30	0	58.49		30	0	59.35		30	1	0.22		30	1	1.10		30	1	1.98
	40	0	58.56		40	0	59.42		40	1	0.29		40	1	1.17		40	1	2.05
	50	0	58.64		50	0	59.49		50	1	0.36		50	1	1.24		50	1	2.13
51	0	0	58.70	53	0	0	59.57	55	0	1	0.43	57	0	1	1.32	59	0	1	2.20
	10	0	58.78		10	0	59.64		10	1	0.50		10	1	1.39		10	1	2.27
	20	0	58.84		20	0	59.71		20	1	0.58		20	1	1.46		20	1	2.35
	30	0	58.91		30	0	59.78		30	1	0.65		30	1	1.53		30	1	2.42
	40	0	58.99		40	0	59.85		40	1	0.73		40	1	1.61		40	1	2.50
	50	0	59.06		50	0	59.93		50	1	0.80		50	1	1.68		50	1	2.57
52	0	0	59.14	54	0	1	0.00	56	0	1	0.87	58	0	1	1.76	60	0	1	2.64

7°

′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
0	0	1	2.64	6	0	1	5.36	12	0	1	8.17	18	0	1	11.05	24	0	1	14.00
	10	1	2.72		10	1	5.44		10	1	8.24		10	1	11.13		10	1	14.09
	20	1	2.79		20	1	5.52		20	1	8.32		20	1	11.21		20	1	14.17
	30	1	2.87		30	1	5.60		30	1	8.40		30	1	11.29		30	1	14.25
	40	1	2.95		40	1	5.68		40	1	8.48		40	1	11.37		40	1	14.34
	50	1	3.02		50	1	5.75		50	1	8.56		50	1	11.45		50	1	14.42
1	0	1	3.09	7	0	1	5.83	13	0	1	8.64	19	0	1	11.53	25	0	1	14.50
	10	1	3.17		10	1	5.91		10	1	8.72		10	1	11.61		10	1	14.59
	20	1	3.24		20	1	5.98		20	1	8.80		20	1	11.69		20	1	14.67
	30	1	3.32		30	1	6.06		30	1	8.88		30	1	11.78		30	1	14.75
	40	1	3.39		40	1	6.14		40	1	8.96		40	1	11.86		40	1	14.84
	50	1	3.47		50	1	6.21		50	1	9.04		50	1	11.94		50	1	14.92
2	0	1	3.55	8	0	1	6.29	14	0	1	9.12	20	0	1	12.02	26	0	1	15.01
	10	1	3.62		10	1	6 37		10	1	9.20		10	1	12.10		10	1	15.09
	20	1	3.69		20	1	6.45		20	1	9.28		20	1	12.19		20	1	15.17
	30	1	3.77		30	1	6.52		30	1	9.36		30	1	12.27		30	1	15.25
	40	1	3.85		40	1	6.60		40	1	9.43		40	1	12.35		40	1	15.34
	50	1	3.92		50	1	6.68		50	1	9.51		50	1	12.43		50	1	15.43
3	0	1	4.00	9	0	1	6.76	15	0	1	9.60	21	0	1	12.51	27	0	1	15.51
	10	1	4.07		10	1	6.84		10	1	9.68		10	1	12.60		10	1	15.59
	20	1	4.15		20	1	6.91		20	1	9.76		20	1	12.68		20	1	15.68
	30	1	4.22		30	1	6.99		30	1	9.84		30	1	12 76		30	1	15.77
	40	1	4.30		40	1	7.07		40	1	9.92		40	1	12.85		40	1	15.85
	50	1	4.38		50	1	7.15		50	1	10.00		50	1	12.93		50	1	15.94
4	0	1	4.46	10	0	1	7 23	16	0	1	10.08	22	0	1	13.01	28	0	1	16.02
	10	1	4.53		10	1	7.31		10	1	10.16		10	1	13.09		10	1	16.11
	20	1	4.60		20	1	7.38		20	1	10.24		20	1	13 17		20	1	16.19
	30	1	4.68		30	1	7.46		30	1	10.32		30	1	13.26		30	1	16.27
	40	1	4.75		40	1	7.54		40	1	10.40		40	1	13.34		40	1	16.36
	50	1	4.83		50	1	7.61		50	1	10.48		50	1	13.42		50	1	16.44
5	0	1	4.91	11	0	1	7.69	17	0	1	10.56	23	0	1	13.51	29	0	1	16.53
	10	1	4.99		10	1	7.77		10	1	10.64		10	1	13.59		10	1	16.61
	20	1	5.06		20	1	7.85		20	1	10.72		20	1	13.67		20	1	16.69
	30	1	5.14		30	1	7.93		30	1	10.80		30	1	13.75		30	1	16.79
	40	1	5.22		40	1	8.01		40	1	10.88		40	1	13.83		40	1	16.87
	50	1	5.29		50	1	8.09		50	1	10.96		50	1	13.92		50	1	16.96
6	0	1	5.36	12	0	1	8.17	18	0	1	11.05	24	0	1	14.00	30	0	1	17.04

7°

′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″
30	0	1 17.04	36	0	1 20.16	42	0	1 23.37	48	0	1 26.65	54	0	1 30.03
	10	1 17.12		10	1 20.25		10	1 23.46		10	1 26.75		10	1 30.12
	20	1 17.21		20	1 20.34		20	1 23.55		20	1 26.84		20	1 30.22
	30	1 17.30		30	1 20.43		30	1 23.64		30	1 26.94		30	1 30.31
	40	1 17.39		40	1 20.52		40	1 23.73		40	1 27.03		40	1 30.41
	50	1 17.47		50	1 20.60		50	1 23.82		50	1 27.12		50	1 30.50
31	0	1 17.56	37	0	1 20.69	43	0	1 23.91	49	0	1 27.21	55	0	1 30.60
	10	1 17.65		10	1 20.78		10	1 24 00		10	1 27.30		10	1 30.70
	20	1 17.73		20	1 20.87		20	1 24.09		20	1 27.40		20	1 30.79
	30	1 17.81		30	1 20.96		30	1 24.18		30	1 27.49		30	1 30.88
	40	1 17.90		40	1 21.04		40	1 24 27		40	1 27.58		40	1 30.98
	50	1 17.99		50	1 21.13		50	1 24.36		50	1 27.68		50	1 31.07
32	0	1 18.07	38	0	1 21.22	44	0	1 24.45	50	0	1 27.77	56	0	1 31.17
	10	1 18.16		10	1 21.31		10	1 24.54		10	1 27.86		10	1 31.27
	20	1 18.25		20	1 21.40		20	1 24.63		20	1 27.95		20	1 31.37
	30	1 18.33		30	1 21.49		30	1 24.72		30	1 28.05		30	1 31.46
	40	1 18.42		40	1 21.58		40	1 24.82		40	1 28.15		40	1 31.56
	50	1 18.50		50	1 21.67		50	1 24.91		50	1 28.24		50	1 31.65
33	0	1 18.59	39	0	1 21.75	45	0	1 25.01	51	0	1 28.33	57	0	1 31.74
	10	1 18.68		10	1 21.84		10	1 25.10		10	1 28.42		10	1 31.84
	20	1 18.77		20	1 21.93		20	1 25.19		20	1 28.52		20	1 31.94
	30	1 18.85		30	1 22.02		30	1 25.28		30	1 28.62		30	1 32.04
	40	1 18.94		40	1 22.11		40	1 25.37		40	1 28.71		40	1 32.13
	50	1 19.03		50	1 22.20		50	1 25.46		50	1 28.80		50	1 32.23
34	0	1 19.12	40	0	1 22.29	46	0	1 25.55	52	0	1 28.90	58	0	1 32.33
	10	1 19.20		10	1 22.38		10	1 25.64		10	1 28.99		10	1 32.43
	20	1 19.29		20	1 22.47		20	1 25.74		20	1 29.09		20	1 32.52
	30	1 19.38		30	1 22.56		30	1 25.83		30	1 29.18		30	1 32.62
	40	1 19.46		40	1 22.65		40	1 25.92		40	1 29.27		40	1 32.71
	50	1 19.55		50	1 22.74		50	1 26.01		50	1 29.37		50	1 32.81
35	0	1 19.64	41	0	1 22.83	47	0	1 26.10	53	0	1 29.46	59	0	1 32.90
	10	1 19.73		10	1 22.92		10	1 26.19		10	1 29.55		10	1 33.00
	20	1 19.81		20	1 23.01		20	1 26.29		20	1 29.65		20	1 33.10
	30	1 19.90		30	1 23.10		30	1 26.38		30	1 29.74		30	1 33.20
	40	1 19.99		40	1 23.19		40	1 26.47		40	1 29.84		40	1 33.29
	50	1 20.08		50	1 23.28		50	1 26.56		50	1 29.94		50	1 33.39
36	0	1 20.16	42	0	1 23.37	48	0	1 26.65	54	0	1 30.03	60	0	1 33.49

8°

′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″
0	0	1 33.49	2	0	1 34.66	4	0	1 35.84	6	0	1 37.04	8	0	1 38.24
	10	1 33.59		10	1 34.76		10	1 35.94		10	1 37.14		10	1 38.34
	20	1 33.69		20	1 34.86		20	1 36.04		20	1 37.24		20	1 38.44
	30	1 33.78		30	1 34.96		30	1 36.15		30	1 37.34		30	1 38.54
	40	1 33.88		40	1 35.06		40	1 36.25		40	1 37.44		40	1 38.64
	50	1 33.98		50	1 35.15		50	1 36.34		50	1 37.54		50	1 38.74
1	0	1 34.08	3	0	1 35.25	5	0	1 36.44	7	0	1 37.64	9	0	1 38.85
	10	1 34.17		10	1 35.35		10	1 36.54		10	1 37.74		10	1 38.95
	20	1 34.27		20	1 35.45		20	1 36.64		20	1 37.84		20	1 39.05
	30	1 34.37		30	1 35.55		30	1 36.74		30	1 37.94		30	1 39.15
	40	1 34.47		40	1 35.65		40	1 36.84		40	1 38.04		40	1 39 25
	50	1 34.56		50	1 35.75		50	1 36.94		50	1 38.14		50	1 39.35
2	0	1 34.66	4	0	1 35.84	6	0	1 37.04	8	0	1 38.24	10	0	1 39.45

8⁰

′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″
10	0	1 39.45	19	0	1 45.03	28	0	1 50.81	37	0	1 56.79	46	0	2 3.00
	10	1 39.55		10	1 45.14		10	1 50.92		10	1 56.91		10	2 3.12
	20	1 39.66		20	1 45.24		20	1 51.03		20	1 57.02		20	2 3.23
	30	1 39.76		30	1 45.34		30	1 51.14		30	1 57.14		30	2 3.35
	40	1 39.86		40	1 45.45		40	1 51.25		40	1 57.25		40	2 3.46
	50	1 39.96		50	1 45.56		50	1 51.35		50	1 57.36		50	2 3.59
11	0	1 40.06	20	0	1 45.66	29	0	1 51.47	38	0	1 57.48	47	0	2 3.70
	10	1 40.16		10	1 45.77		10	1 51.57		10	1 57.59		10	2 3.83
	20	1 40.26		20	1 45.87		20	1 51.68		20	1 57.70		20	2 3.94
	30	1 40.36		30	1 45.97		30	1 51.80		30	1 57.82		30	2 4.06
	40	1 40.47		40	1 46.09		40	1 51.90		40	1 57.93		40	2 4.17
	50	1 40.57		50	1 46.19		50	1 52.01		50	1 58.05		50	2 4.29
12	0	1 40.67	21	0	1 46.30	30	0	1 52.12	39	0	1 58.16	48	0	2 4.41
	10	1 40.78		10	1 46.40		10	1 52.24		10	1 58.28		10	2 4.53
	20	1 40.88		20	1 46.50		20	1 52.34		20	1 58.39		20	2 4.64
	30	1 40.98		30	1 46.61		30	1 52.45		30	1 58.50		30	2 4.76
	40	1 41.08		40	1 46.72		40	1 52.57		40	1 58.61		40	2 4.88
	50	1 41.18		50	1 46.83		50	1 52.68		50	1 58.73		50	2 5.00
13	0	1 41.29	22	0	1 46.93	31	0	1 52.79	40	0	1 58.84	49	0	2 5.12
	10	1 41.39		10	1 47.04		10	1 52.89		10	1 58.96		10	2 5.23
	20	1 41.50		20	1 47.15		20	1 53.00		20	1 59.07		20	2 5.35
	30	1 41.60		30	1 47.25		30	1 53.11		30	1 59.19		30	2 5.47
	40	1 41.70		40	1 47.36		40	1 53.22		40	1 59.30		40	2 5.59
	50	1 41.80		50	1 47.46		50	1 53.33		50	1 59.41		50	2 5.71
14	0	1 41.90	23	0	1 47.57	32	0	1 53.45	41	0	1 59.53	50	0	2 5.82
	10	1 42.01		10	1 47.68		10	1 53.56		10	1 59.65		10	2 5.94
	20	1 42.11		20	1 47.79		20	1 53.67		20	1 59.76		20	2 6.07
	30	1 42.21		30	1 47.90		30	1 53.78		30	1 59.87		30	2 6.18
	40	1 42.32		40	1 48.00		40	1 53.89		40	1 59.99		40	2 6.30
	50	1 42.42		50	1 48.10		50	1 54.00		50	2 0.11		50	2 6.42
15	0	1 42.52	24	0	1 48.21	33	0	1 54.11	42	0	2 0.22	51	0	2 6.54
	10	1 42.63		10	1 48.33		10	1 54.22		10	2 0.34		10	2 6.66
	20	1 42.73		20	1 48.43		20	1 54.33		20	2 0.45		20	2 6.78
	30	1 42.83		30	1 48.53		30	1 54.44		30	2 0.57		30	2 6.90
	40	1 42.94		40	1 48.65		40	1 54.55		40	2 0.68		40	2 7.02
	50	1 43.04		50	1 48.75		50	1 54.67		50	2 0.79		50	2 7.14
16	0	1 43.14	25	0	1 48.86	34	0	1 54.78	43	0	2 0.91	52	0	2 7.26
	10	1 43.25		10	1 48.97		10	1 54.89		10	2 1.03		10	2 7.37
	20	1 43.36		20	1 49.08		20	1 55.00		20	2 1.14		20	2 7.49
	30	1 43.46		30	1 49.18		30	1 55.11		30	2 1.26		30	2 7.62
	40	1 43.57		40	1 49.29		40	1 55.23		40	2 1.37		40	2 7.73
	50	1 43.67		50	1 49.40		50	1 55.34		50	2 1.49		50	2 7.85
17	0	1 43.77	26	0	1 49.50	35	0	1 55.45	44	0	2 1.60	53	0	2 7.97
	10	1 43.88		10	1 49.62		10	1 55.56		10	2 1.72		10	2 8.09
	20	1 43.98		20	1 49.72		20	1 55.67		20	2 1.84		20	2 8.21
	30	1 44.09		30	1 49.83		30	1 55.79		30	2 1.95		30	2 8.33
	40	1 44.19		40	1 49.94		40	1 55.90		40	2 2.07		40	2 8.45
	50	1 44.29		50	1 50.05		50	1 56.01		50	2 2.18		50	2 8.57
18	0	1 44.40	27	0	1 50.15	36	0	1 56.12	45	0	2 2.30	54	0	2 8.69
	10	1 44.51		10	1 50.27		10	1 56.23		10	2 2.41		10	2 8.82
	20	1 44.61		20	1 50.38		20	1 56.35		20	2 2.54		20	2 8.93
	30	1 44.71		30	1 50.48		30	1 56.46		30	2 2.65		30	2 9.06
	40	1 44.81		40	1 50.59		40	1 56.57		40	2 2.77		40	2 9.18
	50	1 44.92		50	1 50.71		50	1 56.69		50	2 2.88		50	2 9.30
19	0	1 45.03	28	0	1 50.81	37	0	1 56.79	46	0	2 3.00	55	0	2 9.42

8⁰

′	″	Unpro-portio-nalität. ′ ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ′ ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ′ ″	′	″	Unpro-portio-nalität. ′ ″	′	″	**Unpro-portio-nalität.** ′ ″
55	0	2 9.42	56	0	2 10.14	57	0	2 10.87	58	0	2 11.61	59	0	**2 12.34**
	10	2 9.54		10	2 10.27		10	2 10.99		10	2 11.73		10	**2 12.47**
	20	2 9.65		20	2 10.39		20	2 11.12		20	2 11.85		20	**2 12.59**
	30	2 9.78		30	2 10.51		30	2 11.24		30	2 11.97		30	**2 12.71**
	40	2 9.90		40	2 10.63		40	2 11.36		40	2 12.10		40	**2 12.83**
	50	2 10.02		50	2 10.75		50	2 11.49		50	2 12.22		50	**2 12.96**
56	0	2 10.14	57	0	2 10.87	58	0	2 11.61	59	0	2 12.34	60	0	**2 13.08**

9⁰

′	″	′ ″	′	″	′ ″	′	″	′ ″	′	″	′ ″	′	″	′ ″
0	0	2 13.08	7	0	2 18.32	14	0	2 23.69	21	0	2 29.20	28	0	2 34.85
	10	2 13.20		10	2 18.44		10	2 23.82		10	2 29.34		10	2 34.99
	20	2 13.33		20	2 18.56		20	2 23.95		20	2 29.47		20	2 35.13
	30	2 13.45		30	2 18.69		30	2 24.08		30	2 29.60		30	2 35.26
	40	2 13.57		40	2 18.83		40	2 24.21		40	2 29.73		40	2 35.39
	50	2 13.69		50	2 18.95		50	2 24.34		50	2 29.87		50	2 35.53
1	0	2 13.82	8	0	2 19.08	15	0	2 24.47	22	0	2 29.99	29	0	2 35.67
	10	2 13.94		10	2 19.20		10	2 24.60		10	2 30.13		10	2 35.80
	20	2 14.07		20	2 19.33		20	2 24.73		20	2 30.26		20	2 35.95
	30	2 14.19		30	2 19.45		30	2 24.86		30	2 30.40		30	2 36.08
	40	2 14.31		40	2 19.58		40	2 24.99		40	2 30.53		40	2 36.22
	50	2 14.44		50	2 19.71		50	2 25.12		50	2 30.67		50	2 36.35
2	0	2 14.56	9	0	2 19.83	16	0	2 25.25	23	0	2 30.81	30	0	2 36.49
	10	2 14.69		10	2 19.96		10	2 25.38		10	2 30.94		10	2 36.63
	20	2 14.81		20	2 20.09		20	2 25.51		20	2 31.07		20	2 36.76
	30	2 14.93		30	2 20.22		30	2 25.64		30	2 31.20		30	2 36.91
	40	2 15.06		40	2 20.34		40	2 25.77		40	2 31.33		40	2 37.04
	50	2 15.18		50	2 20.48		50	2 25.91		50	2 31.47		50	2 37.17
3	0	2 15.31	10	0	2 20.60	17	0	2 26.03	24	0	2 31.60	31	0	2 37.31
	10	2 15.43		10	2 20.73		10	2 26.16		10	2 31.74		10	2 37.45
	20	2 15.55		20	2 20.86		20	2 26.30		20	2 31.88		20	2 37.59
	30	2 15.68		30	2 20.98		30	2 26.43		30	2 32.01		30	2 37.73
	40	2 15.81		40	2 21.11		40	2 26.56		40	2 32.14		40	2 37.87
	50	2 15.93		50	2 21.24		50	2 26.69		50	2 32.27		50	2 38.00
4	0	2 16.05	11	0	2 21.36	18	0	2 26.82	25	0	2 32.41	32	0	2 38.14
	10	2 16.18		10	2 21.50		10	2 26.95		10	2 32.54		10	2 38.28
	20	2 16.31		20	2 21.62		20	2 27.08		20	2 32.68		20	2 38.41
	30	2 16.43		30	2 21.76		30	2 27.22		30	2 32.82		30	2 38.56
	40	2 16.55		40	2 21.88		40	2 27.35		40	2 32.95		40	2 38.69
	50	2 16.68		50	2 22.02		50	2 27.48		50	2 33.09		50	2 38.83
5	0	2 16.80	12	0	2 22.14	19	0	2 27.61	26	0	2 33.22	33	0	2 38.97
	10	2 16.93		10	2 22.27		10	2 27.75		10	2 33.36		10	2 39 11
	20	2 17.06		20	2 22.40		20	2 27.88		20	2 33.49		20	2 39.25
	30	2 17.18		30	2 22.53		30	2 28.01		30	2 33.63		30	2 39.39
	40	2 17.31		40	2 22.66		40	2 28.15		40	2 33.77		40	2 39.52
	50	2 17.43		50	2 22.78		50	2 28.27		50	2 33.90		50	2 39.67
6	0	2 17.56	13	0	2 22.92	20	0	2 28.41	27	0	2 34.03	34	0	2 39.80
	10	2 17.68		10	2 23.04		10	2 28.54		10	2 34.17		10	2 39.94
	20	2 17.81		20	2 23.17		20	2 28.67		20	2 34.30		20	2 40.08
	30	2 17.94		30	2 23.31		30	2 28.80		30	2 34.44		30	2 40.22
	40	2 18.07		40	2 23.43		40	2 28.93		40	2 34.57		40	2 40.36
	50	2 18.19		50	2 23.56		50	2 29.07		50	2 34.71		50	2 40.50
7	0	2 18.32	14	0	2 23.69	21	0	2 29.20	28	0	2 34.85	35	0	2 40.64

9°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
35	0	2 40.64	40	0	2 44.86	45	0	2 49.16	50	0	2 53.53	55	0	2 57.98
	10	2 40.78		10	2 45.01		10	2 49.31		10	2 53.67		10	2 58.13
	20	2 40.92		20	2 45 14		20	2 49.45		20	2 53.82		20	2 58.28
	30	2 41.06		30	2 45.29		30	2 49.59		30	2 53.97		30	2 58 42
	40	2 41.20		40	2 45.43		40	2 49.74		40	2 54.12		40	2 58.57
	50	2 41.33		50	2 45.58		50	2 49.88		50	2 54.26		50	2 58.72
36	0	2 41.48	41	0	2 45.72	46	0	2 50.02	51	0	2 54.41	56	0	2 58.87
	10	2 41.62		10	2 45.86		10	2 50.17		10	2 54.56		10	2 59.02
	20	2 41.75		20	2 46.01		20	2 50.31		20	2 54.71		20	2 59.17
	30	2 41.90		30	2 46.14		30	2 50.46		30	2 54.85		30	2 59 33
	40	2 42.04		40	2 46.29		40	2 50.60		40	2 55.01		40	2 59.48
	50	2 42.18		50	2 46.43		50	2 50.75		50	2 55.15		50	2 59.62
37	0	2 42.33	42	0	2 46.58	47	0	2 50.90	52	0	2 55.30	57	0	2 59.78
	10	2 42.46		10	2 46.71		10	2 51.04		10	2 55.45		10	2 59.92
	20	2 42.60		20	2 46.86		20	2 51.19		20	2 55.59		20	3 0.07
	30	2 42.74		30	2 47 00		30	2 51.34		30	2 55.75		30	3 0.22
	40	2 42.88		40	2 47.14		40	2 51.48		40	2 55.89		40	3 0.38
	50	2 43 02		50	2 47.29		50	2 51.63		50	2 56.03		50	3 0.53
38	0	2 43.16	43	0	2 47.43	48	0	2 51.77	53	0	2 56.19	58	0	3 0.68
	10	2 43.30		10	2 47.57		10	2 51.92		10	2 56.33		10	3 0 83
	20	2 43.44		20	2 47.72		20	2 52.07		20	2 56.48		20	3 0.98
	30	2 43.59		30	2 47.86		30	2 52.21		30	2 56.63		30	3 1.13
	40	2 43.73		40	2 48.01		40	2 52.36		40	2 56.79		40	3 1.28
	50	2 43.87		50	2 48.15		50	2 52 51		50	2 56.93		50	3 1.43
39	0	2 44.01	44	0	2 48.30	49	0	2 52.65	54	0	2 57.08	59	0	3 1.58
	10	2 44.15		10	2 48.44		10	2 52.80		10	2 57.23		10	3 1.74
	20	2 44 29		20	2 48.58		20	2 52.94		20	2 57.38		20	3 1.89
	30	2 44.44		30	2 48.73		30	2 53.09		30	2 57.52		30	3 2.04
	40	2 44.58		40	2 48.87		40	2 53.24		40	2 57.67		40	3 2.20
	50	2 44.72		50	2 49.02		50	2 53.39		50	2 57.82		50	3 2.34
40	0	2 44 86	45	0	2 49.16	50	0	2 53.53	55	0	2 57.98	60	0	3 2.50

10°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
0	0	3 2.50	3	0	3 5.25	6	0	3 8.02	9	0	3 10.82	12	0	3 13.66
	10	3 2 65		10	3 5.40		10	3 8.17		10	3 10.97		10	3 13.82
	20	3 2.79		20	3 5.55		20	3 8.33		20	3 11.14		20	3 13.97
	30	3 2.95		30	3 5.70		30	3 8.48		30	3 11.29		30	3 14.13
	40	3 3.09		40	3 5.86		40	3 8.64		40	3 11 45		40	3 14.29
	50	3 3.25		50	3 6.02		50	3 8.79		50	3 11.61		50	3 14.45
1	0	3 3.40	4	0	3 6.17	7	0	3 8.95	10	0	3 11.76	13	0	3 14.60
	10	3 3.56		10	3 6.32		10	3 9.11		10	3 11.92		10	3 14.76
	20	3 3.72		20	3 6.47		20	3 9.26		20	3 12.08		20	3 14.92
	30	3 3.86		30	3 6.63		30	3 9.42		30	3 12.23		30	3 15.08
	40	3 4.02		40	3 6.78		40	3 9.57		40	3 12.39		40	3 15.24
	50	3 4.17		50	3 6.93		50	3 9.73		50	3 12.55		50	3 15.39
2	0	3 4.32	5	0	3 7.09	8	0	3 9.89	11	0	3 12.71	14	0	3 15.56
	10	3 4.48		10	3 7.24		10	3 10.04		10	3 12.87		10	3 15 71
	20	3 4.63		20	3 7.40		20	3 10.19		20	3 13.03		20	3 15.87
	30	3 4.78		30	3 7.56		30	3 10.35		30	3 13.18		30	3 16.03
	40	3 4.93		40	3 7.71		40	3 10.51		40	3 13 34		40	3 16.19
	50	3 5.09		50	3 7.86		50	3 10.66		50	3 13.50		50	3 16.35
3	0	3 5.25	6	0	3 8.02	9	0	3 10.82	12	0	3 13.66	15	0	3 16.52

10⁰

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
15	0	3 16.52	24	0	3 25.26	33	0	3 34.26	42	0	3 43.52	51	0	3 53.04
	10	3 16.67		10	3 25.42		10	3 34.43		10	3 43.69		10	3 53.21
	20	3 16.84		20	3 25.59		20	3 34.59		20	3 43.87		20	3 53.39
	30	3 16.99		30	3 25.75		30	3 34.76		30	3 44.04		30	3 53.57
	40	3 17.15		40	3 25.91		40	3 34.93		40	3 44.21		40	3 53.75
	50	3 17.31		50	3 26.08		50	3 35.10		50	3 44.39		50	3 53.93
16	0	3 17.47	25	0	3 26.25	34	0	3 35.27	43	0	3 44.56	52	0	3 54.12
	10	3 17.64		10	3 26.41		10	3 35.44		10	3 44.73		10	3 54.29
	20	3 17.79		20	3 26.58		20	3 35.61		20	3 44.91		20	3 54.46
	30	3 17.95		30	3 26.74		30	3 35.78		30	3 45.08		30	3 54.64
	40	3 18.11		40	3 26.91		40	3 35.95		40	3 45.26		40	3 54.83
	50	3 18.27		50	3 27.07		50	3 36.12		50	3 45.43		50	3 55.01
17	0	3 18 43	26	0	3 27.23	35	0	3 36.29	44	0	3 45.60	53	0	3 55.19
	10	3 18.59		10	3 27.40		10	3 36.46		10	3 45.79		10	3 55.37
	20	3 18.75		20	3 27.56		20	3 36.63		20	3 45.96		20	3 55.54
	30	3 18.92		30	3 27.73		30	3 36 81		30	3 46.13		30	3 55.73
	40	3 19.08		40	3 27.90		40	3 36.97		40	3 46.31		40	3 55.91
	50	3 19.24		50	3 28.06		50	3 37.14		50	3 46.49		50	3 56.08
18	0	3 19.40	27	0	3 28.22	36	0	3 37.31	45	0	3 46.66	54	0	3 56.27
	10	3 19.56		10	3 28.40		10	3 37.48		10	3 46.83		10	3 56.45
	20	3 19.73		20	3 28.56		20	3 37.66		20	3 47.02		20	3 56.63
	30	3 19.88		30	3 28.72		30	3 37.82		30	3 47.19		30	3 56.81
	40	3 20 04		40	3 28 89		40	3 37.99		40	3 47.36		40	3 56.99
	50	3 20.20		50	3 29.06		50	3 38 17		50	3 47.54		50	3 57.17
19	0	3 20.36	28	0	3 29.22	37	0	3 38.34	46	0	3 47.71	55	0	3 57.35
	10	3 20.53		10	3 29.40		10	3 38.51		10	3 47.89		10	3 57.54
	20	3 20.69		20	3 29.55		20	3 38.68		20	3 48.06		20	3 57.71
	30	3 20.86		30	3 29.72		30	3 38.85		30	3 48.25		30	3 57.89
	40	3 21.02		40	3 29.90		40	3 39.03		40	3 48.42		40	3 58.08
	50	3 21.18		50	3 30.05		50	3 39.20		50	3 48.60		50	3 58.25
20	0	3 21.34	29	0	3 30.22	38	0	3 39.37	47	0	3 48.77	56	0	3 58.43
	10	3 21.50		10	3 30.40		10	3 39.54		10	3 48.96		10	3 58.61
	20	3 21.67		20	3 30.56		20	3 39.71		20	3 49.13		20	3 58.80
	30	3 21.83		30	3 30.72		30	3 39.89		30	3 49.30		30	3 58.99
	40	3 21.98		40	3 30.89		40	3 40.06		40	3 49.48		40	3 59.17
	50	3 22.15		50	3 31.06		50	3 40.22		50	3 49.65		50	3 59.35
21	0	3 22.32	30	0	3 31.23	39	0	3 40.40	48	0	3 49.83	57	0	3 59.53
	10	3 22.47		10	3 31.40		10	3 40.57		10	3 50.01		10	3 59.72
	20	3 22.64		20	3 31.56		20	3 40.75		20	3 50.19		20	3 59.90
	30	3 22.80		30	3 31.73		30	3 40.92		30	3 50.36		30	4 0.07
	40	3 22.97		40	3 31.90		40	3 41.09		40	3 50.54		40	4 0.26
	50	3 23.13		50	3 32.06		50	3 41.26		50	3 50.72		50	4 0 44
22	0	3 23.29	31	0	3 32.23	40	0	3 41 43	49	0	3 50.90	58	0	4 0.62
	10	3 23.46		10	3 32.41		10	3 41.61		10	3 51.07		10	4 0.81
	20	3 23.62		20	3 32.57		20	3 41.78		20	3 51.25		20	4 0.99
	30	3 23.78		30	3 32.74		30	3 41.96		30	3 51.43		30	4 1.17
	40	3 23.95		40	3 32.91		40	3 42.13		40	3 51.61		40	4 1.35
	50	3 24.10		50	3 33.08		50	3 42.30		50	3 51.79		50	4 1.54
23	0	3 24.27	32	0	3 33.24	41	0	3 42.47	50	0	3 51.96	59	0	4 1.72
	10	3 24.44		10	3 33.41		10	3 42.65		10	3 52.13		10	4 1.90
	20	3 24.60		20	3 33.58		20	3 42.82		20	3 52.32		20	4 2.09
	30	3 24.76		30	3 33.76		30	3 42.99		30	3 52.50		30	4 2.27
	40	3 24.92		40	3 33.91		40	3 43.17		40	3 52.68		40	4 2 46
	50	3 25.09		50	3 34.09		50	3 43.34		50	3 52.86		50	4 2.64
24	0	3 25.26	33	0	3 34 26	42	0	3 43.52	51	0	3 53.04	60	0	4 2.83

11°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
0	0	4 2.83	9	0	4 12.88	18	0	4 23.21	27	0	4 33.81	36	0	4 44.70
	10	4 3.00		10	4 13.06		10	4 23.40		10	4 34.01		10	4 44.91
	20	4 3.19		20	4 13.26		20	4 23.60		20	4 34.22		20	4 45.11
	30	4 3.37		30	4 13.45		30	4 23.79		30	4 34.42		30	4 45.32
	40	4 3.55		40	4 13.63		40	4 23.98		40	4 34.61		40	4 45.52
	50	4 3.74		50	4 13.83		50	4 24.18		50	4 34.81		50	4 45.73
1	0	4 3.92	10	0	4 14.02	19	0	4 24.37	28	0	4 35.01	37	0	4 45.93
	10	4 4.11		10	4 14.20		10	4 24.56		10	4 35.21		10	4 46.13
	20	4 4.30		20	4 14.39		20	4 24.76		20	4 35.42		20	4 46.34
	30	4 4.48		30	4 14.58		30	4 24.95		30	4 35.61		30	4 46.55
	40	4 4.67		40	4 14.77		40	4 25.15		40	4 35.81		40	4 46.75
	50	4 4.85		50	4 14.96		50	4 25.35		50	4 36.01		50	4 46.95
2	0	4 5.03	11	0	4 15.16	20	0	4 25.54	29	0	4 36.22	38	0	4 47.16
	10	4 5.22		10	4 15.34		10	4 25.74		10	4 36.42		10	4 47.37
	20	4 5.40		20	4 15.53		20	4 25.93		20	4 36.61		20	4 47.58
	30	4 5.59		30	4 15.72		30	4 26.13		30	4 36.81		30	4 47.78
	40	4 5.77		40	4 15.92		40	4 26.32		40	4 37.01		40	4 47.99
	50	4 5.96		50	4 16.10		50	4 26.51		50	4 37.22		50	4 48.19
3	0	4 6.15	12	0	4 16.30	21	0	4 26.71	30	0	4 37.42	39	0	4 48.40
	10	4 6.33		10	4 16.48		10	4 26.91		10	4 37.61		10	4 48.61
	20	4 6.52		20	4 16.67		20	4 27.11		20	4 37.82		20	4 48.81
	30	4 6.70		30	4 16.87		30	4 27.30		30	4 38.01		30	4 49.01
	40	4 6.89		40	4 17.06		40	4 27.50		40	4 38.22		40	4 49.22
	50	4 7.07		50	4 17.24		50	4 27.70		50	4 38.43		50	4 49.43
4	0	4 7.25	13	0	4 17.44	22	0	4 27.89	31	0	4 38.62	40	0	4 49.63
	10	4 7.45		10	4 17.63		10	4 28.08		10	4 38.82		10	4 49.84
	20	4 7.63		20	4 17.82		20	4 28.28		20	4 39.03		20	4 50.05
	30	4 7.82		30	4 18.01		30	4 28.48		30	4 39.23		30	4 50.25
	40	4 8.00		40	4 18.19		40	4 28.68		40	4 39.43		40	4 50.46
	50	4 8.19		50	4 18.39		50	4 28.87		50	4 39.63		50	4 50.67
5	0	4 8.37	14	0	4 18.58	23	0	4 29.07	32	0	4 39.84	41	0	4 50.87
	10	4 8.57		10	4 18.78		10	4 29.26		10	4 40.04		10	4 51.08
	20	4 8.75		20	4 18.97		20	4 29.47		20	4 40.23		20	4 51.29
	30	4 8.94		30	4 19.16		30	4 29.65		30	4 40.43		30	4 51.50
	40	4 9.12		40	4 19.35		40	4 29.85		40	4 40.64		40	4 51.71
	50	4 9.30		50	4 19.54		50	4 30.06		50	4 40.85		50	4 51.91
6	0	4 9.50	15	0	4 19.74	24	0	4 30.25	33	0	4 41.04	42	0	4 52.12
	10	4 9.68		10	4 19.93		10	4 30.44		10	4 41.25		10	4 52.33
	20	4 9.87		20	4 20.12		20	4 30.65		20	4 41.45		20	4 52.54
	30	4 10.06		30	4 20.31		30	4 30.84		30	4 41.66		30	4 52.75
	40	4 10.25		40	4 20.51		40	4 31.05		40	4 41.86		40	4 52.95
	50	4 10.44		50	4 20.70		50	4 31.24		50	4 42.06		50	4 53.16
7	0	4 10.62	16	0	4 20.89	25	0	4 31.43	34	0	4 42.26	43	0	4 53.37
	10	4 10.82		10	4 21.08		10	4 31.63		10	4 42.46		10	4 53.58
	20	4 10.99		20	4 21.28		20	4 31.83		20	4 42.67		20	4 53.79
	30	4 11.19		30	4 21.47		30	4 32.03		30	4 42.87		30	4 53.99
	40	4 11.38		40	4 21.66		40	4 32.23		40	4 43.08		40	4 54.20
	50	4 11.56		50	4 21.85		50	4 32.42		50	4 43.28		50	4 54.41
8	0	4 11.75	17	0	4 22.05	26	0	4 32.63	35	0	4 43.48	44	0	4 54.62
	10	4 11.94		10	4 22.24		10	4 32.83		10	4 43.69		10	4 54.83
	20	4 12.12		20	4 22.43		20	4 33.02		20	4 43.89		20	4 55.04
	30	4 12.31		30	4 22.63		30	4 33.23		30	4 44.09		30	4 55.25
	40	4 12.50		40	4 22.82		40	4 33.42		40	4 44.30		40	4 55.46
	50	4 12.70		50	4 23.02		50	4 33.61		50	4 44.50		50	4 55.66
9	0	4 12.88	18	0	4 23.21	27	0	4 33.81	36	0	4 44.70	45	0	4 55.88

11°

′	″	Unpro-portio-nalität. ′	″	′	″	Unpro-portio-nalität. ′	″	′	″	Unpro-portio-nalität. ′	″	′	″	Unpro-portio-nalität. ′	″	′	″	Unpro-portio-nalität. ′	″
45	0	4	55.88	48	0	4	59.67	51	0	5	3.49	54	0	5	7.33	57	0	5	11.22
	10	4	56.09		10	4	59.87		10	5	3.70		10	5	7.55		10	5	11.44
	20	4	56.30		20	5	0.10		20	5	3.91		20	5	7.76		20	5	11.65
	30	4	56.50		30	5	0.30		30	5	4.12		30	5	7.98		30	5	11.87
	40	4	56.72		40	5	0.50		40	5	4.34		40	5	8.21		40	5	12.09
	50	4	56.93		50	5	0.72		50	5	4.55		50	5	8.42		50	5	12.30
46	0	4	57.14	49	0	5	0.93	52	0	5	4.76	55	0	5	8.63	58	0	5	12.52
	10	4	57.35		10	5	1.15		10	5	4.98		10	5	8.84		10	5	12.74
	20	4	57.55		20	5	1.36		20	5	5.20		20	5	9.06		20	5	12.95
	30	4	57.77		30	5	1.57		30	5	5.40		30	5	9.27		30	5	13.18
	40	4	57.97		40	5	1.78		40	5	5.62		40	5	9.49		40	5	13.39
	50	4	58.19		50	5	1.99		50	5	5.83		50	5	9.71		50	5	13.61
47	0	4	58.40	50	0	5	2.21	53	0	5	6.05	56	0	5	9.92	59	0	5	13.83
	10	4	58.61		10	5	2.42		10	5	6.26		10	5	10.15		10	5	14.05
	20	4	58.82		20	5	2.64		20	5	6.48		20	5	10.36		20	5	14.26
	30	4	59.03		30	5	2.84		30	5	6.70		30	5	10.57		30	5	14.49
	40	4	59.24		40	5	3.06		40	5	6.91		40	5	10.79		40	5	14.71
	50	4	59.46		50	5	3.26		50	5	7.12		50	5	11.00		50	5	14.92
48	0	4	59.67	51	0	5	3.49	54	0	5	7.33	57	0	5	11.22	60	0	5	15.14

12°

′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
0	0	5	15.14	5	0	5	21.74	10	0	5	28.43	15	0	5	35.21	20	0	5	42.09
	10	5	15.35		10	5	21.96		10	5	28.66		10	5	35.45		10	5	42.33
	20	5	15.57		20	5	22.18		20	5	28.88		20	5	35.67		20	5	42.56
	30	5	15.79		30	5	22.41		30	5	29.12		30	5	35.90		30	5	42.79
	40	5	16.02		40	5	22.62		40	5	29.33		40	5	36.13		40	5	43.01
	50	5	16.24		50	5	22.85		50	5	29.56		50	5	36.35		50	5	43.24
1	0	5	16.46	6	0	5	23.08	11	0	5	29.79	16	0	5	36.59	21	0	5	43.48
	10	5	16.67		10	5	23.30		10	5	30.00		10	5	36.82		10	5	43.71
	20	5	16.89		20	5	23.52		20	5	30.24		20	5	37.04		20	5	43.95
	30	5	17.11		30	5	23.73		30	5	30.46		30	5	37.27		30	5	44.18
	40	5	17.33		40	5	23.96		40	5	30.70		40	5	37.50		40	5	44.41
	50	5	17.55		50	5	24.19		50	5	30.91		50	5	37.73		50	5	44.64
2	0	5	17.77	7	0	5	24.41	12	0	5	31.13	17	0	5	37.96	22	0	5	44.88
	10	5	17.98		10	5	24.62		10	5	31.36		10	5	38.19		10	5	45.11
	20	5	18.21		20	5	24.85		20	5	31.59		20	5	38.41		20	5	45.34
	30	5	18.43		30	5	25.08		30	5	31.81		30	5	38.64		30	5	45.57
	40	5	18.65		40	5	25.30		40	5	32.04		40	5	38.87		40	5	45.80
	50	5	18.86		50	5	25.52		50	5	32.26		50	5	39.10		50	5	46.03
3	0	5	19.09	8	0	5	25.75	13	0	5	32.48	18	0	5	39.33	23	0	5	46.27
	10	5	19.32		10	5	25.96		10	5	32.72		10	5	39.57		10	5	46.50
	20	5	19.53		20	5	26.19		20	5	32.95		20	5	39.80		20	5	46.72
	30	5	19.75		30	5	26.42		30	5	33.17		30	5	40.02		30	5	46.96
	40	5	19.97		40	5	26.64		40	5	33.39		40	5	40.26		40	5	47.20
	50	5	20.19		50	5	26.86		50	5	33.63		50	5	40.48		50	5	47.43
4	0	5	20.42	9	0	5	27.09	14	0	5	33.86	19	0	5	40.71	24	0	5	47.66
	10	5	20.63		10	5	27.31		10	5	34.08		10	5	40.94		10	5	47.89
	20	5	20.86		20	5	27.53		20	5	34.31		20	5	41.17		20	5	48.13
	30	5	21.07		30	5	27.76		30	5	34.53		30	5	41.40		30	5	48.36
	40	5	21.30		40	5	27.99		40	5	34.76		40	5	41.63		40	5	48.59
	50	5	21.51		50	5	28.21		50	5	34.99		50	5	41.87		50	5	48.84
5	0	5	21.74	10	0	5	28.43	15	0	5	35.21	20	0	5	42.09	25	0	5	49.06

12⁰

′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″
25	0	5 49.06	32	0	5 58.98	39	0	6 9.08	46	0	6 19.37	53	0	6 29.85
	10	5 49.30		10	5 59.22		10	6 9.32		10	6 19.62		10	6 30.10
	20	5 49.53		20	5 59.45		20	6 9.57		20	6 19.87		20	6 30.35
	30	5 49.77		30	5 59.70		30	6 9.80		30	6 20.12		30	6 30.61
	40	5 50.00		40	5 59.94		40	6 10.05		40	6 20.37		40	6 30.85
	50	5 50.23		50	6 0.17		50	6 10.30		50	6 20.61		50	6 31.11
26	0	5 50.47	33	0	6 0.41	40	0	6 10.54	47	0	6 20.85	54	0	6 31.36
	10	5 50.70		10	6 0.66		10	6 10.78		10	6 21.10		10	6 31.62
	20	5 50.94		20	6 0.89		20	6 11.03		20	6 21.35		20	6 31.87
	30	5 51.17		30	6 1.13		30	6 11.27		30	6 21.60		30	6 32.12
	40	5 51.41		40	6 1.37		40	6 11.51		40	6 21.85		40	6 32.37
	50	5 51.64		50	6 1.61		50	6 11.76		50	6 22.09		50	6 32.63
27	0	5 51.88	34	0	6 1.85	41	0	6 12.00	48	0	6 22.35	55	0	6 32.88
	10	5 52.12		10	6 2.09		10	6 12.24		10	6 22.59		10	6 33.13
	20	5 52.35		20	6 2.33		20	6 12.49		20	6 22.84		20	6 33.38
	30	5 52.58		30	6 2.57		30	6 12.74		30	6 23.09		30	6 33.63
	40	5 52.82		40	6 2.80		40	6 12.98		40	6 23.35		40	6 33.89
	50	5 53.06		50	6 3.04		50	6 13.23		50	6 23.59		50	6 34 14
28	0	5 53.29	35	0	6 3.29	42	0	6 13.47	49	0	6 23.84	56	0	6 34.39
	10	5 53.53		10	6 3.53		10	6 13.71		10	6 24.09		10	6 34.65
	20	5 53.77		20	6 3.77		20	6 13.96		20	6 24.34		20	6 34.91
	30	5 54.00		30	6 4.01		30	6 14.20		30	6 24.59		30	6 35.16
	40	5 54.23		40	6 4.25		40	6 14.45		40	6 24.84		40	6 35.41
	50	5 54.47		50	6 4.48		50	6 14.69		50	6 25.08		50	6 35.67
29	0	5 54.71	36	0	6 4.73	43	0	6 14.94	50	0	6 25.34	57	0	6 35.91
	10	5 54.95		10	6 4.98		10	6 15.18		10	6 25.59		10	6 36.18
	20	5 55.18		20	6 5.22		20	6 15.43		20	6 25.84		20	6 36.44
	30	5 55.42		30	6 5.45		30	6 15.67		30	6 26.08		30	6 36.68
	40	5 55.65		40	6 5.69		40	6 15.93		40	6 26.34		40	6 36.94
	50	5 55.89		50	6 5.93		50	6 16.17		50	6 26.59		50	6 37.20
30	0	5 56.12	37	0	6 6.19	44	0	6 16.41	51	0	6 26.83	58	0	6 37.45
	10	5 56.37		10	6 6.42		10	6 16.66		10	6 27.08		10	6 37 70
	20	5 56.60		20	6 6.67		20	6 16.91		20	6 27 33		20	6 37.97
	30	5 56.84		30	6 6.90		30	6 17.16		30	6 27.59		30	6 38.21
	40	5 57.07		40	6 7.15		40	6 17.40		40	6 27.84		40	6 38.47
	50	5 57.32		50	6 7.39		50	6 17.65		50	6 28.09		50	6 38.73
31	0	5 57.56	38	0	6 7.62	45	0	6 17.89	52	0	6 28.35	59	0	6 38.98
	10	5 57.79		10	6 7.87		10	6 18.14		10	6 28.59		10	6 39.23
	20	5 58.03		20	6 8.11		20	6 18.39		20	6 28.85		20	6 39.49
	30	5 58.27		30	6 8.35		30	6 18.63		30	6 29.09		30	6 39.76
	40	5 58.51		40	6 8.59		40	6 18.87		40	6 29.35		40	6 40.00
	50	5 58.74		50	6 8.84		50	6 19.12		50	6 29.60		50	6 40.27
32	0	5 58.98	39	0	6 9.08	46	0	6 19.37	53	0	6 29.85	60	0	6 40.52

13⁰

′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″	′	″	Unproportionalität. ′ ″
0	0	6 40.52	1	0	6 42.05	2	0	6 43.60	3	0	6 45.15	4	0	6 46.71
	10	6 40.78		10	6 42.32		10	6 43.86		10	6 45.41		10	6 46.96
	20	6 41.03		20	6 42.57		20	6 44.12		20	6 45.67		20	6 47.23
	30	6 41.29		30	6 42.83		30	6 44.37		30	6 45.92		30	6 47.48
	40	6 41.54		40	6 43.09		40	6 44.63		40	6 46.18		40	6 47.73
	50	6 41.80		50	6 43.34		50	6 44.89		50	6 46.44		50	6 48.00
1	0	6 42.05	2	0	6 43.60	3	0	6 45.15	4	0	6 46.71	5	0	6 48.26

13°

′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″
5	0	6	48.26	14	0	7	2.43	23	0	7	16.93	32	0	7	31.77	41	0	7	46.92
	10	6	48.52		10	7	2.71		10	7	17.21		10	7	32.04		10	7	47.20
	20	6	48.77		20	7	2.97		20	7	17.48		20	7	32.32		20	7	47.49
	30	6	49.03		30	7	3.23		30	7	17.75		30	7	32.60		30	7	47.78
	40	6	49.30		40	7	3.49		40	7	18.02		40	7	32.88		40	7	48.06
	50	6	49.66		50	7	3.77		50	7	18.30		50	7	33.16		50	7	48.34
6	0	6	49.82	15	0	7	4.02	24	0	7	18.57	33	0	7	33.43	42	0	7	48.63
	10	6	50.08		10	7	4.29		10	7	18.84		10	7	33.71		10	7	48.92
	20	6	50.34		20	7	4.55		20	7	19.12		20	7	33.99		20	7	49.19
	30	6	50.59		30	7	4.83		30	7	19.38		30	7	34.27		30	7	49.48
	40	6	50.86		40	7	5.09		40	7	19.66		40	7	34.54		40	7	49.76
	50	6	51.12		50	7	5.36		50	7	19.92		50	7	34.83		50	7	50.06
7	0	6	51.39	16	0	7	5.63	25	0	7	20.20	34	0	7	35.10	43	0	7	50.34
	10	6	51.64		10	7	5.89		10	7	20.48		10	7	35.39		10	7	50.62
	20	6	51.90		20	7	6.16		20	7	20.75		20	7	35.66		20	7	50.91
	30	6	52.16		30	7	6.43		30	7	21.02		30	7	35.94		30	7	51.19
	40	6	52.43		40	7	6.70		40	7	21.29		40	7	36.22		40	7	51.48
	50	6	52.69		50	7	6.97		50	7	21.56		50	7	36.51		50	7	51.77
8	0	6	52.95	17	0	7	7.23	26	0	7	21.84	35	0	7	36.78	44	0	7	52.06
	10	6	53.20		10	7	7.49		10	7	22.11		10	7	37.07		10	7	52.33
	20	6	53.47		20	7	7.77		20	7	22.39		20	7	37.34		20	7	52.64
	30	6	53.73		30	7	8.04		30	7	22.66		30	7	37.62		30	7	52.91
	40	6	53.99		40	7	8.30		40	7	22.93		40	7	37.90		40	7	53.19
	50	6	54.26		50	7	8.57		50	7	23.22		50	7	38.18		50	7	53.48
9	0	6	54.52	18	0	7	8.85	27	0	7	23.48	36	0	7	38.46	45	0	7	53.77
	10	6	54.77		10	7	9.11		10	7	23.76		10	7	38.74		10	7	54.06
	20	6	55.03		20	7	9.38		20	7	24.03		20	7	39.02		20	7	54.34
	30	6	55.30		30	7	9.64		30	7	24.31		30	7	39.30		30	7	54.63
	40	6	55.57		40	7	9.91		40	7	24.58		40	7	39.58		40	7	54.92
	50	6	55.83		50	7	10.19		50	7	24.86		50	7	39.87		50	7	55.20
10	0	6	56.10	19	0	7	10.45	28	0	7	25.13	37	0	7	40.14	46	0	7	55.48
	10	6	56.36		10	7	10.71		10	7	25.41		10	7	40.43		10	7	55.78
	20	6	56.62		20	7	10.99		20	7	25.68		20	7	40.71		20	7	56.07
	30	6	56.88		30	7	11.25		30	7	25.96		30	7	40.99		30	7	56.35
	40	6	57.14		40	7	11.53		40	7	26.24		40	7	41.27		40	7	56.65
	50	6	57.41		50	7	11.80		50	7	26.51		50	7	41.55		50	7	56.93
11	0	6	57.67	20	0	7	12.07	29	0	7	26.79	38	0	7	41.84	47	0	7	57.21
	10	6	57.93		10	7	12.34		10	7	27.07		10	7	42.11		10	7	57.50
	20	6	58.20		20	7	12.61		20	7	27.33		20	7	42.39		20	7	57.79
	30	6	58.46		30	7	12.88		30	7	27.61		30	7	42.69		30	7	58.08
	40	6	58.73		40	7	13.14		40	7	27.89		40	7	42.96		40	7	58.37
	50	6	58.99		50	7	13.42		50	7	28.17		50	7	43.25		50	7	58.66
12	0	6	59.25	21	0	7	13.68	30	0	7	28.43	39	0	7	43.53	48	0	7	58.94
	10	6	59.52		10	7	13.96		10	7	28.72		10	7	43.81		10	7	59.24
	20	6	59.78		20	7	14.22		20	7	29.00		20	7	44.10		20	7	59.52
	30	7	0.04		30	7	14.49		30	7	29.27		30	7	44.38		30	7	59.81
	40	7	0.32		40	7	14.77		40	7	29.54		40	7	44.65		40	8	0.10
	50	7	0.58		50	7	15.03		50	7	29.82		50	7	44.93		50	8	0.39
13	0	7	0.85	22	0	7	15.31	31	0	7	30.10	40	0	7	45.22	49	0	8	0.68
	10	7	1.11		10	7	15.58		10	7	30.38		10	7	45.51		10	8	0.97
	20	7	1.37		20	7	15.85		20	7	30.66		20	7	45.80		20	8	1.26
	30	7	1.64		30	7	16.12		30	7	30.93		30	7	46.07		30	8	1.55
	40	7	1.90		40	7	16.38		40	7	31.21		40	7	46.36		40	8	1.84
	50	7	2.16		50	7	16.66		50	7	31.49		50	7	46.64		50	8	2.13
14	0	7	2.43	23	0	7	16.93	32	0	7	31.77	41	0	7	46.92	50	0	8	2.42

13⁰

′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″
50	0	8	2.42	52	0	8	5.91	54	0	8	9.41	56	0	8	12.93	58	0	8	16.48
	10	8	2.70		10	8	6.20		10	8	9.70		10	8	13.23		10	8	16.77
	20	8	3.00		20	8	6.49		20	8	10.00		20	8	13.52		20	8	17.18
	30	8	3.30		30	8	6.78		30	8	10.29		30	8	13.82		30	8	17.37
	40	8	3.58		40	8	7.07		40	8	10.59		40	8	14.11		40	8	17.67
	50	8	3.86		50	8	7.36		50	8	10.88		50	8	14.41		50	8	17.96
51	0	8	4.16	53	0	8	7.66	55	0	8	11.17	57	0	8	14.70	59	0	8	18.25
	10	8	4.45		10	8	7.94		10	8	11.47		10	8	15.00		10	8	18.55
	20	8	4.74		20	8	8.25		20	8	11.76		20	8	15.29		20	8	18.85
	30	8	5.03		30	8	8.53		30	8	12.06		30	8	15.59		30	8	19.14
	40	8	5.33		40	8	8.83		40	8	12.35		40	8	15.89		40	8	19.44
	50	8	5.61		50	8	9.12		50	8	12.64		50	8	16.17		50	8	19.74
52	0	8	5.91	54	0	8	9.41	56	0	8	12.93	58	0	8	16.48	60	0	8	20.02

14⁰

′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
0	0	8	20.02	6	0	8	30.80	12	0	8	41.73	18	0	8	52.80	24	0	9	4.04
	10	8	20.33		10	8	31.09		10	8	42.03		10	8	53.12		10	9	4.35
	20	8	20.63		20	8	31.40		20	8	42.34		20	8	53.42		20	9	4.66
	30	8	20.93		30	8	31.71		30	8	42.64		30	8	53.73		30	9	4.98
	40	8	21.22		40	8	32.01		40	8	42.95		40	8	54.04		40	9	5.29
	50	8	21.52		50	8	32.30		50	8	43.25		50	8	54.35		50	9	5.61
1	0	8	21.82	7	0	8	32.61	13	0	8	43.56	19	0	8	54.67	25	0	9	5.92
	10	8	22.11		10	8	32.91		10	8	43.86		10	8	54.98		10	9	6.23
	20	8	22.41		20	8	33.21		20	8	44.16		20	8	55.28		20	9	6.55
	30	8	22.71		30	8	33.51		30	8	44.48		30	8	55.59		30	9	6.87
	40	8	23.00		40	8	33.83		40	8	44.78		40	8	55.91		40	9	7.19
	50	8	23.31		50	8	34.12		50	8	45.09		50	8	56.22		50	9	7.49
2	0	8	23.60	8	0	8	34.43	14	0	8	45.40	20	0	8	56.53	26	0	9	7.81
	10	8	23.91		10	8	34.73		10	8	45.71		10	8	56.85		10	9	8.13
	20	8	24.21		20	8	35.03		20	8	46.01		20	8	57.15		20	9	8.44
	30	8	24.51		30	8	35.33		30	8	46.31		30	8	57.46		30	9	8.76
	40	8	24.80		40	8	35.64		40	8	46.63		40	8	57.78		40	9	9.07
	50	8	25.09		50	8	35.94		50	8	46.94		50	8	58.08		50	9	9.39
3	0	8	25.40	9	0	8	36.24	15	0	8	47.24	21	0	8	58.39	27	0	9	9.71
	10	8	25.70		10	8	36.55		10	8	47.56		10	8	58.71		10	9	10.02
	20	8	25.99		20	8	36.85		20	8	47.86		20	8	59.02		20	9	10.35
	30	8	26.30		30	8	37.15		30	8	48.16		30	8	59.33		30	9	10.65
	40	8	26.60		40	8	37.47		40	8	48.48		40	8	59.65		40	9	10.98
	50	8	26.90		50	8	37.76		50	8	48.78		50	8	59.95		50	9	11.29
4	0	8	27.20	10	0	8	38.07	16	0	8	49.09	22	0	9	0.27	28	0	9	11.61
	10	8	27.50		10	8	38.37		10	8	49.40		10	9	0.58		10	9	11.93
	20	8	27.80		20	8	38.67		20	8	49.71		20	9	0.89		20	9	12.24
	30	8	28.09		30	8	38.98		30	8	50.02		30	9	1.21		30	9	12.55
	40	8	28.40		40	8	39.28		40	8	50.32		40	9	1.53		40	9	12.88
	50	8	28.69		50	8	39.59		50	8	50.64		50	9	1.84		50	9	13.20
5	0	8	28.99	11	0	8	39.88	17	0	8	50.94	23	0	9	2.15	29	0	9	13.51
	10	8	29.30		10	8	40.20		10	8	51.25		10	9	2.46		10	9	13.82
	20	8	29.60		20	8	40.50		20	8	51.56		20	9	2.78		20	9	14.14
	30	8	29.90		30	8	40.81		30	8	51.87		30	9	3.09		30	9	14.47
	40	8	30.20		40	8	41.11		40	8	52.18		40	9	3.40		40	9	14.79
	50	8	30.50		50	8	41.42		50	8	52.49		50	9	3.72		50	9	15.11
6	0	8	30.80	12	0	8	41.73	18	0	8	52.80	24	0	9	4.04	30	0	9	15.43

14°

'	"	Unproportionalität '	Unproportionalität "	'	"	Unproportionalität '	Unproportionalität "	'	"	Unproportionalität '	Unproportionalität "	'	"	Unproportionalität '	Unproportionalität "	'	"	Unproportionalität '	Unproportionalität "
30	0	9	15.43	36	0	9	26.96	42	0	9	38.67	48	0	9	50.54	54	0	10	2.56
	10	9	15.75		10	9	27.29		10	9	39.00		10	9	50.87		10	10	2.89
	20	9	16.06		20	9	27.61		20	9	39.33		20	9	51.20		20	10	3.23
	30	9	16.38		30	9	27.93		30	9	39.66		30	9	51.53		30	10	3.57
	40	9	16.69		40	9	28.25		40	9	39.98		40	9	51.87		40	10	3.90
	50	9	17.01		50	9	28.58		50	9	40.31		50	9	52.19		50	10	4.24
31	0	9	17.33	37	0	9	28.90	43	0	9	40.64	49	0	9	52.52	55	0	10	4.57
	10	9	17.65		10	9	29.23		10	9	40.96		10	9	52.87		10	10	4.91
	20	9	17.98		20	9	29.55		20	9	41.29		20	9	53.20		20	10	5.26
	30	9	18.30		30	9	29.88		30	9	41.63		30	9	53.52		30	10	5.59
	40	9	18.61		40	9	30.20		40	9	41.95		40	9	53.87		40	10	5.93
	50	9	18.93		50	9	30.53		50	9	42.28		50	9	54.20		50	10	6.26
32	0	9	19.26	38	0	9	30.85	44	0	9	42.60	50	0	9	54.52	56	0	10	6.61
	10	9	19.57		10	9	31.18		10	9	42.93		10	9	54.85		10	10	6.94
	20	9	19.88		20	9	31.51		20	9	43.27		20	9	55.20		20	10	7.28
	30	9	20.21		30	9	31.83		30	9	43.60		30	9	55.52		30	10	7.62
	40	9	20.54		40	9	32.15		40	9	43.93		40	9	55.87		40	10	7.95
	50	9	20.86		50	9	32.47		50	9	44.26		50	9	56.19		50	10	8.29
33	0	9	21.17	39	0	9	32.81	45	0	9	44.59	51	0	9	56.52	57	0	10	8.63
	10	9	21.49		10	9	33.12		10	9	44.91		10	9	56.87		10	10	8.96
	20	9	21.81		20	9	33.45		20	9	45.24		20	9	57.20		20	10	9.31
	30	9	22.13		30	9	33.77		30	9	45.57		30	9	57.52		30	10	9.65
	40	9	22.46		40	9	34.10		40	9	45.90		40	9	57.87		40	10	9.99
	50	9	22.87		50	9	34.42		50	9	46.23		50	9	58.20		50	10	10.33
34	0	9	23.11	40	0	9	34.75	46	0	9	46.56	52	0	9	58.52	58	0	10	10.66
	10	9	23.43		10	9	35.07		10	9	46.89		10	9	58.87		10	10	11.01
	20	9	23.75		20	9	35.40		20	9	47.22		20	9	59.20		20	10	11.34
	30	9	24.07		30	9	35.73		30	9	47.56		30	9	59.54		30	10	11.68
	40	9	24.39		40	9	36.05		40	9	47.88		40	9	59.88		40	10	12.02
	50	9	24.71		50	9	36.37		50	9	48.22		50	10	0.21		50	10	12.37
35	0	9	25.02	41	0	9	36.71	47	0	9	48.54	53	0	10	0.55	59	0	10	12.70
	10	9	25.36		10	9	37.04		10	9	48.88		10	10	0.87		10	10	13.05
	20	9	25.67		20	9	37.36		20	9	49.21		20	10	1.22		20	10	13.38
	30	9	26.00		30	9	37.69		30	9	49.54		30	10	1.55		30	10	13.73
	40	9	26.31		40	9	38.01		40	9	49.87		40	10	1.87		40	10	14.07
	50	9	26.64		50	9	38.34		50	9	50.20		50	10	2.22		50	10	14.41
36	0	9	26.96	42	0	9	38.67	48	0	9	50.54	54	0	10	2.56	60	0	10	14.74

15°

'	"	'	"	'	"	'	"	'	"	'	"	'	"	'	"	'	"	'	"
0	0	10	14.74	2	0	10	18.84	4	0	10	22.95	6	0	10	27.10	8	0	10	31.24
	10	10	15.09		10	10	19.19		10	10	23.30		10	10	27.43		10	10	31.59
	20	10	15.42		20	10	19.53		20	10	23.64		20	10	27.78		20	10	31.95
	30	10	15.77		30	10	19.87		30	10	23.99		30	10	28.12		30	10	32.28
	40	10	16.11		40	10	20.22		40	10	24.33		40	10	28.48		40	10	32.63
	50	10	16.46		50	10	20.56		50	10	24.68		50	10	28.82		50	10	32.98
1	0	10	16.79	3	0	10	20.90	5	0	10	25.02	7	0	10	29.16	9	0	10	33.33
	10	10	17.14		10	10	21.23		10	10	25.37		10	10	29.51		10	10	33.68
	20	10	17.47		20	10	21.58		20	10	25.71		20	10	29.86		20	10	34.03
	30	10	17.82		30	10	21.93		30	10	26.05		30	10	30.21		30	10	34.37
	40	10	18.15		40	10	22.27		40	10	26.41		40	10	30.56		40	10	34.71
	50	10	18.49		50	10	22.62		50	10	26.75		50	10	30.90		50	10	35.06
2	0	10	18.84	4	0	10	22.95	6	0	10	27.10	8	0	10	31.24	10	0	10	35.42

15°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
10	0	10 35.42	19	0	10 54.41	28	0	11 13.78	37	0	11 33.53	46	0	11 53.64
	10	10 35.77		10	10 54.77		10	11 14.14		10	11 33.90		10	11 54.03
	20	10 36.11		20	10 55.11		20	11 14.50		20	11 34.26		20	11 54.40
	30	10 36.46		30	10 55.47		30	11 14.87		30	11 34.64		30	11 54.78
	40	10 36.81		40	10 55.83		40	11 15.23		40	11 35.00		40	11 55.16
	50	10 37.16		50	10 56.19		50	11 15.59		50	11 35.37		50	11 55.54
11	0	10 37.51	20	0	10 56.54	29	0	11 15.96	38	0	11 35.74	47	0	11 55.91
	10	10 37.85		10	10 56.90		10	11 16.32		10	11 36.10		10	11 56.29
	20	10 38.20		20	10 57.25		20	11 16.68		20	11 36.47		20	11 56.66
	30	10 38.56		30	10 57.61		30	11 17.04		30	11 36.85		30	11 57.04
	40	10 38.91		40	10 57.96		40	11 17.40		40	11 37.22		40	11 57.42
	50	10 39.25		50	10 58.32		50	11 17.77		50	11 37.59		50	11 57.79
12	0	10 39.60	21	0	10 58.69	30	0	11 18.14	39	0	11 37.96	48	0	11 58.18
	10	10 39.95		10	10 59.04		10	11 18.50		10	11 38.33		10	11 58.56
	20	10 40.31		20	10 59.39		20	11 18.86		20	11 38.71		20	11 58.93
	30	10 40.65		30	10 59.75		30	11 19.23		30	11 39.08		30	11 59.31
	40	10 41.01		40	11 0.11		40	11 19.59		40	11 39.44		40	11 59.68
	50	10 41.35		50	11 0.46		50	11 19.95		50	11 39.82		50	12 0.07
13	0	10 41.70	22	0	11 0.82	31	0	11 20.32	40	0	11 40.19	49	0	12 0.44
	10	10 42.05		10	11 1.18		10	11 20.68		10	11 40.56		10	12 0.82
	20	10 42.40		20	11 1.54		20	11 21.05		20	11 40.94		20	12 1.19
	30	10 42.76		30	11 1.89		30	11 21.42		30	11 41.31		30	12 1.58
	40	10 43.11		40	11 2.25		40	11 21.78		40	11 41.68		40	12 1.96
	50	10 43.46		50	11 2.61		50	11 22.14		50	11 42.05		50	12 2.34
14	0	10 43.81	23	0	11 2.96	32	0	11 22.50	41	0	11 42.42	50	0	12 2.72
	10	10 44.16		10	11 3.33		10	11 22.87		10	11 42.79		10	12 3.09
	20	10 44.51		20	11 3.70		20	11 23.24		20	11 43.17		20	12 3.47
	30	10 44.87		30	11 4.05		30	11 23.59		30	11 43.54		30	12 3.86
	40	10 45.21		40	11 4.41		40	11 23.96		40	11 43.91		40	12 4.23
	50	10 45.56		50	11 4.76		50	11 24.34		50	11 44.28		50	12 4.61
15	0	10 45.92	24	0	11 5.13	33	0	11 24.71	42	0	11 44.65	51	0	12 5.00
	10	10 46.27		10	11 5.49		10	11 25.06		10	11 45.03		10	12 5.38
	20	10 46.63		20	11 5.84		20	11 25.44		20	11 45.40		20	12 5.76
	30	10 46.98		30	11 6.20		30	11 25.79		30	11 45.77		30	12 6.13
	40	10 47.33		40	11 6.56		40	11 26.16		40	11 46.15		40	12 6.51
	50	10 47.68		50	11 6.92		50	11 26.53		50	11 46.52		50	12 6.90
16	0	10 48.04	25	0	11 7.28	34	0	11 26.90	43	0	11 46.90	52	0	12 7.27
	10	10 48.40		10	11 7.65		10	11 27.27		10	11 47.27		10	12 7.66
	20	10 48.74		20	11 8.00		20	11 27.63		20	11 47.65		20	12 8.04
	30	10 49.09		30	11 8.35		30	11 28.00		30	11 48.01		30	12 8.43
	40	10 49.45		40	11 8.72		40	11 28.36		40	11 48.39		40	12 8.79
	50	10 49.80		50	11 9.08		50	11 28.73		50	11 48.77		50	12 9.18
17	0	10 50.15	26	0	11 9.43	35	0	11 29.10	44	0	11 49.14	53	0	12 9.56
	10	10 50.51		10	11 9.80		10	11 29.47		10	11 49.52		10	12 9.95
	20	10 50.86		20	11 10.15		20	11 29.83		20	11 49.90		20	12 10.32
	30	10 51.21		30	11 10.52		30	11 30.21		30	11 50.27		30	12 10.71
	40	10 51.57		40	11 10.89		40	11 30.57		40	11 50.64		40	12 11.09
	50	10 51.93		50	11 11.25		50	11 30.94		50	11 51.01		50	12 11.48
18	0	10 52.28	27	0	11 11.61	36	0	11 31.31	45	0	11 51.39	54	0	12 11.86
	10	10 52.64		10	11 11.96		10	11 31.68		10	11 51.77		10	12 12.25
	20	10 53.00		20	11 12.33		20	11 32.05		20	11 52.14		20	12 12.62
	30	10 53.34		30	11 12.68		30	11 32.41		30	11 52.51		30	12 13.01
	40	10 53.70		40	11 13.05		40	11 32.79		40	11 52.90		40	12 13.39
	50	10 54.05		50	11 13.42		50	11 33.15		50	11 53.27		50	12 13.78
19	0	10 54.41	28	0	11 13.78	37	0	11 33.53	46	0	11 53.64	55	0	12 14.16

15°

		Unproportionalität				Unproportionalität				Unproportionalität				Unproportionalität				Unproportionalität	
′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
55	0	12	14.16	56	0	12	16.46	57	0	12	18.77	58	0	12	21.08	59	0	12	23.39
	10	12	14.54		10	12	16.84		10	12	19.14		10	12	21.46		10	12	23.78
	20	12	14.92		20	12	17.22		20	12	19.54		20	12	21.86		20	12	24.17
	30	12	15.31		30	12	17.61		30	12	19.92		30	12	22.23		30	12	24.56
	40	12	15.69		40	12	18.00		40	12	20.30		40	12	22.62		40	12	24.95
	50	12	16.07		50	12	18.38		50	12	20.69		50	12	23.01		50	12	25.34
56	0	12	16.46	57	0	12	18.77	58	0	12	21.08	59	0	12	23.39	60	0	12	25.71

16°

′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
0	0	12	25.71	7	0	12	42.11	14	0	12	58.73	21	0	13	15.59	28	0	13	32.70
	10	12	26.11		10	12	42.50		10	12	59.13		10	13	16.00		10	13	33.12
	20	12	26.49		20	12	42.89		20	12	59.53		20	13	16.40		20	13	33.51
	30	12	26.88		30	12	43.29		30	12	59.92		30	13	16.81		30	13	33.93
	40	12	27.26		40	12	43.68		40	13	0.33		40	13	17.23		40	13	34.34
	50	12	27.66		50	12	44.08		50	13	0.72		50	13	17.61		50	13	34.76
1	0	12	28.04	8	0	12	44.47	15	0	13	1.13	22	0	13	18.03	29	0	13	35.16
	10	12	28.44		10	12	44.87		10	13	1.52		10	13	18.44		10	13	35.58
	20	12	28.82		20	12	45.25		20	13	1.92		20	13	18.84		20	13	35.99
	30	12	29.21		30	12	45.66		30	13	2.32		30	13	19.24		30	13	36.41
	40	12	29.60		40	12	46.04		40	13	2.72		40	13	19.65		40	13	36.81
	50	12	29.99		50	12	46.44		50	13	3.12		50	13	20.05		50	13	37.23
2	0	12	30.38	9	0	12	46.84	16	0	13	3.53	23	0	13	20.46	30	0	13	37.63
	10	12	30.76		10	12	47.23		10	13	3.92		10	13	20.87		10	13	38.04
	20	12	31.14		20	12	47.63		20	13	4.33		20	13	21.27		20	13	38.46
	30	12	31.54		30	12	48.01		30	13	4.73		30	13	21.68		30	13	38.86
	40	12	31.93		40	12	48.41		40	13	5.12		40	13	22.09		40	13	39.28
	50	12	32.33		50	12	48.81		50	13	5.52		50	13	22.49		50	13	39.69
3	0	12	32.71	10	0	12	49.21	17	0	13	5.93	24	0	13	22.89	31	0	13	40.11
	10	12	33.11		10	12	49.59		10	13	6.33		10	13	23.31		10	13	40.51
	20	12	33.49		20	12	49.99		20	13	6.73		20	13	23.72		20	13	40.95
	30	12	33.88		30	12	50.39		30	13	7.13		30	13	24.12		30	13	41.35
	40	12	34.26		40	12	50.78		40	13	7.53		40	13	24.53		40	13	41.76
	50	12	34.66		50	12	51.18		50	13	7.93		50	13	24.93		50	13	42.18
4	0	12	35.05	11	0	12	51.58	18	0	13	8.35	25	0	13	25.34	32	0	13	42.58
	10	12	35.45		10	12	51.97		10	13	8.75		10	13	25.76		10	13	43.00
	20	12	35.84		20	12	52.37		20	13	9.15		20	13	26.15		20	13	43.42
	30	12	36.22		30	12	52.76		30	13	9.55		30	13	26.57		30	13	43.82
	40	12	36.62		40	12	53.16		40	13	9.95		40	13	26.97		40	13	44.24
	50	12	37.00		50	12	53.56		50	13	10.35		50	13	27.39		50	13	44.65
5	0	12	37.39	12	0	12	53.95	19	0	13	10.75	26	0	13	27.79	33	0	13	45.07
	10	12	37.79		10	12	54.36		10	13	11.16		10	13	28.20		10	13	45.48
	20	12	38.18		20	12	54.75		20	13	11.56		20	13	28.61		20	13	45.89
	30	12	38.58		30	12	55.15		30	13	11.96		30	13	29.01		30	13	46.31
	40	12	38.96		40	12	55.55		40	13	12.36		40	13	29.43		40	13	46.73
	50	12	39.36		50	12	55.93		50	13	12.76		50	13	29.83		50	13	47.15
6	0	12	39.75	13	0	12	56.33	20	0	13	13.17	27	0	13	30.24	34	0	13	47.55
	10	12	40.13		10	12	56.75		10	13	13.59		10	13	30.65		10	13	47.97
	20	12	40.54		20	12	57.14		20	13	13.97		20	13	31.07		20	13	48.39
	30	12	40.93		30	12	57.53		30	13	14.39		30	13	31.47		30	13	48.80
	40	12	41.33		40	12	57.93		40	13	14.79		40	13	31.89		40	13	49.22
	50	12	41.71		50	12	58.33		50	13	15.19		50	13	32.29		50	13	49.63
7	0	12	42.11	14	0	12	58.73	21	0	13	15.59	28	0	13	32.70	35	0	13	50.04

16°

′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″
35	0	13	50.04	40	0	14	2.59	45	0	14	15.25	50	0	14	28.05	55	0	14	40.97
	10	13	50.46		10	14	3.00		10	14	15.68		10	14	28.48		10	14	41.40
	20	13	50.89		20	14	3.42		20	14	16.11		20	14	28.90		20	14	41.84
	30	13	51.30		30	14	3.85		30	14	16.52		30	14	29.34		30	14	42.26
	40	13	51.72		40	14	4.27		40	14	16.96		40	14	29.76		40	14	42.70
	50	13	52.13		50	14	4.70		50	14	17.38		50	14	30.19		50	14	43.12
36	0	13	52.54	41	0	14	5.11	46	0	14	17 81	51	0	14	30.63	56	0	14	43.57
	10	13	52.96		10	14	5.54		10	14	18.22		10	14	31.06		10	14	44.00
	20	13	53.38		20	14	5.96		20	14	18.66		20	14	31.49		20	14	44.44
	30	13	53.80		30	14	6.38		30	14	19.08		30	14	31.92		30	14	44.86
	40	13	54.22		40	14	6.80		40	14	19.51		40	14	32.34		40	14	45.30
	50	13	54.63		50	14	7.22		50	14	19.93		50	14	32.77		50	14	45.74
37	0	13	55.05	42	0	14	7.64	47	0	14	20.36	52	0	14	33.21	57	0	14	46.17
	10	13	55.47		10	14	8.05		10	14	20.78		10	14	33.63		10	14	46.61
	20	13	55.89		20	14	8.49		20	14	21.21		20	14	34.06		20	14	47.04
	30	13	56.31		30	14	8.90		30	14	21.63		30	14	34.49		30	14	47.47
	40	13	56.73		40	14	9.33		40	14	22.07		40	14	34.93		40	14	47.90
	50	13	57.15		50	14	9.76		50	14	22.49		50	14	35.36		50	14	48.35
38	0	13	57.56	43	0	14	10.16	48	0	14	22.92	53	0	14	35.78	58	0	14	48.78
	10	13	57.97		10	14	10.59		10	14	23.34		10	14	36.21		10	14	49.22
	20	13	58.40		20	14	11.01		20	14	23.77		20	14	36.64		20	14	49.64
	30	13	58.81		30	14	11.45		30	14	24.19		30	14	37.07		30	14	50.10
	40	13	59.22		40	14	11.86		40	14	24.63		40	14	37.51		40	14	50.53
	50	13	59.66		50	14	12.30		50	14	25.04		50	14	37.94		50	14	50.96
39	0	14	0.08	44	0	14	12.71	49	0	14	25.48	54	0	14	38.38	59	0	14	51.39
	10	14	0.50		10	14	13.14		10	14	25.90		10	14	38.81		10	14	51.83
	20	14	0.92		20	14	13.56		20	14	26.34		20	14	39.24		20	14	52.26
	30	14	1.33		30	14	13.99		30	14	26.76		30	14	39.67		30	14	52.69
	40	14	1.74		40	14	14.41		40	14	27.19		40	14	40.11		40	14	53.19
	50	14	2.18		50	14	14.84		50	14	27.62		50	14	40.53		50	14	53.57
40	0	14	2.59	45	0	14	15.25	50	0	14	28.05	55	0	14	40.97	60	0	14	54.01

17°

′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
0	0	14	54.01	3	0	15	1.90	6	0	15	9.83	9	0	15	17.82	12	0	15	25.85
	10	14	54.44		10	15	2.33		10	15	10.28		10	15	18.27		10	15	26.28
	20	14	54.87		20	15	2.78		20	15	10.71		20	15	18.69		20	15	26.73
	30	14	55.32		30	15	3.22		30	15	11.15		30	15	19.14		30	15	27.19
	40	14	55.76		40	15	3.65		40	15	11.60		40	15	19.60		40	15	27.63
	50	14	56.21		50	15	4.10		50	15	12.04		50	15	20.04		50	15	28.08
1	0	14	56.64	4	0	15	4.53	7	0	15	12.49	10	0	15	20.48	13	0	15	28.54
	10	14	57.08		10	15	4.99		10	15	12.93		10	15	20.93		10	15	28.97
	20	14	57.51		20	15	5.42		20	15	13.38		20	15	21.38		20	15	29.42
	30	14	57.94		30	15	5.87		30	15	13.82		30	15	21.82		30	15	29.87
	40	14	58.39		40	15	6.31		40	15	14.26		40	15	22.27		40	15	30.82
	50	14	58.82		50	15	6.75		50	15	14.71		50	15	22.72		50	15	30.78
2	0	14	59.26	5	0	15	7.19	8	0	15	15.15	11	0	15	23.17	14	0	15	31.22
	10	14	59.71		10	15	7.63		10	15	15.60		10	15	23.61		10	15	31.66
	20	15	0.15		20	15	8.07		20	15	16.04		20	15	24.06		20	15	32.11
	30	15	0.58		30	15	8.51		30	15	16.48		30	15	24.51		30	15	32.56
	40	15	1.03		40	15	8.94		40	15	16.93		40	15	24.94		40	15	33.03
	50	15	1.46		50	15	9.40		50	15	17.37		50	15	25.39		50	15	33.46
3	0	15	1.90	6	0	15	9.83	9	0	15	17.82	12	0	15	25.85	15	0	15	33.92

17°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
15	0	15 33.92	24	0	15 58.41	33	0	16 23.33	42	0	16 48.69	51	0	17 14.48
	10	15 34.37		10	15 58.87		10	16 23.80		10	16 49.16		10	17 14.96
	20	15 34.82		20	15 59.33		20	16 24.27		20	16 49.64		20	17 15.44
	30	15 35.25		30	15 59.79		30	16 24.73		30	16 50.10		30	17 15.92
	40	15 35.72		40	16 0.24		40	16 25.20		40	16 50.58		40	17 16.40
	50	15 36.17		50	16 0.70		50	16 25.67		50	16 51.06		50	17 16.88
16	0	15 36.62	25	0	16 1.16	34	0	16 26.14	43	0	16 51.52	52	0	17 17.36
	10	15 37.06		10	16 1.61		10	16 26.60		10	16 52.00		10	17 17.84
	20	15 37.52		20	16 2.07		20	16 27.07		20	16 52.46		20	17 18.33
	30	15 37.97		30	16 2.53		30	16 27.54		30	16 52.96		30	17 18.81
	40	15 38.42		50	16 3.00		40	16 28 00		40	16 53.42		40	17 19.29
	50	15 38.87		50	16 3.46		50	16 28.47		50	16 53.90		50	17 19.77
17	0	15 39.31	26	0	16 3.91	35	0	16 28.93	44	0	16 54.38	53	0	17 20.25
	10	15 39.77		10	16 4.37		10	16 29.40		10	16 54.84		10	17 20.73
	20	15 40.23		20	16 4.84		20	16 29.86		20	16 55.32		20	17 21.21
	30	15 40.68		30	16 5.29		30	16 30.33		30	16 55.80		30	17 21.70
	40	15 41.14		40	16 5.75		40	16 30.80		40	16 56.28		40	17 22.18
	50	15 41.58		50	16 6.21		50	16 31.26		50	16 56 75		50	17 22.67
18	0	15 42.03	27	0	16 6.67	36	0	16 31.74	45	0	16 57.23	54	0	17 23.16
	10	15 42.48		10	16 7.14		10	16 32.20		10	16 57.71		10	17 23.64
	20	15 42.94		20	16 7.60		20	16 32.67		20	16 58.19		20	17 24.13
	30	15 43.39		30	16 8.04		30	16 33.14		30	16 58.67		30	17 24.61
	40	15 43.85		40	16 8.51		40	16 33.60		40	16 59.13		40	17 25.10
	50	15 44.30		50	16 8.99		50	16 34.07		50	16 59.61		50	17 25.58
19	0	15 44.65	28	0	16 9.44	37	0	16 34.55	46	0	17 0.09	55	0	17 26.07
	10	15 45.20		10	16 9.89		10	16 35.01		10	17 0.57		10	17 26.56
	20	15 45.66		20	16 10.36		20	16 35.49		20	17 1.04		20	17 27.04
	30	15 46.11		30	16 10.83		30	16 35.96		30	17 1.52		30	17 27.53
	40	15 46.56		40	16 11.29		40	16 36.43		40	17 2.00		40	17 28.01
	50	15 47.01		50	16 11.74		50	16 36.90		50	17 2 48		50	17 28.50
20	0	15 47.48	29	0	16 12.21	38	0	16 37.37	47	0	17 2.96	56	0	17 28.99
	10	15 47.93		10	16 12.67		10	16 37.83		10	17 3.43		10	17 29.47
	20	15 48.39		20	16 13.13		20	16 38.30		20	17 3.90		20	17 29.96
	30	15 48.83		30	16 13.60		30	16 38.77		30	17 4.38		30	17 30.44
	40	15 49.30		40	16 14.06		40	16 39.25		40	17 4.87		40	17 30.93
	50	15 49.75		50	16 14.52		50	16 39.71		50	17 5.34		50	17 31.42
21	0	15 50.20	30	0	16 14.99	39	0	16 40.19	48	0	17 5.82	57	0	17 31.90
	10	15 50.66		10	16 15.44		10	16 40.67		10	17 6.30		10	17 32.39
	20	15 51.11		20	16 15.91		20	16 41.13		20	17 6.78		20	17 32.87
	30	15 51.57		30	16 16.37		30	16 41.61		30	17 7.26		30	17 33.36
	40	15 52.01		40	16 16.84		40	16 42.07		40	17 7.74		40	17 33.84
	50	15 52.48		50	16 17.29		50	16 42.54		50	17 8.22		50	17 34.33
22	0	15 52.93	31	0	16 17.76	40	0	16 43.01	49	0	17 8.70	58	0	17 34.82
	10	15 53.39		10	16 18.22		10	16 43.49		10	17 9.19		10	17 35.30
	20	15 53.84		20	16 18.69		20	16 43.96		20	17 9.67		20	17 35.79
	30	15 54.30		30	16 19.14		30	16 44.43		30	17 10.15		30	17 36.27
	40	15 54.76		40	16 19.61		40	16 44.90		40	17 10.63		40	17 36.76
	50	15 55.23		50	16 20.09		50	16 45.38		50	17 11.11		50	17 37.25
23	0	15 55.67	32	0	16 20.55	41	0	16 45.84	50	0	17 11 59	59	0	17 37.74
	10	15 56.13		10	16 21.00		10	16 46.32		10	17 12.07		10	17 38.23
	20	15 56.59		20	16 21.47		20	16 46.80		20	17 12.55		20	17 38.72
	30	15 57.04		30	16 21.94		30	16 47.27		30	17 13.03		30	17 39.21
	40	15 57.51		40	16 22.41		40	16 47.74		40	17 13.51		40	17 39.70
	50	15 57.96		50	16 22.87		50	16 48.22		50	17 14.00		50	17 40.19
24	0	15 58.41	33	0	16 23.33	42	0	16 48.69	51	0	17 14.48	60	0	17 40.68

18°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
0	0	17 40.68	9	0	18 7.32	18	0	18 34.43	27	0	19 1.96	36	0	19 29.92
	10	17 41.17		10	18 7.82		10	18 34.93		10	19 2.47		10	19 30.45
	20	17 41.67		20	18 8.32		20	18 35.44		20	19 2.99		20	19 30.97
	30	17 42.16		30	18 8.82		30	18 35.94		30	19 3.50		30	19 31.49
	40	17 42.65		40	18 9.32		40	18 36.45		40	19 4.02		40	19 32.02
	50	17 43.14		50	18 9.81		50	18 36.95		50	19 4.53		50	19 32.54
1	0	17 43.63	10	0	18 10.31	19	0	18 37.46	28	0	19 5.05	37	0	19 33.07
	10	17 44.12		10	18 10.81		10	18 37.96		10	19 5.56		10	19 33.59
	20	17 44.61		20	18 11.31		20	18 38.47		20	19 6.08		20	19 34.12
	30	17 45.10		30	18 11.82		30	18 38.97		30	19 6.59		30	19 34.64
	40	17 45.59		40	18 12.32		40	18 39.48		40	19 7.11		40	19 35.17
	50	17 46.08		50	18 12.82		50	18 39.98		50	19 7.62		50	19 35.69
2	0	17 46.57	11	0	18 13.32	20	0	18 40.49	29	0	19 8.14	38	0	19 36.22
	10	17 47.06		10	18 13.82		10	18 41.00		10	19 8.65		10	19 36.74
	20	17 47.55		20	18 14.32		20	18 41.51		20	19 9.17		20	19 37.27
	30	17 48.04		30	18 14.82		30	18 42.02		30	19 9.68		30	19 37.79
	40	17 48.53		40	18 15.32		40	18 42.53		40	19 10.20		40	19 38.32
	50	17 49.02		50	18 15.82		50	18 43.04		50	19 10.71		50	19 38.84
3	0	17 49.51	12	0	18 16.32	21	0	18 43.55	30	0	19 11.23	39	0	19 39.37
	10	17 50.01		10	18 16.82		10	18 44.06		10	19 11.74		10	19 39.89
	20	17 50.50		20	18 17.32		20	18 44.57		20	19 12.26		20	19 40.42
	30	17 50.99		30	18 17.82		30	18 45.08		30	19 12.77		30	19 40.94
	40	17 51.48		40	18 18.32		40	18 45.59		40	19 13.29		40	19 41.47
	50	17 51.97		50	18 18.82		50	18 46.10		50	19 13.81		50	19 41.99
4	0	17 52.46	13	0	18 19.32	22	0	18 46.61	31	0	19 14.33	40	0	19 42.52
	10	17 52.95		10	18 19.82		10	18 47.12		10	19 14.85		10	19 43.04
	20	17 53.45		20	18 20.32		20	18 47.63		20	19 15.36		20	19 43.56
	30	17 53.95		30	18 20.82		30	18 48.14		30	19 15.88		30	19 44.09
	40	17 54.44		40	18 21.32		40	18 48.65		40	19 16.40		40	19 44.61
	50	17 54.94		50	18 21.82		50	18 49.16		50	19 16.92		50	19 45.14
5	0	17 55.43	14	0	18 22.32	23	0	18 49.67	32	0	19 17.44	41	0	19 45.66
	10	17 55.93		10	18 22.82		10	18 50.18		10	19 17.96		10	19 46.19
	20	17 56.42		20	18 23.32		20	18 50.69		20	19 18.48		20	19 46.71
	30	17 56.92		30	18 23.82		30	18 51.20		30	19 19.00		30	19 47.24
	40	17 57.41		40	18 24.32		40	18 51.71		40	19 19.52		40	19 47.77
	50	17 57.91		50	18 24.83		50	18 52.22		50	19 20.04		50	19 48.30
6	0	17 58.40	15	0	18 25.33	24	0	18 52.73	33	0	19 20.56	42	0	19 48.83
	10	17 58.90		10	18 25.84		10	18 53.24		10	19 21.08		10	19 49.36
	20	17 59.40		20	18 26.34		20	18 53.75		20	19 21.60		20	19 49.89
	30	17 59.89		30	18 26.85		30	18 54.26		30	19 22.12		30	19 50.42
	40	18 0.39		40	18 27.35		40	18 54.77		40	19 22.64		40	19 50.95
	50	18 0.88		50	18 27.86		50	18 55.28		50	19 23.16		50	19 51.48
7	0	18 1.38	16	0	18 28.36	25	0	18 55.79	34	0	19 23.68	43	0	19 52.01
	10	18 1.87		10	18 28.87		10	18 56.30		10	19 24.20		10	19 52.54
	20	18 2.37		20	18 29.37		20	18 56.81		20	19 24.72		20	19 53.07
	30	18 2.86		30	18 29.88		30	18 57.32		30	19 25.24		30	19 53.60
	40	18 3.36		40	18 30.38		40	18 57.84		40	19 25.76		40	19 54.13
	50	18 3.85		50	18 30.89		50	18 58.35		50	19 26.28		50	19 54.66
8	0	18 4.35	17	0	18 31.39	26	0	18 58.87	35	0	19 26.80	44	0	19 55.19
	10	18 4.85		10	18 31.90		10	18 59.38		10	19 27.32		10	19 55.72
	20	18 5.34		20	18 32.40		20	18 59.90		20	19 27.84		20	19 56.25
	30	18 5.84		30	18 32.91		30	19 0.41		30	19 28.36		30	19 56.78
	40	18 6.33		40	18 33.42		40	19 0.93		40	19 28.88		40	19 57.31
	50	18 6.83		50	18 33.92		50	19 1.44		50	19 29.40		50	19 57.84
9	0	18 7.32	18	0	18 34.43	27	0	19 1.96	36	0	19 29.92	45	0	19 58.37

18°

		Unproportionalität.				Unproportionalität.				Unproportionalität.				Unproportionalität.				Unproportionalität.	
′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
45	0	19	58.37	48	0	20	7.94	51	0	20	17.57	54	0	20	27.26	57	0	20	36.97
	10	19	58.90		10	20	8.48		10	20	18.11		10	20	27.80		10	20	37.51
	20	19	59.43		20	20	9.01		20	20	18.64		20	20	28.34		20	20	38.05
	30	19	59.96		30	20	9.55		30	20	19.18		30	20	28.88		30	20	38.60
	40	20	0.49		40	20	10.08		40	20	19.71		40	20	29.42		40	20	39.14
	50	20	1.02		50	20	10.62		50	20	20.24		50	20	29.96		50	20	39.69
46	0	20	1.55	49	0	20	11.15	52	0	20	20.78	55	0	20	30.49	58	0	20	40.23
	10	20	2.08		10	20	11.69		10	20	21.32		10	20	31.03		10	20	40.78
	20	20	2.61		20	20	12.22		20	20	21.86		20	20	31.57		20	20	41.32
	30	20	3.14		30	20	12.76		30	20	22.40		30	20	32.11		30	20	41.86
	40	20	3.67		40	20	13.29		40	20	22.94		40	20	32.65		40	20	42.41
	50	20	4.20		50	20	13.83		50	20	23.48		50	20	33.19		50	20	42.95
47	0	20	4.74	50	0	20	14.36	53	0	20	24.02	56	0	20	33.73	59	0	20	43.50
	10	20	5.27		10	20	14.90		10	20	24.56		10	20	34.27		10	20	44.04
	20	20	5.81		20	20	15.43		20	20	25.10		20	20	34.81		20	20	44.59
	30	20	6.34		30	20	15.97		30	20	25.64		30	20	35.35		30	20	45.13
	40	20	6.87		40	20	16.50		40	20	26.18		40	20	35.89		40	20	45.68
	50	20	7.41		50	20	17.04		50	20	26.72		50	20	36.43		50	20	46.22
48	0	20	7.94	51	0	20	17.57	54	0	20	27.26	57	0	20	36.97	60	0	20	46.77

19°

′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
0	0	20	46.77	5	0	21	3.18	10	0	21	19.74	15	0	21	36.44	20	0	21	53.28
	10	20	47.31		10	21	3.73		10	21	20.30		10	21	37.00		10	21	53.85
	20	20	47.86		20	21	4.28		20	21	20.85		20	21	37.56		20	21	54.41
	30	20	48.40		30	21	4.83		30	21	21.41		30	21	38.12		30	21	54.98
	40	20	48.95		40	21	5.38		40	21	21.96		40	21	38.68		40	21	55.54
	50	20	49.49		50	21	5.93		50	21	22.52		50	21	39.24		50	21	56.11
1	0	20	50.04	6	0	21	6.48	11	0	21	23.07	16	0	21	39.80	21	0	21	56.67
	10	20	50.58		10	21	7.03		10	21	23.63		10	21	40.36		10	21	57.24
	20	20	51.13		20	21	7.58		20	21	24.18		20	21	40.92		20	21	57.81
	30	20	51.67		30	21	8.13		30	21	24.74		30	21	41.48		30	21	58.37
	40	20	52.22		40	21	8.68		40	21	25.29		40	21	42.04		40	21	58.94
	50	20	52.76		50	21	9.23		50	21	25.85		50	21	42.60		50	21	59.50
2	0	20	53 31	7	0	21	9.78	12	0	21	26.40	17	0	21	43.16	22	0	22	0.07
	10	20	53.85		10	21	10.33		10	21	26.96		10	21	43.72		10	22	0.63
	20	20	54.39		20	21	10.88		20	21	27.51		20	21	44.28		20	22	1.20
	30	20	54.94		30	21	11.43		30	21	28.07		30	21	44.84		30	22	1.76
	40	20	55.48		40	21	11.98		40	21	28.62		40	21	45.40		40	22	2.33
	50	20	56.03		50	21	12.53		50	21	29.18		50	21	45.96		50	22	2.89
3	0	20	56.58	8	0	21	13.08	13	0	21	29.73	18	0	21	46.52	23	0	22	3.45
	10	20	57.13		10	21	13.64		10	21	30.29		10	21	47.08		10	22	4.02
	20	20	57.68		20	21	14.19		20	21	30.84		20	21	47.64		20	22	4.58
	30	20	58.23		30	21	14.75		30	21	31.40		30	21	48.20		30	22	5.15
	40	20	58.78		40	21	15.30		40	21	31.96		40	21	48.76		40	22	5.72
	50	20	59.33		50	21	15.86		50	21	32.52		50	21	49.33		50	22	6.28
4	0	20	59.88	9	0	21	16.41	14	0	21	33.08	19	0	21	49.89	24	0	22	6.85
	10	21	0.43		10	21	16.97		10	21	33.64		10	21	50.46		10	22	7.42
	20	21	0.98		20	21	17.52		20	21	34.20		20	21	51.02		20	22	7.99
	30	21	1.53		30	21	18.08		30	21	34.76		30	21	51.59		30	22	8.56
	40	21	2.08		40	21	18.63		40	21	35.32		40	21	52.15		40	22	9.13
	50	21	2.63		50	21	19.19		50	21	35.88		50	21	52.72		50	22	9.70
5	0	21	3.18	10	0	21	19.74	15	0	21	36.44	20	0	21	53.28	25	0	22	10.27

19⁰

′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″
25	0	22	10.27	32	0	22	34.31	39	0	22	58.62	46	0	23	23.22	53	0	23	48.12
	10	22	10.84		10	22	34.88		10	22	59.20		10	23	23.81		10	23	48.72
	20	22	11.41		20	22	35.46		20	22	59.78		20	23	24.40		20	23	49.31
	30	22	11.98		30	22	36.03		30	23	0.36		30	23	24.99		30	23	49.91
	40	22	12.55		40	22	36.61		40	23	0.94		40	23	25.58		40	23	50.51
	50	22	13.12		50	22	37.19		50	23	1.52		50	23	26.17		50	23	51.10
26	0	22	13.69	33	0	22	37.76	40	0	23	2.10	47	0	23	26.76	54	0	23	51.70
	10	22	14.26		10	22	38.34		10	23	2.69		10	23	27.35		10	23	52.29
	20	22	14.83		20	22	38.91		20	23	3.27		20	23	27.94		20	23	52.89
	30	22	15.40		30	22	39.49		30	23	3.86		30	23	28.54		30	23	53.49
	40	22	15.97		40	22	40.06		40	23	4.44		40	23	29.13		40	23	54.08
	50	22	16.54		50	22	40.64		50	23	5.03		50	23	29.72		50	23	54.68
27	0	22	17.12	34	0	22	41.21	41	0	23	5.62	48	0	23	30.31	55	0	23	55.28
	10	22	17.69		10	22	41.79		10	23	6.20		10	23	30.90		10	23	55.87
	20	22	18.26		20	22	42.37		20	23	6.79		20	23	31.49		20	23	56.47
	30	22	18.83		30	22	42.94		30	23	7.37		30	23	32.08		30	23	57.07
	40	22	19.40		40	22	43.52		40	23	7.96		40	23	32.67		40	23	57.66
	50	22	19.97		50	22	44.10		50	23	8.55		50	23	33.27		50	23	58.26
28	0	22	20.54	35	0	22	44.68	42	0	23	9.13	49	0	23	33.86	56	0	23	58.86
	10	22	21.11		10	22	45.26		10	23	9.72		10	23	34.45		10	23	59.46
	20	22	21.68		20	22	45.84		20	23	10.30		20	23	35.04		20	24	0.06
	30	22	22.25		30	22	46.42		30	23	10.89		30	23	35.63		30	24	0.66
	40	22	22.82		40	22	47.00		40	23	11.48		40	23	36.22		40	24	1.26
	50	22	23.39		50	22	47.58		50	23	12.06		50	23	36.81		50	24	1.87
29	0	22	23.96	36	0	22	48.16	43	0	23	12.65	50	0	23	37.40	57	0	24	2.47
	10	22	24.53		10	22	48.74		10	23	13.23		10	23	37.99		10	24	3.07
	20	22	25.10		20	22	49.32		20	23	13.82		20	23	38.59		20	24	3.67
	30	22	25.68		30	22	49.90		30	23	14.41		30	23	39.18		30	24	4.27
	40	22	26.25		40	22	50.49		40	23	14.99		40	23	39.77		40	24	4.87
	50	22	26.83		50	22	51.07		50	23	15.58		50	23	40.36		50	24	5.48
30	0	22	27.40	37	0	22	51.65	44	0	23	16.16	51	0	23	40.96	58	0	24	6.08
	10	22	27.98		10	22	52.23		10	23	16.75		10	23	41.56		10	24	6.68
	20	22	28.55		20	22	52.81		20	23	17.33		20	23	42.15		20	24	7.28
	30	22	29.13		30	22	53.39		30	23	17.92		30	23	42.75		30	24	7.88
	40	22	29.70		40	22	53.97		40	23	18.51		40	23	43.35		40	24	8.48
	50	22	30.28		50	22	54.55		50	23	19.09		50	23	43.94		50	24	9.09
31	0	23	30.86	38	0	22	55.13	45	0	23	19.68	52	0	23	44.54	59	0	24	9.69
	10	22	31.43		10	22	55.71		10	23	20.26		10	23	45.14		10	24	10.29
	20	22	32.01		20	22	56.29		20	23	20.85		20	23	45.73		20	24	10.89
	30	22	32.58		30	22	56.87		30	23	21.44		30	23	46.33		30	24	11.49
	40	22	33.16		40	22	57.46		40	23	22.03		40	23	46.93		40	24	12.09
	50	22	33.73		50	22	58.04		50	23	22.62		50	23	47.52		50	24	12.70
32	0	22	34.31	39	0	22	58.62	46	0	23	23.22	53	0	23	48.12	60	0	24	13.30

20⁰

′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
0	0	24	13.30	1	0	24	16.91	2	0	24	20.54	3	0	24	24.18	4	0	24	27.82
	10	24	13.90		10	24	17.51		10	24	21.15		10	24	24.79		10	24	28.43
	20	24	14.50		20	24	18.11		20	24	21.75		20	24	25.40		20	24	29.04
	30	24	15.10		30	24	18.72		30	24	22.36		30	24	26.00		30	24	29.65
	40	24	15.70		40	24	19.33		40	24	22.97		40	24	26.61		40	24	30.25
	50	24	16.31		50	24	19.93		50	24	23.58		50	24	27.22		50	24	30.86
1	0	24	16.91	2	0	24	20.54	3	0	24	24.18	4	0	24	27.82	5	0	24	31.47

20°

′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″
5	0	24	31.47	14	0	25	4.55	23	0	25	38.10	32	0	26	12.17	41	0	26	46.73
	10	24	32.07		10	25	5.16		10	25	38.73		10	26	12.80		10	26	47.38
	20	24	32.68		20	25	5.78		20	25	39.36		20	26	13.44		20	26	48.02
	30	24	33.29		30	25	6.40		30	25	39.98		30	26	14.07		30	26	48.67
	40	24	33.90		40	25	7.02		40	25	40.61		40	26	14.71		40	26	49.31
	50	24	34.50		50	25	7.64		50	25	41.24		50	26	15 34		50	26	49.96
6	0	24	35.11	15	0	25	8.25	24	0	25	41.87	33	0	26	15.97	42	0	26	50.60
	10	24	35.72		10	25	8.87		10	25	42.50		10	26	16.61		10	26	51.25
	20	24	36.32		20	25	9.49		20	25	43.13		20	26	17.24		20	26	51.89
	30	24	36.93		30	25	10.11		30	25	43.76		30	26	17.88		30	26	52 54
	40	24	37.54		40	25	10.72		40	25	44.38		40	26	18.52		40	26	53.18
	50	24	38.15		50	25	11.34		50	25	45.01		50	26	19.16		50	26	53.83
7	0	24	38.76	16	0	25	11.96	25	0	25	45.64	34	0	26	19.80	43	0	26	54.47
	10	24	39.38		10	25	12.58		10	25	46.27		10	26	20.44		10	26	55.12
	20	24	39.99		20	25	13.20		20	25	46 90		20	26	21.08		20	26	55.76
	30	24	40.60		30	25	13.81		30	25	47.53		30	26	21.72		30	26	56.40
	40	24	41.21		40	25	14 43		40	25	48.16		40	26	22 36		40	26	57.05
	50	24	41.82		50	25	15.05		50	25	48.78		50	26	23.00		50	26	57.69
8	0	24	42.44	17	0	25	15.67	26	0	25	49.41	35	0	26	23.64	44	0	26	58.34
	10	24	43.05		10	25	16.28		10	25	50.04		10	26	24.27		10	26	58.99
	20	24	43.66		20	25	16.90		20	25	50.67		20	26	24.91		20	26	59.64
	30	24	44.27		30	25	17.53		30	25	51.30		30	26	25.55		30	27	0.29
	40	24	44.89		40	25	18.15		40	25	51.93		40	26	26.19		40	27	0.94
	50	24	45.50		50	25	18.77		50	25	52.56		50	26	26.83		50	27	1.59
9	0	24	46.11	18	0	25	19.39	27	0	25	53.18	36	0	26	27.47	45	0	27	2.24
	10	24	46.72		10	25	20.02		10	25	53.81		10	26	28.11		10	27	2.89
	20	24	47.34		20	25	20.64		20	25	54.44		20	26	28.75		20	27	3.54
	30	24	47.95		30	25	21.26		30	25	55.07		30	26	29.39		30	27	4.19
	40	24	48.56		40	25	21.89		40	25	55.70		40	26	30.03		40	27	4.85
	50	24	49.17		50	25	22.51		50	25	56.33		50	26	30.62		50	27	5.49
10	0	24	49.78	19	0	25	23 13	28	0	25	56.96	37	0	26	31.31	46	0	27	6.14
	10	24	50·40		10	25	23.76		10	25	57.59		10	26	31.95		10	27	6.79
	20	24	51.01		20	25	24.38		20	25	58.22		20	26	32.59		20	27	7.44
	30	24	51.62		30	25	25.00		30	25	58.86		30	26	33.23		30	27	8.09
	40	24	52.23		40	25	25.63		40	25	59.49		40	26	33.87		40	27	8.75
	50	24	52.85		50	25	26.25		50	26	0.13		50	26	34.50		50	27	9.40
11	0	24	53.46	20	0	25	26.87	29	0	26	0.76	38	0	26	35.14	47	0	27	10.05
	10	24	54.07		10	25	27.49		10	26	1.39		10	26	35.78		10	27	10.70
	20	24	54.68		20	25	28.12		20	26	2.03		20	26	36.42		20	27	11.35
	30	24	55.30		30	25	28.74		30	26	2.66		30	26	37.06		30	27	12.00
	40	24	55.91		40	25	29.36		40	26	3.30		40	26	37.70		40	27	12.65
	50	24	56.52		50	25	29.99		50	26	3.93		50	26	38.35		50	27	13.30
12	0	24	57.13	21	0	25	30.61	30	0	26	4.56	39	0	26	38.99	48	0	27	13.95
	10	24	57.75		10	25	31.23		10	26	5.20		10	26	39.64		10	27	14.60
	20	24	58.37		20	25	31.86		20	26	5.83		20	26	40.28		20	27	15.25
	30	24	58.99		30	25	32.48		30	26	6.46		30	26	40.93		30	27	15.90
	40	24	59.60		40	25	33.10		40	26	7.10		40	26	41.57		40	27	16.55
	50	25	0.22		50	25	33.73		50	26	7.73		50	26	42.22		50	27	17.20
13	0	25	0.84	22	0	25	34.35	31	0	26	8.37	40	0	26	42.86	49	0	27	17.85
	10	25	1.46		10	25	34.97		10	26	9.00		10	26	43.51		10	27	18.50
	20	25	2.07		20	25	35.60		20	26	9.63		20	26	44.15		20	27	19.15
	30	25	2 69		30	25	36.22		30	26	10.27		30	26	44.80		30	27	19.81
	40	25	3.31		40	25	36.84		40	26	10.90		40	26	45.44		40	27	20.46
	50	25	3.93		50	25	37.47		50	26	11.53		50	26	46.09		50	27	21 12
14	0	25	4.55	23	0	25	38.10	32	0	26	12.17	41	0	26	46.73	50	0	27	21.77

20°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
50	0	27 21.77	52	0	27 29.64	54	0	27 37.51	56	0	27 45.43	58	0	27 53.37
	10	27 22.43		10	27 30.30		10	27 38.17		10	27 46.09		10	27 54.03
	20	27 23.09		20	27 30.96		20	27 38.83		20	27 46.75		20	27 54.69
	30	27 23.74		30	27 31.61		30	27 39.48		30	27 47.41		30	27 55.35
	40	27 24.40		40	27 32.27		40	27 40.14		40	27 48.08		40	27 56.01
	50	27 25.05		50	27 32.92		50	27 40.80		50	27 48.74		50	27 56.67
51	0	27 25.70	53	0	27 33.58	55	0	27 41.46	57	0	27 49.40	59	0	27 57.34
	10	27 26.37		10	27 34.24		10	27 42.12		10	27 50.06		10	27 58.00
	20	27 27.02		20	27 34.89		20	27 42.78		20	27 50.72		20	27 58.66
	30	27 27.68		30	27 35.55		30	27 43.45		30	27 51.39		30	27 59.32
	40	27 28.33		40	27 36.20		40	27 44.11		40	27 52.04		40	27 59.98
	50	27 28.99		50	27 36.86		50	27 44.77		50	27 52.71		50	28 0.64
52	0	27 29.64	54	0	27 37.51	56	0	27 45.43	58	0	27 53.37	60	0	28 1.30

21°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
0	0	28 1.30	6	0	28 25.34	12	0	28 49.60	18	0	29 14.08	24	0	29 38.78
	10	28 1.97		10	28 26.01		10	28 50.27		10	29 14.76		10	29 39.47
	20	28 2.64		20	28 26.68		20	28 50.95		20	29 15.44		20	29 40.16
	30	28 3.31		30	28 27.36		30	28 51.63		30	29 16.13		30	29 40.85
	40	28 3.97		40	28 28.03		40	28 52.31		40	29 16.81		40	29 41.54
	50	28 4.64		50	28 28 70		50	28 52.99		50	29 17.50		50	29 42.23
1	0	28 5.31	7	0	28 29.37	13	0	28 53.66	19	0	29 18.18	25	0	29 42.92
	10	28 5.97		10	28 30.05		10	28 54.34		10	29 18.86		10	29 43.61
	20	28 6.64		20	28 30.72		20	28 55.02		20	29 19.55		20	29 44.30
	30	28 7.31		30	28 31.39		30	28 55.70		30	29 20.23		30	29 44.99
	40	28 7.97		40	28 32.06		40	28 56.38		40	29 20.92		40	29 45.68
	50	28 8.64		50	28 32.74		50	28 57.06		50	29 21.60		50	29 46.37
2	0	28 9.31	8	0	28 33.41	14	0	28 57.73	20	0	29 22.28	26	0	29 47.06
	10	28 9.98		10	28 34.08		10	28 58.41		10	29 22.97		10	29 47.75
	20	28 10.64		20	28 34.75		20	28 59.09		20	29 23.65		20	29 48.44
	30	28 11.31		30	28 35.43		30	28 59.77		30	29 24.33		30	29 49.13
	40	28 11.98		40	28 36.10		40	29 0.45		40	29 25.02		40	29 49.82
	50	28 12.64		50	28 36.77		50	29 1.12		50	29 25.70		50	29 50.51
3	0	28 13.31	9	0	28 37.45	15	0	29 1.80	21	0	29 26.39	27	0	29 51.21
	10	28 13.98		10	28 38.12		10	29 2.48		10	29 27.07		10	29 51.90
	20	28 14.64		20	28 38.79		20	29 3.16		20	29 27.75		20	29 52.60
	30	28 15.31		30	28 39.46		30	29 3.84		30	29 28.44		30	29 53.29
	40	28 15.98		40	28 40.14		40	29 4.52		40	29 29.13		40	29 53.99
	50	28 16.64		50	28 40.81		50	29 5.19		50	29 29.82		50	29 54.68
4	0	28 17.31	10	0	28 41.48	16	0	29 5.87	22	0	29 30.51	28	0	29 55.38
	10	28 17.98		10	28 42.15		10	29 6.56		10	29 31.20		10	29 56.07
	20	28 18.65		20	28 42.83		20	29 7.24		20	29 31.89		20	29 56.77
	30	28 19.31		30	28 43.50		30	29 7.92		30	29 32.58		30	29 57.46
	40	28 19.98		40	28 44.17		40	29 8.61		40	29 33.27		40	29 58.16
	50	28 20.65		50	28 44.85		50	29 9.29		50	29 33.96		50	29 58.85
5	0	28 21.31	11	0	28 45.53	17	0	29 9.97	23	0	29 34.65	29	0	29 59.55
	10	28 21.98		10	28 46.21		10	29 10.66		10	29 35.34		10	30 0.24
	20	28 22.65		20	28 46.88		20	29 11.34		20	29 36.03		20	30 0.94
	30	28 23.82		30	28 47.56		30	29 12.03		30	29 36.72		30	30 1.63
	40	28 23.99		40	28 48.24		40	29 12.71		40	29 37.41		40	30 2.33
	50	28 24.67		50	28 48.92		50	29 13.39		50	29 38.09		50	30 3.02
6	0	28 25.34	12	0	28 49.60	18	0	29 14.08	24	0	29 38.78	30	0	30 3 72

21°

'	''	Unproportionalität. '	''	'	''	Unproportionalität. '	''	'	''	Unproportionalität. '	''	'	''	Unproportionalität. '	''	'	''	Unproportionalität. '	''
30	0	30	3.72	36	0	30	28.88	42	0	30	54.27	48	0	31	19.89	54	0	31	45.76
	10	30	4.41		10	30	29.58		10	30	54.97		10	31	20.60		10	31	46.48
	20	30	5.11		20	30	30.28		20	30	55.68		20	31	21.32		20	31	47.21
	30	30	5.80		30	30	30.98		30	30	56.39		30	31	22.04		30	31	47.93
	40	30	6.50		40	30	31.68		40	30	57.09		40	31	22.76		40	31	48.65
	50	30	7.19		50	30	32.38		50	30	57.81		50	31	23.48		50	31	49.38
31	0	30	7.89	37	0	30	33.08	43	0	30	58.52	49	0	31	24.19	55	0	31	50.10
	10	30	8.58		10	30	33.78		10	30	59.23		10	31	24.91		10	31	50.82
	20	30	9.28		20	30	34.48		20	30	59.94		20	31	25.63		20	31	51.55
	30	30	9.97		30	30	35.19		30	31	0.65		30	31	26.35		30	31	52.27
	40	30	10.67		40	30	35.90		40	31	1.37		40	31	27.07		40	31	53.00
	50	30	11.36		50	30	36.60		50	31	2.08		50	31	27.78		50	31	53.72
32	0	30	12.06	38	0	30	37.31	44	0	31	2.79	50	0	31	28.50	56	0	31	54.44
	10	30	12.76		10	30	38.02		10	31	3.50		10	31	29.22		10	31	55.17
	20	30	13.46		20	30	38.72		20	31	4.22		20	31	29.94		20	31	55.89
	30	30	14.16		30	30	39.43		30	31	4.93		30	31	30.66		30	31	56.62
	40	30	14.86		40	30	40.14		40	31	5.64		40	31	31.37		40	31	57.34
	50	30	15.56		50	30	40.84		50	31	6.35		50	31	32.09		50	31	58.06
33	0	30	16.26	39	0	30	41.55	45	0	31	7.06	51	0	31	32.81	57	0	31	58.79
	10	30	16.96		10	30	42.26		10	31	7.78		10	31	33.53		10	31	59.51
	20	30	17.66		20	30	42.96		20	31	8.49		20	31	34.25		20	32	0.23
	30	30	18.36		30	30	43.67		30	31	9.20		30	31	34.96		30	32	0.96
	40	30	19.07		40	30	44.38		40	31	9.91		40	31	35.68		40	32	1.68
	50	30	19.77		50	30	45.08		50	31	10.63		50	31	36.40		50	32	2.41
34	0	30	20.47	40	0	30	45.79	46	0	31	11.34	52	0	31	37.12	58	0	32	3.13
	10	30	21.17		10	30	46.49		10	31	12.05		10	31	37.84		10	32	3.85
	20	30	21.87		20	30	47.20		20	31	12.76		20	31	38.55		20	32	4.58
	30	30	22.57		30	30	47.91		30	31	13.47		30	31	39.27		30	32	5.30
	40	30	23.27		40	30	48.61		40	31	14.19		40	31	39.99		40	32	6.03
	50	30	23.97		50	30	49.32		50	31	14.90		50	31	40.71		50	32	6.75
35	0	30	24.67	41	0	30	50.03	47	0	31	15.61	53	0	31	41.43	59	0	32	7.48
	10	30	25.37		10	30	50.73		10	31	16.32		10	31	42.14		10	32	8.21
	20	30	26.07		20	30	51.44		20	31	17.04		20	31	42.86		20	32	8.94
	30	30	26.78		30	30	52.15		30	31	17.75		30	31	43.59		30	32	9.67
	40	30	27.48		40	30	52.85		40	31	18.46		40	31	44.31		40	32	10.40
	50	30	28.13		50	30	53.56		50	31	19.17		50	31	45.03		50	32	11.13
36	0	30	28.88	42	0	30	54.27	48	0	31	19.89	54	0	31	45.76	60	0	32	11.86

22°

'	''	Unproportionalität. '	''	'	''	Unproportionalität. '	''	'	''	Unproportionalität. '	''	'	''	Unproportionalität. '	''	'	''	Unproportionalität. '	''
0	0	32	11.86	2	0	32	20.62	4	0	32	29.37	6	0	32	38.20	8	0	32	47.02
	10	32	12.59		10	32	21.35		10	32	30.11		10	32	38.93		10	32	47.76
	20	32	13.32		20	32	22.08		20	32	30.84		20	32	39.67		20	32	48.49
	30	32	14.05		30	32	22.81		30	32	31.58		30	32	40.40		30	32	49.23
	40	32	14.78		40	32	23.54		40	32	32.31		40	32	41.14		40	32	49.96
	50	32	15.51		50	32	24.26		50	32	33.05		50	32	41.87		50	32	50.70
1	0	32	16.24	3	0	32	24.99	5	0	32	33.79	7	0	32	42.61	9	0	32	51.44
	10	32	16.97		10	32	25.72		10	32	34.52		10	32	43.35		10	32	52.17
	20	32	17.70		20	32	26.45		20	32	35.26		20	32	44.08		20	32	52.91
	30	32	18.43		30	32	27.18		30	32	35.99		30	32	44.82		30	32	53.65
	40	32	19.16		40	32	27.91		40	32	36.73		40	32	45.55		40	32	54.39
	50	32	19.89		50	32	28.64		50	32	37.46		50	32	46.29		50	32	55.13
2	0	32	20.62	4	0	32	29.37	6	0	32	38.20	8	0	32	47.02	10	0	32	55.87

22°

′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″
10	0	32	55.87	19	0	33	36.05	28	0	34	16.78	37	0	34	58.02	46	0	35	39.82
	10	32	56.61		10	33	36.80		10	34	17.54		10	34	58.80		10	35	40.60
	20	32	57.35		20	33	37.55		20	34	18.30		20	34	59.57		20	35	41.38
	30	32	58.10		30	33	38.30		30	34	19.06		30	35	0 34		30	35	42.15
	40	32	58.84		40	33	39.04		40	34	19.82		40	35	1.11		40	35	42.93
	50	32	59.58		50	33	39.79		50	34	20.57		50	35	1.88		50	35	43.71
11	0	33	0.32	20	0	33	40.54	29	0	34	21.33	38	0	35	2.65	47	0	35	44.50
	10	33	1.06		10	33	41.29		10	34	22.09		10	35	3.42		10	35	45.28
	20	33	1.80		20	33	42.04		20	34	22.85		20	35	4.19		20	35	46.06
	30	33	2.54		30	33	42.80		30	34	23.61		30	35	4.96		30	35	46.84
	40	33	3.28		40	33	43.55		40	34	24.37		40	35	5.73		40	35	47.63
	50	33	4.03		50	33	44.30		50	34	25.13		50	35	6.50		50	35	48.41
12	0	33	4.77	21	0	33	45.06	30	0	34	25.89	39	0	35	7.28	48	0	35	49.19
	10	33	5.51		10	33	45.81		10	34	26.65		10	35	8.05		10	35	49.98
	20	33	6.25		20	33	46.56		20	34	27.40		20	35	8.82		20	35	50.76
	30	33	6.99		30	33	47.31		30	34	28.16		30	35	9.59		30	35	51.54
	40	33	7.73		40	33	48 07		40	34	28.92		40	35	10.36		40	35	52.32
	50	33	8.47		50	33	48.82		50	34	29.69		50	35	11.13		50	35	53.11
13	0	33	9.21	22	0	33	49.57	31	0	34	30.45	40	0	35	11.90	49	0	35	53.89
	10	33	9.96		10	33	50.33		10	34	31.22		10	35	12.67		10	35	54.67
	20	33	10.70		20	33	51.08		20	34	31.98		20	35	13.44		20	35	55.45
	30	33	11.44		30	33	51.83		30	34	32.75		30	35	14.21		30	35	56.24
	40	33	12.18		40	33	52.59		40	34	33.51		40	35	14.98		40	35	57.02
	50	36	12.92		50	33	53.34		50	34	34.28		50	35	15.76		50	35	57.80
14	0	33	13.66	23	0	33	54.09	32	0	34	35.04	41	0	35	16.53	50	0	35	58 59
	10	33	14.40		10	33	54.85		10	34	35.81		10	35	17.30		10	35	59.37
	20	33	15 14		20	33	55.60		20	34	36.57		20	35	18.07		20	36	0.15
	30	33	15.89		30	33	56.35		30	34	37.34		30	35	18.85		30	36	0.93
	40	33	16.63		40	33	57.11		40	34	38.10		40	35	19.62		40	36	1.72
	50	33	17.37		50	33	57.86		50	34	38.87		50	35	20.40		50	36	2.50
15	0	33	18.12	24	0	33	58.61	33	0	34	39.63	42	0	35	21.18	51	0	36	3.28
	10	33	18.87		10	33	59.36		10	34	40.40		10	35	21.95		10	36	4.07
	20	33	19.62		20	34	0.12		20	34	41.16		20	35	22.73		20	36	4.85
	30	33	20.36		30	34	0.87		30	34	41.93		30	35	23.51		30	36	5.63
	40	33	21.11		40	34	1.62		40	34	42.69		40	35	24.28		40	36	6.41
	50	33	21.86		50	34	2.38		50	34	43.46		50	35	25.06		50	36	7.20
16	0	33	22.60	25	0	34	3.13	34	0	34	44.22	43	0	35	25.84	52	0	36	7.98
	10	33	23.35		10	34	3.88		10	34	44.99		10	35	26.61		10	36	8.77
	20	33	24.10		20	34	4.64		30	34	45.75		20	35	27.39		20	36	9.56
	30	33	24.85		30	34	5.40		30	34	46.52		30	35	28.17		30	36	10.35
	40	33	25.59		40	34	6.15		40	34	47.28		40	35	28.95		40	36	11.14
	50	33	26.34		50	34	6.91		50	34	48.05		50	35	29.72		50	36	11.92
17	0	33	27.09	26	0	34	7.67	35	0	34	48.81	44	0	35	30.50	53	0	36	12.71
	10	33	27.83		10	34	8.43		10	34	49.58		10	35	31.28		10	36	13.50
	20	33	28.58		20	34	9.19		20	34	50.34		20	35	32.05		20	36	14.29
	30	33	29.33		30	34	9.95		30	34	51.11		30	35	32.83		30	36	15.08
	40	33	30.08		40	34	10.71		40	34	51.87		40	35	33.61		40	39	15.87
	50	33	30.82		50	34	11.47		50	34	52.63		50	35	34.38		50	36	16.66
18	0	33	31.57	27	0	34	12.23	36	0	34	53.40	45	0	35	35.16	54	0	36	17.45
	10	33	32.32		10	34	12.98		10	34	54.17		10	35	35.94		10	36	18.24
	20	33	33.06		20	34	13.74		20	34	54.94		20	35	36.71		20	36	19.03
	30	33	33.81		30	34	14.50		30	34	55.71		30	35	37.49		30	36	19.81
	40	33	34.56		40	34	15.26		40	34	56.48		40	35	38.27		40	36	20.60
	50	33	35.31		50	34	16.02		50	34	57.25		50	35	39.05		50	36	21.39
19	0	33	36.05	28	0	34	16.78	37	0	34	58.02	46	0	35	39.82	55	0	36	22.18

22°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
55	0	36 22.18	56	0	36 26.91	57	0	36 31.65	58	0	36 36.41	59	0	36 41.17
	10	36 22.97		10	36 27.70		10	36 32.44		10	36 37.20		10	36 41.97
	20	36 23.76		20	36 28.49		20	36 33.23		20	36 38.00		20	36 42.76
	30	36 24.55		30	36 29.28		30	36 34.02		30	36 38.79		30	36 43.56
	40	36 25.34		40	36 30.07		40	36 34.82		40	36 39.58		40	36 44.35
	50	36 26.13		50	36 30.86		50	36 35.61		50	36 40.38		50	36 45.15
56	0	36 26.91	57	0	36 31.65	58	0	36 36.41	59	0	36 41.17	60	0	36 45.94

23°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
0	0	36 45.94	7	0	37 19.49	14	0	37 53.38	21	0	38 27.62	28	0	39 2.18
	10	36 46.74		10	37 20.29		10	37 54.19		10	38 28.44		10	39 3.00
	20	36 47.53		20	37 21.09		20	37 55.00		20	38 29.26		20	39 3.83
	30	36 48.33		30	37 21.89		30	37 55.82		30	38 30.08		30	39 4.66
	40	36 49.12		40	37 22.69		40	37 56.63		40	38 30.90		40	39 5.48
	50	36 49.92		50	37 23.50		50	37 57.44		50	38 31.72		50	39 6.31
1	0	36 50.71	8	0	37 24.30	15	0	37 58.26	22	0	38 32.54	29	0	39 7.14
	10	36 51.51		10	37 25.10		10	37 59.07		10	38 33.36		10	39 7.96
	20	36 52.30		20	37 25.91		20	37 59.88		20	38 34.17		20	39 8.79
	30	36 53.10		30	37 26.71		30	38 0.70		30	38 34.99		30	39 9.62
	40	36 53.89		40	37 27.52		40	38 1.51		40	38 35.81		40	39 10.45
	50	36 54.69		50	37 28.33		50	38 2.32		50	38 36.63		50	39 11.28
2	0	36 55.48	9	0	37 29.14	16	0	38 3.14	23	0	38 37.45	30	0	39 12.11
	10	36 56.28		10	37 29.94		10	38 3.95		10	38 38.27		10	39 12.94
	20	36 57.07		20	37 30.75		20	38 4.76		20	38 39.09		20	39 13.78
	30	36 57.87		30	37 31.56		30	38 5.58		30	38 39.91		30	39 14.61
	40	36 58.66		40	37 32.36		40	38 6.39		40	38 40.73		40	39 15.44
	50	36 59.46		50	37 33.17		50	38 7.20		50	38 41.55		50	39 16.27
3	0	37 0.27	10	0	37 33.98	17	0	38 8.02	24	0	38 42.37	31	0	39 17.10
	10	37 1.07		10	37 34.79		10	38 8.83		10	38 43.19		10	39 17.93
	20	37 1.87		20	37 35.59		20	38 9.64		20	38 44.02		20	39 18.77
	30	37 2.67		30	37 36.40		30	38 10.46		30	38 44.84		30	39 19.60
	40	37 3.47		40	37 37.21		40	38 11.27		40	38 45.67		40	39 20.43
	50	37 4.27		50	37 38.01		50	38 12.08		50	38 46.50		50	39 21.26
4	0	37 5.07	11	0	37 38.82	18	0	38 12.90	25	0	38 47.32	32	0	39 22.09
	10	37 5.87		10	37 39.63		10	38 13.71		10	38 48.15		10	39 22.93
	20	37 6.67		20	37 40.44		20	38 14.52		20	38 48.97		20	39 23.76
	30	37 7.47		30	37 41.24		30	38 15.84		30	38 49.80		30	39 24.59
	40	37 8.28		40	37 42.05		40	38 16.15		40	38 50.62		40	39 25.42
	50	37 9.08		50	37 42.86		50	38 16.97		50	38 51.45		50	39 26.25
5	0	37 9.88	12	0	37 43.66	19	0	38 17.79	26	0	38 52.28	33	0	39 27.08
	10	37 10.68		10	37 44.47		10	38 18.61		10	38 53.10		10	39 27.92
	20	37 11.48		20	37 45.28		20	38 19.43		20	38 53.93		20	39 28.75
	30	37 12.28		30	37 46.09		30	38 20.25		30	38 54.75		30	39 29.58
	40	37 13.08		40	37 46.89		40	38 21.07		40	38 55.58		40	39 30.41
	50	37 13.88		50	37 47.70		50	38 21.88		50	38 56.40		50	39 31.24
6	0	37 14.68	13	0	37 48.51	20	0	38 22.70	27	0	38 57.23	34	0	39 32.07
	10	37 15.49		10	37 49.32		10	38 23.52		10	38 58.05		10	39 32.91
	20	37 16.29		20	37 50.12		20	38 24.34		20	38 58.88		20	39 33.74
	30	37 17.09		30	37 50.94		30	38 25.16		30	38 59.70		40	39 34.57
	40	37 17.89		40	37 51.75		40	38 25.98		40	39 0.53		40	39 35.40
	50	37 18.69		50	37 52.56		50	38 26.80		50	39 1.36		50	39 36.24
7	0	37 19.49	14	0	37 53.38	21	0	38 27.62	28	0	39 2.18	35	0	39 37.08

23°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
35	0	39 37.08	40	0	40 2.21	45	0	40 27.54	50	0	40 53.04	55	0	41 18.71
	10	39 37.91		10	40 3.06		10	40 28.38		10	40 53.89		10	41 19.57
	20	39 38.75		20	40 3.90		20	40 29.23		20	40 54.74		20	41 20.43
	30	39 39.59		30	40 4.75		30	40 30.08		30	40 55.59		30	41 21.28
	40	39 40.43		40	40 5.59		40	40 30.93		40	40 56.44		40	41 22.14
	50	39 41.27		50	40 6.43		50	40 31.78		50	40 57.30		50	41 23.00
36	0	39 42.10	41	0	40 7.28	46	0	40 32.63	51	0	40 58.15	56	0	41 23.85
	10	39 42.94		10	40 8.12		10	40 33.48		10	40 59.01		10	41 24.72
	20	39 43.78		20	40 8.97		20	40 34.33		20	40 59.87		20	41 25.58
	30	39 44.62		30	40 9.81		30	40 35.18		30	41 0.72		30	41 26.44
	40	39 45.46		40	40 10.66		40	40 36.03		40	41 1.58		40	41 27.31
	50	39 46.29		50	40 11.50		50	40 36.88		50	41 2.44		50	41 28.17
37	0	39 47.13	42	0	40 12.34	47	0	40 37.73	52	0	41 3.29	57	0	41 29.03
	10	39 47.97		10	40 13.19		10	40 38.58		10	41 4.15		10	41 29.89
	20	39 48.81		20	40 14.03		20	40 39.43		20	41 5.01		20	41 30.76
	30	39 49.64		30	40 14.88		30	40 40.28		30	41 5.86		30	41 31.62
	40	39 50.48		40	40 15.72		40	40 41.13		40	41 6.72		40	41 32.48
	50	39 51.32		50	40 16.56		50	40 41.98		50	41 7.58		50	41 33.35
38	0	39 52.16	43	0	40 17.41	48	0	40 42.83	53	0	41 8.43	58	0	41 34.21
	10	39 53.00		10	40 18.25		10	40 43.68		10	41 9.29		10	41 35.07
	20	39 53.83		20	40 19.10		20	40 44.53		20	41 10.15		20	41 35.94
	30	39 54.67		30	40 19.94		30	40 45.38		30	41 11.00		30	41 36.80
	40	39 55.51		40	40 20.79		40	40 46.24		40	41 11.86		40	41 37.66
	50	39 56.35		50	40 21.63		50	40 47.09		50	41 12.72		50	41 38.52
39	0	39 57.19	44	0	40 22.47	49	0	40 47.94	54	0	41 13.57	59	0	41 39.39
	10	39 58.02		10	40 23.32		10	40 48.79		10	41 14.43		10	41 40.25
	20	39 58.86		20	40 24.16		20	40 49.64		20	41 15.29		20	41 41.11
	30	39 59.70		30	40 25.01		30	40 50.49		30	41 16.14		30	41 41.98
	40	40 0.54		40	40 25.85		40	40 51.34		40	41 17.00		40	41 42.84
	50	40 1.38		50	40 26.69		50	40 52.19		50	41 17.86		50	41 43.70
40	0	40 2.21	45	0	40 27.54	50	0	40 53.04	55	0	41 18.71	60	0	41 44.56

24°

′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″	′	″	Unproportionalität ′ ″
0	0	41 44.56	3	0	42 0.16	6	0	42 15.81	9	0	42 31.54	12	0	42 47.31
	10	41 45.43		10	42 1.03		10	42 16.68		10	42 32.42		10	42 48.19
	20	41 46.29		20	42 1.90		20	42 17.55		20	42 33.30		20	42 49.07
	30	41 47.15		30	42 2.77		30	42 18.42		30	42 34.17		30	42 49.95
	40	41 48.02		40	42 3.64		40	42 19.29		40	42 35.05		40	42 50.83
	50	41 48.88		50	42 4.51		50	42 20.16		50	42 35.92		50	42 51.72
1	0	41 49.74	4	0	42 5.38	7	0	42 21.04	10	0	42 36.80	13	0	42 52.60
	10	41 50.61		10	42 6.25		10	42 21.91		10	42 37.67		10	42 53.48
	20	41 51.47		20	42 7.12		20	42 22.79		20	42 38.55		20	42 54.36
	30	41 52.34		30	42 7.98		30	42 23.66		30	42 39.43		30	42 55.24
	40	41 53.21		40	42 8.85		40	42 24.54		40	42 40.30		40	42 56.13
	50	41 54.08		50	42 9.72		50	42 25.42		50	42 41.18		50	42 57.01
2	0	41 54.95	5	0	42 10.59	8	0	42 26.29	11	0	42 42.05	14	0	42 57.89
	10	41 55.81		10	42 11.46		10	42 27.17		10	42 42.93		10	42 58.77
	20	41 56.68		20	42 12.33		20	42 28.04		20	42 43.80		20	42 59.65
	30	41 57.55		30	42 13.20		30	42 28.92		30	42 44.68		30	43 0.54
	40	41 58.42		40	42 14.07		40	42 29.79		40	42 45.56		40	43 1.42
	50	41 59.29		50	42 14.94		50	42 30.67		50	42 46.43		50	43 2.30
3	0	42 0.16	6	0	42 15.81	9	0	42 31.54	12	0	42 47.31	15	0	43 3.18

24°

		Unpro-portio-nalität				Unpro-portio-nalität				Unpro-portio-nalität				Unpro-portio-nalität				Unpro-portio-nalität	
′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
15	0	43	3.18	24	0	43	51.11	33	0	44	39.63	42	0	45	28.75	51	0	46	18.45
	10	43	4.06		10	43	52.01		10	44	40.53		10	45	29.67		10	46	19.38
	20	43	4.95		20	43	52.90		20	44	41.43		20	45	30.58		20	46	20.31
	30	43	5.83		30	43	53.80		30	44	42.33		30	45	31.50		30	46	21.23
	40	43	6.71		40	43	54.69		40	44	43.24		40	45	32.41		40	46	22.16
	50	43	7.59		50	43	55.59		50	44	44.15		50	45	33.32		50	46	23.09
16	0	43	8.47	25	0	43	56.48	34	0	44	45.06	43	0	45	34.24	52	0	46	24.02
	10	43	9.35		10	43	57.38		10	44	45.97		10	45	35.15		10	46	24.94
	20	43	10.24		20	43	58.27		20	44	46.87		20	45	36.07		20	46	25.87
	30	43	11.12		30	43	59.17		30	44	47.78		30	45	36.98		30	46	26.80
	40	43	12.00		40	44	0.06		40	44	48.69		40	45	37.90		40	46	27.72
	50	43	12.88		50	44	0.96		50	44	49.60		50	45	38.81		50	46	28.65
17	0	43	13.76	26	0	44	1.85	35	0	44	50.50	44	0	45	39.72	53	0	46	29.58
	10	43	14.65		10	44	2.75		10	44	51.41		10	45	40.64		10	46	30.51
	20	43	15.53		20	44	3.64		20	44	52.32		20	45	41.56		20	46	31.43
	30	43	16.42		30	44	4.54		30	44	53.23		30	45	42.49		30	46	32.36
	40	43	17.31		40	44	5.43		40	44	54.13		40	45	43.41		40	46	33.29
	50	43	18.19		50	44	6.33		50	44	55.04		50	45	44.33		50	46	34.21
18	0	43	19.08	27	0	44	7.22	36	0	44	55.95	45	0	45	45.25	54	0	46	35.14
	10	43	19.97		10	44	8.12		10	44	56.86		10	45	46.17		10	46	36.07
	20	43	20.86		20	44	9.01		20	44	57.76		20	45	47.09		20	46	37.00
	30	43	21.75		30	44	9.91		30	44	58.67		30	45	48.01		30	46	37.92
	40	43	22.64		40	44	10.80		40	44	59.58		40	45	48.93		40	46	38.85
	50	43	23.52		50	45	11.70		50	45	0.49		50	45	49.85		50	46	39.78
19	0	43	24.41	28	0	44	12.59	37	0	45	1.39	46	0	45	50.77	55	0	46	40.72
	10	43	25.30		10	44	13.49		10	45	2.30		10	45	51.69		10	46	41.65
	20	43	26.19		20	44	14.40		20	45	3.21		20	45	52.61		20	46	42.58
	30	43	27.08		30	44	15.30		30	45	4.12		30	45	53.53		30	46	43.52
	40	43	27.97		40	44	16.20		40	45	5.02		40	45	54.45		40	46	44.45
	50	43	28.85		50	44	17.10		50	45	5.93		50	45	55.37		50	46	45.39
20	0	43	29.74	29	0	44	18.00	38	0	45	6.84	47	0	45	56.29	56	0	46	46.32
	10	43	30.63		10	44	18.90		10	45	7.75		10	45	57.21		10	46	47.25
	20	43	31.52		20	44	19.80		20	45	8.66		20	45	58.13		20	46	48.19
	30	43	32.41		30	44	20.70		30	45	9.56		30	45	59.06		30	46	49.12
	40	43	33.29		40	44	21.60		40	45	10.47		40	45	59.98		40	46	50.05
	50	43	34.18		50	44	22.51		50	45	11.38		50	46	0.90		50	46	50.97
21	0	43	35.07	30	0	44	23.41	39	0	45	12.30	48	0	46	1.82	57	0	46	51.92
	10	43	35.96		10	44	24.31		10	45	13.21		10	46	2.74		10	46	52.85
	20	43	36.85		20	44	25.21		20	45	14.13		20	46	3.66		20	46	53.79
	30	43	37.74		30	44	26.11		30	45	15.04		30	46	4.58		30	46	54.72
	40	43	38.63		40	44	27.01		40	45	15.96		40	46	5.50		40	46	55.66
	50	43	39.51		50	44	27.91		50	45	16.87		50	46	6.42		50	46	56.59
22	0	43	40.40	31	0	44	28.81	40	0	45	17.78	49	0	46	7.34	58	0	46	57.52
	10	43	41.29		10	44	29.71		10	45	18.70		10	46	8.26		10	46	58.46
	20	43	42.18		20	44	30.61		20	45	19.61		20	46	9.18		20	46	59.39
	30	43	43.07		30	44	31.52		30	45	20.53		30	46	10.11		30	47	0.32
	40	43	43.96		40	44	32.42		40	45	21.44		40	46	11.04		40	47	1.26
	50	43	44.85		50	44	33.32		50	45	22.35		50	46	11.96		50	47	2.19
23	0	43	45.75	32	0	44	34.22	41	0	45	23.27	50	0	46	12.89	59	0	47	3.12
	10	43	46.64		10	44	35.12		10	45	24.18		10	46	13.82		10	47	4.06
	20	43	47.54		20	44	36.02		20	45	25.10		20	46	14.75		20	47	4.99
	30	43	48.43		30	44	36.92		30	45	26.01		30	46	15.67		30	47	5.92
	40	43	49.33		40	44	37.82		40	45	26.93		40	46	16.60		40	47	6.86
	50	43	50.22		50	44	38.72		50	45	27.84		50	46	17.58		50	47	7.79
24	0	43	51.11	33	0	44	39.63	42	0	45	28.75	51	0	46	18.45	60	0	47	8.73

25°

′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″
0	0	47	8.73	9	0	47	59.64	18	0	48	51.14	27	0	49	43.22	36	0	50	35.94
	10	47	9.67		10	48	0.59		10	48	52.10		10	49	44.19		10	50	36.92
	20	47	10.61		20	48	1.54		20	48	53.06		20	49	45.17		20	50	37.90
	30	47	11.55		30	48	2.48		30	48	54.02		30	49	46.14		30	50	38.88
	40	47	12.49		40	48	3.43		40	48	54.98		40	49	47.11		40	50	39.86
	50	47	13.43		50	48	4.38		50	48	55.94		50	49	48.08		50	50	40.84
1	0	47	14.37	10	0	48	5.32	19	0	48	56.90	28	0	49	49.06	37	0	50	41.82
	10	47	15.31		10	48	6.27		10	48	57.86		10	49	50.03		10	50	42.80
	20	47	16.25		20	48	7.22		20	48	58.82		20	49	51.00		20	50	43.78
	30	47	17.19		30	48	8.16		30	48	59.78		30	49	51.98		30	50	44.76
	40	47	18.13		40	48	9.11		40	49	0.74		40	49	52.95		40	50	45.75
	50	47	19.07		50	48	10.06		50	49	1.70		50	49	53.92		50	50	46.74
2	0	47	20.01	11	0	48	11.02	20	0	49	2.66	29	0	49	54.90	38	0	50	47.72
	10	47	20.95		10	48	11.97		10	49	3.62		10	49	55.87		10	50	48.71
	20	47	21.89		20	48	12.92		20	49	4.58		20	49	56.84		20	50	49.70
	30	47	22.83		30	48	13.88		30	49	5.54		30	49	57.82		30	50	50.68
	40	47	23.77		40	48	14.83		40	49	6.50		40	49	58.79		40	50	51.67
	50	47	24.71		50	48	15.78		50	49	7.46		50	49	59.76		50	50	52.66
3	0	47	25.65	12	0	48	16.74	21	0	49	8.42	30	0	50	0.74	39	0	50	53.65
	10	47	26.59		10	48	17.69		10	49	9.38		10	50	1.71		10	50	54.63
	20	47	27.53		20	48	18.64		20	49	10.34		20	50	2.68		20	50	55.62
	30	47	28.47		30	48	19.60		30	49	11.31		30	50	3.66		30	50	56.60
	40	47	29.41		40	48	20.55		40	49	12.27		40	50	4.63		40	50	57.59
	50	47	30.35		50	48	21.50		50	49	13.24		50	50	5.60		50	50	58.58
4	0	47	31.29	13	0	48	22.46	22	0	49	14.21	31	0	50	6.58	40	0	50	59.56
	10	47	32.23		10	48	23.41		10	49	15.17		10	50	7.55		10	51	0.55
	20	47	33.17		20	48	24.36		20	49	16.14		20	50	8.52		20	51	1.54
	30	47	34.11		30	48	25.32		30	49	17.11		30	50	9.50		30	51	2.52
	40	47	35.05		40	48	26.27		40	49	18.07		40	50	10.47		40	51	3.51
	50	47	35.99		50	48	27.22		50	49	19.04		50	50	11.44		50	51	4.50
5	0	47	36.93	14	0	48	28.18	23	0	49	20.01	32	0	50	12.42	41	0	51	5.48
	10	47	37.87		10	48	29.13		10	49	20.97		10	50	13.40		10	51	6.47
	20	47	38.81		20	48	30.09		20	49	21.94		20	50	14.38		20	51	7.46
	30	47	39.76		30	48	31.04		30	49	22.91		30	50	15.36		30	51	8.44
	40	47	40.71		40	48	31.99		40	49	23.87		40	50	16.34		40	51	9.43
	50	47	41.65		50	48	32.95		50	49	24.84		50	50	17.32		50	51	10.42
6	0	47	42.60	15	0	48	33.90	24	0	49	25.81	33	0	50	18.30	42	0	51	11.40
	10	47	43.55		10	48	34.85		10	49	26.77		10	50	19.28		10	51	12.39
	20	47	44.49		20	48	35.81		20	49	27.74		20	50	20.26		20	51	13.38
	30	47	45.44		30	48	36.76		30	49	28.71		30	50	21.24		30	51	14.36
	40	47	46.39		40	48	37.71		40	49	29.67		40	50	22.22		40	51	15.35
	50	47	47.33		50	48	38.67		50	49	30.64		50	50	23.20		50	51	16.34
7	0	47	48.28	16	0	48	39.62	25	0	49	31.61	34	0	50	24.18	43	0	51	17.34
	10	47	49.23		10	48	40.58		10	49	32.57		10	50	25.16		10	51	18.33
	20	47	50.17		20	48	41.54		20	49	33.54		20	50	26.14		20	51	19.33
	30	47	51.12		30	48	42.50		30	49	34.51		30	50	27.12		30	51	20.32
	40	47	52.07		40	48	43.46		40	49	35.47		40	50	28.10		40	51	21.31
	50	47	53.01		50	48	44.42		50	49	36.44		50	50	29.08		50	51	22.31
8	0	47	53.96	17	0	48	45.38	26	0	49	37.41	35	0	50	30.06	44	0	51	23.30
	10	47	54.91		10	48	46.34		10	49	38.37		10	50	31.04		10	51	24.29
	20	47	55.85		20	48	47.30		20	49	39.34		20	50	32.02		20	51	25.29
	30	47	56.80		30	48	48.26		30	49	40.31		30	50	33.00		30	51	26.28
	40	47	57.75		40	48	49.22		40	49	41.27		40	50	33.98		40	51	27.27
	50	47	58.70		50	48	50.18		50	49	42.25		50	50	34.96		50	51	28.27
9	0	47	59.64	18	0	48	51.14	27	0	49	43.22	36	0	50	35.94	45	0	51	29.26

25⁰

′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″	′	″	Unproportionalität ′	″
45	0	51	29.26	48	0	51	47.14	51	0	52	5.14	54	0	52	23.17	57	0	52	41.30
	10	51	30.25		10	51	48.14		10	52	6.15		10	52	24.18		10	52	42.30
	20	51	31.25		20	51	49.14		20	52	7.15		20	52	25.19		20	52	43.31
	30	51	32.24		30	51	50.14		30	52	8.15		30	52	26.19		30	52	44.32
	40	51	33.23		40	51	51.14		40	52	9.15		40	52	27.20		40	52	45.33
	50	51	34.23		50	51	52.14		50	52	10.15		50	52	28.21		50	52	46.33
46	0	51	35.22	49	0	51	53.14	52	0	52	11.15	55	0	52	29.21	58	0	52	47.34
	10	51	36.21		10	51	54.14		10	52	12.15		10	52	30.22		10	52	48.35
	20	51	37.21		20	51	55.14		20	52	13.15		20	52	31.23		20	52	49.36
	30	51	38.20		30	51	56.14		30	52	14.15		30	52	32.23		30	52	50.36
	40	51	39.19		40	51	57.14		40	52	15.15		40	52	33.24		40	52	51.37
	50	51	40.19		50	51	58.14		50	52	16.15		50	52	34.25		50	52	52.38
47	0	51	41.18	50	0	51	59.14	53	0	52	17.15	56	0	52	35.25	59	0	52	53.40
	10	51	42.17		10	52	0.14		10	52	18.15		10	52	36.26		10	52	54.41
	20	51	43.17		20	52	1.14		20	52	19.15		20	52	37.27		20	52	55.43
	30	51	44.16		30	52	2.14		30	52	20.15		30	52	38.28		30	52	56.44
	40	51	45.15		40	52	3.14		40	52	21.16		40	52	39 28		40	52	57.45
	50	51	46.15		50	52	4.14		50	52	22 17		50	52	40.29		50	52	58.47
48	0	51	47.14	51	0	52	5.14	54	0	52	23.17	57	0	52	41 30	60	0	52	59.48

26⁰

′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″
0	0	52	59.48	5	0	53	29.93	10	0	54	0.58	15	0	54	31.42	20	0	55	2.44
	10	53	0.49		10	53	30.95		10	54	1.60		10	54	32.45		10	55	3.48
	20	53	1.51		20	53	31.98		20	54	2.63		20	54	33.48		20	55	4.53
	30	53	2.52		30	53	33.00		30	54	3.66		30	54	34.52		30	55	5.57
	40	53	3.54		40	53	34.02		40	54	4.69		40	54	35.55		40	55	6 61
	50	53	4.55		50	53	35.04		50	54	5.71		50	54	36.59		50	55	7.65
1	0	53	5.56	6	0	53	36.06	11	0	54	6.74	16	0	54	37.62	21	0	55	8.69
	10	53	6.58		10	53	37 08		10	54	7.77		10	54	38.66		10	55	9.73
	20	53	7.59		20	53	38.10		20	54	8.80		20	54	39.69		20	55	10.77
	30	53	8.60		30	53	39.12		30	54	9.82		30	54	40.73		30	55	11.81
	40	53	9.62		40	53	40.14		40	54	10.85		40	54	41.76		40	55	12.85
	50	53	10.63		50	53	41.16		50	54	11.88		50	54	42.79		50	55	13.90
2	0	53	11.65	7	0	53	42.18	12	0	54	12.91	17	0	54	43.83	22	0	55	14.94
	10	53	12.66		10	53	43.20		10	54	13.93		10	54	44 86		10	55	15.98
	20	53	13.67		20	53	44.22		20	54	14.96		20	54	45.90		20	55	17.02
	30	53	14.69		30	53	45.24		30	54	15.99		30	54	46.93		30	55	18.06
	40	53	15 70		40	53	46.26		40	54	17.02		40	54	47.96		40	55	19.10
	50	53	16.72		50	53	47.28		50	54	18.04		50	54	49.00		50	55	20.14
3	0	53	17.73	8	0	53	48.30	13	0	54	19.07	18	0	54	50.03	23	0	55	21.18
	10	53	18.74		10	53	49.32		10	54	20 10		10	54	51.07		10	55	22.23
	20	53	19.76		20	53	50.34		20	54	21.13		20	54	52.10		20	55	23.27
	30	53	20.77		30	53	51 36		30	54	22.15		30	54	53.14		30	55	24.31
	40	53	21.78		40	53	52.39		40	54	23.18		40	54	54.17		40	55	25.35
	50	53	22 80		50	53	53.41		50	54	24.21		50	54	55.20		50	55	26.39
4	0	53	23.81	9	0	53	54.43	14	0	54	25.24	19	0	54	56.24	24	0	55	27.43
	10	53	24.83		10	53	55.45		10	54	26.26		10	54	57.27		10	55	28.47
	20	53	25.85		20	53	56.47		20	54	27.29		20	54	58.31		20	55	29.51
	30	53	26.87		30	53	57.49		30	54	28.32		30	54	59.34		30	55	30.55
	40	53	27.89		40	53	58 52		40	54	29.35		40	55	0.37		40	55	31.60
	50	53	28.91		50	53	59.55		50	54	30.38		50	55	1.41		50	55	32.64
5	0	53	29.93	10	0	54	0.58	15	0	54	31.42	20	0	55	2.44	25	0	55	33.68

26°

′	″	Unproportionalität ° ′ ″	′	″	Unproportionalität ° ′ ″	′	″	Unproportionalität ° ′ ″	′	″	Unproportionalität ° ′ ″	′	″	Unproportionalität ° ′ ″
25	0	55 33.68	32	0	56 17.74	39	0	57 2.17	46	0	57 46.97	53	0	58 32.17
	10	55 34.72		10	56 18.79		10	57 3.24		10	57 48.04		10	58 33.25
	20	55 35.76		20	56 19.85		20	57 4.30		20	57 49.11		20	58 34.34
	30	55 36.81		30	56 20.90		30	57 5.36		30	57 50.18		30	58 35.42
	40	55 37.86		40	56 21.96		40	57 6.42		40	57 51.25		40	58 36.50
	50	55 38.90		50	56 23.01		50	57 7.48		50	57 52.32		50	58 37.58
26	0	55 39.95	33	0	56 24.07	40	0	57 8.55	47	0	57 53.40	54	0	58 38.67
	10	55 41.00		10	56 25.12		10	57 9.61		10	57 54.47		10	58 39.75
	20	55 42.05		20	56 26.18		20	57 10.67		20	57 55.55		20	58 40.83
	30	55 43.10		30	56 27.23		30	57 11.73		30	57 56.62		30	58 41.91
	40	55 44.14		40	56 28.29		40	57 12.79		40	57 57.70		40	58 43.00
	50	55 45.19		50	56 29.34		50	57 13.86		50	57 58.78		50	58 44.08
27	0	55 46.24	34	0	56 30.40	41	0	57 14.92	48	0	57 59.85	55	0	58 45.16
	10	55 47.29		10	56 31.45		10	57 15.98		10	58 0.93		10	58 46.24
	20	55 48.34		20	56 32.51		20	57 17.04		20	58 2.00		20	58 47.33
	30	55 49.39		30	56 33.56		30	57 18.11		30	58 3.08		30	58 48.41
	40	55 50.43		40	56 34.62		40	57 19.18		40	58 4.16		40	58 49.49
	50	55 51.48		50	56 35.67		50	57 20.25		50	58 5.23		50	58 50.58
28	0	55 52.53	35	0	56 36.73	42	0	57 21.32	49	0	58 6.31	56	0	58 51.66
	10	55 53.58		10	56 37.78		10	57 22.39		10	58 7.38		10	58 52.74
	20	55 54.63		20	56 38.84		20	57 23.45		20	58 8.46		20	58 53.82
	30	55 55.67		30	56 39.89		30	57 24.52		30	58 9.54		30	58 54.91
	40	55 56.72		40	56 40.95		40	57 25.59		40	58 10.61		40	58 55.99
	50	55 57.77		50	56 42.00		50	57 26.66		50	58 11.69		50	58 57.07
29	0	55 58.82	36	0	56 43.06	43	0	57 27.73	50	0	58 12.76	57	0	58 58.15
	10	55 59.87		10	56 44.12		10	57 28.80		10	58 13.84		10	58 59.24
	20	56 0.91		20	56 45.18		20	57 29.87		20	58 14.91		20	59 0.32
	30	56 1.96		30	56 46.24		30	57 30.94		30	58 15.99		30	59 1.41
	40	56 3.01		40	56 47.31		40	57 32.01		40	58 17.07		40	59 2.50
	50	56 4.06		50	56 48.37		50	57 33.07		50	58 18.14		50	59 3.59
30	0	56 5.11	37	0	56 49.43	44	0	57 34.14	51	0	58 19.22	58	0	59 4.68
	10	56 6.15		10	56 50.49		10	57 35.21		10	58 20.29		10	59 5.77
	20	56 7.20		20	56 51.55		20	57 36.28		20	58 21.37		20	59 6.86
	30	56 8.25		30	56 52.62		30	57 37.35		30	58 22.45		30	59 7.95
	40	56 9.30		40	56 53.68		40	57 38.42		40	58 23.52		40	59 9.04
	50	56 10.35		50	56 54.74		50	57 39.49		50	58 24.60		50	59 10.13
31	0	56 11.41	38	0	56 55.80	45	0	57 40.56	52	0	58 25.67	59	0	59 11.22
	10	56 12.46		10	56 56.86		10	57 41.63		10	58 26.76		10	59 12.31
	20	56 13.52		20	56 57.93		20	57 42.69		20	58 27.84		20	59 13.40
	30	56 14.57		30	56 58.99		30	57 43.76		30	58 28.92		30	59 14.49
	40	56 15.63		40	57 0.05		40	57 44.83		40	58 30.00		40	59 15.58
	50	56 16.68		50	57 1.11		50	57 45.90		50	58 31.09		50	59 16.67
32	0	56 17.74	39	0	57 2.17	46	0	57 46.97	53	0	58 32.17	60	0	59 17.76

27°

′	″	° ′ ″	′	″	° ′ ″	′	″	° ′ ″	′	″	° ′ ″	′	″	° ′ ″
0	0	0 59 17.76	1	0	0 59 24.30	2	0	0 59 30.85	3	0	0 59 37.40	4	0	0 59 43.98
	10	0 59 18.85		10	0 59 25.39		10	0 59 31.94		10	0 59 38.50		10	0 59 45.08
	20	0 59 19.94		20	0 59 26.48		20	0 59 33.03		20	0 59 39.59		20	0 59 46.18
	30	0 59 21.03		30	0 59 27.58		30	0 59 34.12		30	0 59 40.69		30	0 59 47.27
	40	0 59 22.12		40	0 59 28.67		40	0 59 35.21		40	0 59 41.79		40	0 59 48.37
	50	0 59 23.21		50	0 59 29.76		50	0 59 36.30		50	0 59 42.89		50	0 59 49.47
1	0	0 59 24.30	2	0	0 59 30.85	3	0	0 59 37.40	4	0	0 59 43.98	5	0	0 59 50.56

27°

′	″	Unproportionalität °	′	″	′	″	Unproportionalität °	′	″	′	″	Unproportionalität °	′	″	′	″	Unproportionalität °	′	″	′	″	Unproportionalität °	′	″
5	0	0	59	50.56	14	0	1	0	50.08	23	0	1	1	50.27	32	0	1	2	51.12	41	0	1	3	52.59
	10	0	59	51.66		10	1	0	51.19		10	1	1	51.39		10	1	2	52.25		10	1	3	53.74
	20	0	59	52.76		20	1	0	52.30		20	1	1	52.51		20	1	2	53.38		20	1	3	54.88
	30	0	59	53.86		30	1	0	53.41		30	1	1	53.63		30	1	2	54.51		30	1	3	56.03
	40	0	59	54.95		40	1	0	54.52		40	1	1	54.75		40	1	2	55.65		40	1	3	57.18
	50	0	59	56.05		50	1	0	55.63		50	1	1	55.86		50	1	2	56.78		50	1	3	58.32
6	0	0	59	57.14	15	0	1	0	56.74	24	0	1	1	56.98	33	0	1	2	57.91	42	0	1	3	59.47
	10	0	59	58.24		10	1	0	57.86		10	1	1	58.11		10	1	2	59.04		10	1	4	0.62
	20	0	59	59.34		20	1	0	58.97		20	1	1	59.23		20	1	3	0.18		20	1	4	1.77
	30	1	0	0.44		30	1	1	0.08		30	1	2	0.36		30	1	3	1.31		30	1	4	2.91
	40	1	0	1.53		40	1	1	1.19		40	1	2	1.48		40	1	3	2.44		40	1	4	4.06
	50	1	0	2.63		50	1	1	2.30		50	1	2	2.61		50	1	3	3.57		50	1	4	5.21
7	0	1	0	3.73	16	0	1	1	3.41	25	0	1	2	3.73	34	0	1	3	4.71	43	0	1	4	6.35
	10	1	0	4.83		10	1	1	4.52		10	1	2	4.86		10	1	3	5.84		10	1	4	7.50
	20	1	0	5.92		20	1	1	5.64		20	1	2	5.99		20	1	3	6.97		20	1	4	8.65
	30	1	0	7.02		30	1	1	6.75		30	1	2	7.11		30	1	3	8.10		30	1	4	9.79
	40	1	0	8.12		40	1	1	7.86		40	1	2	8.24		40	1	3	9.24		40	1	4	10.94
	50	1	0	9.21		50	1	1	8.97		50	1	2	9.36		50	1	3	10.38		50	1	4	12.09
8	0	1	0	10.31	17	0	1	1	10.08	26	0	1	2	10.49	35	0	1	3	11.52	44	0	1	4	13.23
	10	1	0	11.41		10	1	1	11.19		10	1	2	11.61		10	1	3	12.66		10	1	4	14.38
	20	1	0	12.52		20	1	1	12.30		20	1	2	12.74		20	1	3	13.80		20	1	4	15.53
	30	1	0	13.62		30	1	1	13.42		30	1	2	13.86		30	1	3	14.94		30	1	4	16.67
	40	1	0	14.73		40	1	1	14.53		40	1	2	14.99		40	1	3	16.08		40	1	4	17.82
	50	1	0	15.83		50	1	1	15.64		50	1	2	16.11		50	1	3	17.22		50	1	4	18.97
9	0	1	0	16.93	18	0	1	1	16.75	27	0	1	2	17.24	36	0	1	3	18.36	45	0	1	4	20.12
	10	1	0	18.04		10	1	1	17.86		10	1	2	18.36		10	1	3	19.50		10	1	4	21.26
	20	1	0	19.14		20	1	1	18.97		20	1	2	19.49		20	1	3	20.63		20	1	4	22.41
	30	1	0	20.24		30	1	1	20.08		30	1	2	20.61		30	1	3	21.77		30	1	4	23.56
	40	1	0	21.35		40	1	1	21.20		40	1	2	21.74		40	1	3	22.91		40	1	4	24.72
	50	1	0	22.45		50	1	1	22.31		50	1	2	22.87		50	1	3	24.05		50	1	4	25.87
10	0	1	0	23.56	19	0	1	1	23.43	28	0	1	2	23.99	37	0	1	3	25.19	46	0	1	4	27.03
	10	1	0	24.66		10	1	1	24.55		10	1	2	25.12		10	1	3	26.33		10	1	4	28.18
	20	1	0	25.76		20	1	1	25.67		20	1	2	26.24		20	1	3	27.47		20	1	4	29.34
	30	1	0	26.87		30	1	1	26.79		30	1	2	27.37		30	1	3	28.61		30	1	4	30.49
	40	1	0	27.97		40	1	1	27.91		40	1	2	28.49		40	1	3	29.75		40	1	4	31.64
	50	1	0	29.07		50	1	1	29.02		50	1	2	29.62		50	1	3	30.89		50	1	4	32.80
11	0	1	0	30.18	20	0	1	1	30.14	29	0	1	2	30.74	38	0	1	3	32.03	47	0	1	4	33.95
	10	1	0	31.28		10	1	1	31.26		10	1	2	31.87		10	1	3	33.17		10	1	4	35.11
	20	1	0	32.39		20	1	1	32.38		20	1	2	32.99		20	1	3	34.31		20	1	4	36.26
	30	1	0	33.49		30	1	1	33.50		30	1	2	34.13		30	1	3	35.45		30	1	4	37.42
	40	1	0	34.59		40	1	1	34.62		40	1	2	35.26		40	1	3	36.59		40	1	4	38.57
	50	1	0	35.70		50	1	1	35.73		50	1	2	36.39		50	1	3	37.73		50	1	4	39.72
12	0	1	0	36.80	21	0	1	1	36.85	30	0	1	2	37.52	39	0	1	3	38.87	48	0	1	4	40.88
	10	1	0	37.90		10	1	1	37.97		10	1	2	38.66		10	1	3	40.01		10	1	4	42.03
	20	1	0	39.01		20	1	1	39.09		20	1	2	39.79		20	1	3	41.15		20	1	4	43.19
	30	1	0	40.11		30	1	1	40.21		30	1	2	40.92		30	1	3	42.29		30	1	4	44.34
	40	1	0	41.22		40	1	1	41.33		40	1	2	42.05		40	1	3	43.43		40	1	4	45.50
	50	1	0	42.32		50	1	1	42.44		50	1	2	43.19		50	1	3	44.57		50	1	4	46.65
13	0	1	0	43.42	22	0	1	1	43.56	31	0	1	2	44.32	40	0	1	3	45.71	49	0	1	4	47.80
	10	1	0	44.53		10	1	1	44.68		10	1	2	45.45		10	1	3	46.86		10	1	4	48.96
	20	1	0	45.63		20	1	1	45.80		20	1	2	46.58		20	1	3	48.00		20	1	4	50.11
	30	1	0	46.74		30	1	1	46.92		30	1	2	47.72		30	1	3	49.15		30	1	4	51.27
	40	1	0	47.85		40	1	1	48.04		40	1	2	48.85		40	1	3	50.30		40	1	4	52.42
	50	1	0	48.96		50	1	1	49.15		50	1	2	49.98		50	1	3	51.44		50	1	4	53.58
14	0	1	0	50.08	23	0	1	1	50.27	32	0	1	2	51.12	41	0	1	3	52.59	50	0	1	4	54.73

27°

′	″	Unproportionalität ° ′ ″	′	″	Unproportionalität ° ′ ″	′	″	Unproportionalität ° ′ ″	′	″	Unproportionalität ° ′ ″	′	″	Unproportionalität ° ′ ″
50	0	1 4 54.73	52	0	1 5 8.64	54	0	1 5 22.58	56	0	1 5 36.51	58	0	1 5 50.54
	10	1 4 55.88		10	1 5 9.80		10	1 5 23.74		10	1 5 37.68		10	1 5 51.71
	20	1 4 57.04		20	1 5 10.96		20	1 5 24.90		20	1 5 38.85		20	1 5 52.87
	30	1 4 58.19		30	1 5 12.12		30	1 5 26.06		30	1 5 40.02		30	1 5 54.04
	40	1 4 59.35		40	1 5 13.28		40	1 5 27.22		40	1 5 41.19		40	1 5 55.21
	50	1 5 0.51		50	1 5 14.45		50	1 5 28.38		50	1 5 42.36		50	1 5 56.38
51	0	1 5 1.67	53	0	1 5 15.61	55	0	1 5 29.54	57	0	1 5 43.53	59	0	1 5 57.55
	10	1 5 2.83		10	1 5 16.77		10	1 5 30.71		10	1 5 44.69		10	1 5 58.72
	20	1 5 3.99		20	1 5 17.93		20	1 5 31.87		20	1 5 45.86		20	1 5 59.89
	30	1 5 5.15		30	1 5 19.09		30	1 5 33.03		30	1 5 47.03		30	1 6 1.06
	40	1 5 6.32		40	1 5 20.25		40	1 5 34.19		40	1 5 48.20		40	1 6 2.22
	50	1 5 7.48		50	1 5 21.41		50	1 5 35.36		50	1 5 49.37		50	1 6 3.39
52	0	1 5 8.64	54	0	1 5 22.58	56	0	1 5 36.51	58	0	1 5 50.54	60	0	1 6 4.56

28°

′	″	° ′ ″	′	″	° ′ ″	′	″	° ′ ″	′	″	° ′ ″	′	″	° ′ ″
0	0	1 6 4.56	6	0	1 6 46.84	12	0	1 7 29.41	18	0	1 8 12.30	24	0	1 8 55.49
	10	1 6 5.73		10	1 6 48.01		10	1 7 30.60		10	1 8 13.50		10	1 8 56.69
	20	1 6 6.90		20	1 6 49.19		20	1 7 31.79		20	1 8 14.70		20	1 8 57.90
	30	1 6 8.07		30	1 6 50.37		30	1 7 32.98		30	1 8 15.89		30	1 8 59.10
	40	1 6 9.24		40	1 6 51.54		40	1 7 34.17		40	1 8 17.09		40	1 9 0.31
	50	1 6 10.41		50	1 6 52.73		50	1 7 35.36		50	1 8 18.29		50	1 9 1.51
1	0	1 6 11.57	7	0	1 6 53.91	13	0	1 7 36.55	19	0	1 8 19.49	25	0	1 9 2 72
	10	1 6 12.74		10	1 6 55.09		10	1 7 37.74		10	1 8 20 69		10	1 9 3.92
	20	1 6 13.91		20	1 6 56.28		20	1 7 38.93		20	1 8 21.88		20	1 9 5.13
	30	1 6 15.09		30	1 6 57.46		30	1 7 40.12		30	1 8 23 08		30	1 9 6.33
	40	1 6 16.26		40	1 6 58.64		40	1 7 41 31		40	1 8 24.28		40	1 9 7.54
	50	1 6 17.44		50	1 6 59.83		50	1 7 42.50		50	1 8 25.48		50	1 9 8.74
2	0	1 6 18.62	8	0	1 7 1.01	14	0	1 7 43.70	20	0	1 8 26.68	26	0	1 9 9.95
	10	1 6 19.79		10	1 7 2.19		10	1 7 44.89		10	1 8 27.87		10	1 9 11.16
	20	1 6 20.97		20	1 7 3.37		20	1 7 46.08		20	1 8 29.07		20	1 9 12.36
	30	1 6 22.14		30	1 7 4.56		30	1 7 47.27		30	1 8 30 27		30	1 9 13.57
	40	1 6 23.32		40	1 7 5.74		40	1 7 48.46		40	1 8 31.47		40	1 9 14.77
	50	1 6 24.50		50	1 7 6.92		50	1 7 49.65		50	1 8 32.67		50	1 9 15.98
3	0	1 6 25.67	9	0	1 7 8.11	15	0	1 7 50.84	21	0	1 8 33.86	27	0	1 9 17.18
	10	1 6 26.85		10	1 7 9.29		10	1 7 52.03		10	1 8 35.06		10	1 9 18.39
	20	1 6 28.02		20	1 7 10.47		20	1 7 53.22		20	1 8 36.26		20	1 9 19.59
	30	1 6 29.20		30	1 7 11.66		30	1 7 54.41		30	1 8 37.46		30	1 9 20.80
	40	1 6 30.38		40	1 7 12.84		40	1 7 55.60		40	1 8 38.66		40	1 9 22.00
	50	1 6 31.55		50	1 7 14.02		50	1 7 56.79		50	1 8 39.85		50	1 9 23.21
4	0	1 6 32.73	10	0	1 7 15.21	16	0	1 7 57.98	22	0	1 8 41.05	28	0	1 9 24.41
	10	1 6 33.90		10	1 7 16.39		10	1 7 59.17		10	1 8 42.25		10	1 9 25.63
	20	1 6 35.08		20	1 7 17.57		20	1 8 0.36		20	1 8 43.45		20	1 9 26 84
	30	1 6 36.25		30	1 7 18.76		30	1 8 1.56		30	1 8 44.65		30	1 9 28.05
	40	1 6 37.43		40	1 7 19.94		40	1 8 2.75		40	1 8 45.84		40	1 9 29.27
	50	1 6 38.61		50	1 7 21.12		50	1 8 3.94		50	1 8 47.05		50	1 9 30.48
5	0	1 6 39.78	11	0	1 7 22.31	17	0	1 8 5.13	23	0	1 8 48 25	29	0	1 9 31 69
	10	1 6 40.96		10	1 7 23.49		10	1 8 6.32		10	1 8 49.46		10	1 9 32.90
	20	1 6 42.13		20	1 7 24.67		20	1 8 7.51		20	1 8 50.66		20	1 9 34.12
	30	1 6 43.31		30	1 7 25.86		30	1 8 8.71		30	1 8 51.87		30	1 9 35.33
	40	1 6 44.49		40	1 7 27.04		40	1 8 9.90		40	1 8 53.08		40	1 9 36.54
	50	1 6 45.66		50	1 7 28.22		50	1 8 11.10		50	1 8 54.28		50	1 9 37.76
6	0	1 6 46.84	12	0	1 7 29.41	18	0	1 8 12.30	24	0	1 8 55 49	30	0	1 9 38.97

28°

′	″	Unproportionalität			′	″	Unproportionalität			′	″	Unproportionalität			′	″	Unproportionalität			′	″	Unproportionalität		
		°	′	″			°	′	″			°	′	″			°	′	″			°	′	″
30	0	1	9	38.97	36	0	1	10	22.75	42	0	1	11	6.82	48	0	1	11	51.20	54	0	1	12	35.87
	10	1	9	40.18		10	1	10	23.97		10	1	11	8.05		10	1	11	52.43		10	1	12	37.11
	20	1	9	41.39		20	1	10	25.19		20	1	11	9.28		20	1	11	53.67		20	1	12	38.35
	30	1	9	42.61		30	1	10	26.41		30	1	11	10.50		30	1	11	54.90		30	1	12	39.59
	40	1	9	43.82		40	1	10	27.63		40	1	11	11.73		40	1	11	56.14		40	1	12	40.84
	50	1	9	45.03		50	1	10	28.85		50	1	11	12.96		50	1	11	57.37		50	1	12	42.09
31	0	1	9	46.24	37	0	1	10	30.07	43	0	1	11	14.19	49	0	1	11	58.61	55	0	1	12	43.34
	10	1	9	47.46		10	1	10	31.29		10	1	11	15.42		10	1	11	59.84		10	1	12	44.59
	20	1	9	48.67		20	1	10	32.51		20	1	11	16.64		20	1	12	1.08		20	1	12	45.84
	30	1	9	49.88		30	1	10	33.73		30	1	11	17.87		30	1	12	2.32		30	1	12	47.09
	40	1	9	51.10		40	1	10	34.95		40	1	11	19.10		40	1	12	3.56		40	1	12	48.34
	50	1	9	52.31		50	1	10	36.17		50	1	11	20.33		50	1	12	4.80		50	1	12	49.59
32	0	1	9	53.52	38	0	1	10	37.39	44	0	1	11	21.55	50	0	1	12	6.05	56	0	1	12	50.84
	10	1	9	54.73		10	1	10	38.61		10	1	11	22.79		10	1	12	7.29		10	1	12	52.09
	20	1	9	55.95		20	1	10	39.83		20	1	11	24.02		20	1	12	8.53		20	1	12	53.34
	30	1	9	57.16		30	1	10	41.05		30	1	11	25.26		30	1	12	9.77		30	1	12	54.59
	40	1	9	58.37		40	1	10	42.27		40	1	11	26.49		40	1	12	11.02		40	1	12	55.84
	50	1	9	59.59		50	1	10	43.50		50	1	11	27.73		50	1	12	12.26		50	1	12	57.09
33	0	1	10	0.80	39	0	1	10	44.72	45	0	1	11	28.96	51	0	1	12	13.50	57	0	1	12	58.34
	10	1	10	2.01		10	1	10	45.95		10	1	11	30.20		10	1	12	14.74		10	1	12	59.59
	20	1	10	3.22		20	1	10	47.18		20	1	11	31.43		20	1	12	15.99		20	1	13	0.84
	30	1	10	4.44		30	1	10	48.41		30	1	11	32.67		30	1	12	17.24		30	1	13	2.09
	40	1	10	5.66		40	1	10	49.64		40	1	11	33.90		40	1	12	18.47		40	1	13	3.34
	50	1	10	6.88		50	1	10	50.86		50	1	11	35.14		50	1	12	19.71		50	1	13	4.59
34	0	1	10	8.10	40	0	1	10	52.09	46	0	1	11	36.37	52	0	1	12	20.96	58	0	1	13	5.84
	10	1	10	9.33		10	1	10	53.32		10	1	11	37.61		10	1	12	22.20		10	1	13	7.09
	20	1	10	10.55		20	1	10	54.55		20	1	11	38.84		20	1	12	23.44		20	1	13	8.34
	30	1	10	11.77		30	1	10	55.77		30	1	11	40.08		30	1	12	24.68		30	1	13	9.59
	40	1	10	12.99		40	1	10	57.00		40	1	11	41.31		40	1	12	25.93		40	1	13	10.84
	50	1	10	14.21		50	1	10	58.23		50	1	11	42.55		50	1	12	27.17		50	1	13	12.09
35	0	1	10	15.43	41	0	1	10	59.46	47	0	1	11	43.79	53	0	1	12	28.41	59	0	1	13	13.34
	10	1	10	16.65		10	1	11	0.68		10	1	11	45.02		10	1	12	29.65		10	1	13	14.59
	20	1	10	17.87		20	1	11	1.91		20	1	11	46.26		20	1	12	30.90		20	1	13	15.84
	30	1	10	19.09		30	1	11	3.14		30	1	11	47.49		30	1	12	32.14		30	1	13	17.09
	40	1	10	20.31		40	1	11	4.37		40	1	11	48.73		40	1	12	33.38		40	1	13	18.34
	50	1	10	21.53		50	1	11	5.59		50	1	11	49.96		50	1	12	34.62		50	1	13	19.59
36	0	1	10	22.75	42	0	1	11	6.82	48	0	1	11	51.20	54	0	1	12	35.87	60	0	1	13	20.84

29°

′	″	°	′	″	′	″	°	′	″	′	″	°	′	″	′	″	°	′	″	′	″	°	′	″
0	0	1	13	20.84	2	0	1	13	35.93	4	0	1	13	51.02	6	0	1	14	6.14	8	0	1	14	21.32
	10	1	13	22.09		10	1	13	37.19		10	1	13	52.28		10	1	14	7.40		10	1	14	22.59
	20	1	13	23.35		20	1	13	38.44		20	1	13	53.53		20	1	14	8.67		20	1	14	23.85
	30	1	13	24.61		30	1	13	39.70		30	1	13	54.79		30	1	14	9.94		30	1	14	25.12
	40	1	13	25.87		40	1	13	40.96		40	1	13	56.05		40	1	14	11.20		40	1	14	26.38
	50	1	13	27.12		50	1	13	42.22		50	1	13	57.31		50	1	14	12.47		50	1	14	27.65
1	0	1	13	28.38	3	0	1	13	43.47	5	0	1	13	58.56	7	0	1	14	13.73	9	0	1	14	28.91
	10	1	13	29.64		10	1	13	44.73		10	1	13	59.82		10	1	14	15.00		10	1	14	30.18
	20	1	13	30.90		20	1	13	45.99		20	1	14	1.08		20	1	14	16.26		20	1	14	31.44
	30	1	13	32.16		30	1	13	47.25		30	1	14	2.34		30	1	14	17.53		30	1	14	32.71
	40	1	13	33.41		40	1	13	48.50		40	1	14	3.61		40	1	14	18.79		40	1	14	33.97
	50	1	13	34.67		50	1	13	49.76		50	1	14	4.87		50	1	14	20.06		50	1	14	35.24
2	0	1	13	35.93	4	0	1	13	51.02	6	0	1	14	6.14	8	0	1	14	21.32	10	0	1	14	36.50

29°

′	″	Unproportionalität. ° ′ ″	′	″	Unproportionalität. ° ′ ″	′	″	Unproportionalität. ° ′ ″	′	″	Unproportionalität. ° ′ ″	′	″	Unproportionalität. ° ′ ″
10	0	1 14 36 50	19	0	1 15 45.33	28	0	1 16 54.83	37	0	1 18 5.02	46	0	1 19 15.94
	10	1 14 37.77		10	1 15 46.61		10	1 16 56.13		10	1 18 6.32		10	1 19 17.26
	20	1 14 39.03		20	1 15 47.89		20	1 16 57.42		20	1 18 7.62		20	1 19 18.58
	30	1 14 40.30		30	1 15 49.17		30	1 16 58.72		30	1 18 8.93		30	1 19 19.90
	40	1 14 41.56		40	1 15 50.45		40	1 17 0.02		40	1 18 10.24		40	1 19 21.22
	50	1 14 42.84		50	1 15 51.73		50	1 17 1.31		50	1 18 11.56		50	1 19 22.53
11	0	1 14 44.11	20	0	1 15 53.01	29	0	1 17 2.61	38	0	1 18 12.87	47	0	1 19 23.85
	10	1 14 45.38		10	1 15 54.30		10	1 17 3.90		10	1 18 14.18		10	1 19 25.17
	20	1 14 46.65		20	1 15 55 58		20	1 17 5.20		20	1 18 15.49		20	1 19 26.49
	30	1 14 47.93		30	1 15 56.86		30	1 17 6 49		30	1 18 16.80		30	1 19 27.81
	40	1 14 49.20		40	1 15 58.14		40	1 17 7.78		40	1 18 18.11		40	1 19 29.13
	50	1 14 50.47		50	1 15 59.42		50	1 17 9 08		50	1 18 19.42		50	1 19 30.44
12	0	1 14 51.74	21	0	1 16 0.70	30	0	1 17 10.38	39	0	1 18 20.73	48	0	1 19 31.76
	10	1 14 53.02		10	1 16 1.98		10	1 17 11.67		10	1 18 22.04		10	1 19 33.09
	20	1 14 54.29		20	1 16 3.26		20	1 17 12.97		20	1 18 23.35		20	1 19 34.42
	30	1 14 55.56		30	1 16 4.54		30	1 17 14.26		30	1 18 24.66		30	1 19 35.74
	40	1 14 56.84		40	1 16 5.83		40	1 17 15.56		40	1 18 25.97		40	1 19 37.07
	50	1 14 58.11		50	1 16 7.12		50	1 17 16.86		50	1 18 27.29		50	1 19 38.39
13	0	1 14 59.38	22	0	1 16 8.41	31	0	1 17 18.15	40	0	1 18 28.60	49	0	1 19 39.72
	10	1 15 0.65		10	1 16 9.70		10	1 17 19.45		10	1 18 29.91		10	1 19 41.05
	20	1 15 1.93		20	1 16 10.98		20	1 17 20.74		20	1 18 31.22		20	1 19 42.37
	30	1 15 3.20		30	1 16 12.27		30	1 17 22.04		30	1 18 32.53		30	1 19 43.70
	40	1 15 4.47		40	1 16 13.56		40	1 17 23.33		40	1 18 33.84		40	1 19 45.03
	50	1 15 5.75		50	1 16 14.85		50	1 17 24.63		50	1 18 35.15		50	1 19 46.35
14	0	1 15 7.02	23	0	1 16 16.14	32	0	1 17 25.92	41	0	1 18 36.46	50	0	1 19 47.68
	10	1 15 8.29		10	1 16 17.42		10	1 17 27.23		10	1 18 37.77		10	1 19 49.00
	20	1 15 9 56		20	1 16 18.71		20	1 17 28.53		20	1 18 39.08		20	1 19 50.33
	30	1 15 10.81		30	1 16 20.00		30	1 17 29.83		30	1 18 40.39		30	1 19 51.66
	40	1 15 12.11		40	1 16 21.29		40	1 17 31.14		40	1 18 41.71		40	1 19 52 98
	50	1 15 13.38		50	1 16 22.58		50	1 17 32.44		50	1 18 43.02		50	1 19 54.31
15	0	1 15 14.65	24	0	1 16 23.86	33	0	1 17 33.74	42	0	1 18 44.33	51	0	1 19 55.63
	10	1 15 15.93		10	1 16 25.15		10	1 17 35.05		10	1 18 45.64		10	1 19 56.96
	20	1 15 17.20		20	1 16 26.44		20	1 17 36.35		20	1 18 46.95		20	1 19 58.29
	30	1 15 18.47		30	1 16 27.73		30	1 17 37.65		30	1 18 48.26		30	1 19 59.61
	40	1 15 19.75		40	1 16 29.02		40	1 17 38.95		40	1 18 49.57		40	1 20 0.94
	50	1 15 21.02		50	1 16 30.30		50	1 17 40.26		50	1 18 50.89		50	1 20 2.27
16	0	1 15 22.29	25	0	1 16 31.59	34	0	1 17 41.56	43	0	1 18 52.21	52	0	1 20 3.59
	10	1 15 23.51		10	1 16 32.88		10	1 17 42.86		10	1 18 53 53		10	1 20 4.92
	20	1 15 24.85		20	1 16 34.17		20	1 17 44.17		20	1 18 54.84		20	1 20 6.24
	30	1 15 26.13		30	1 16 35.45		30	1 17 45.47		30	1 18 56.16		30	1 20 7.57
	40	1 15 27.41		40	1 16 36.74		40	1 17 46.77		40	1 18 57.48		40	1 20 8.90
	50	1 15 28.69		50	1 16 38.03		50	1 17 48.08		50	1 18 58.80		50	1 20 10.22
17	0	1 15 29.97	26	0	1 16 39.32	35	0	1 17 49.38	44	0	1 19 0.12	53	0	1 20 11.55
	10	1 15 31.25		10	1 16 40.61		10	1 17 50.68		10	1 19 1.44		10	1 20 12.88
	20	1 15 32.53		20	1 16 41.89		20	1 17 51.99		20	1 19 2.76		20	1 20 14.20
	30	1 15 33.81		30	1 16 43.18		30	1 17 53.29		30	1 19 4.07		30	1 20 15.54
	40	1 15 35.09		40	1 16 44.47		40	1 17 54.59		40	1 19 5.39		40	1 20 16.87
	50	1 15 36.35		50	1 16 45.77		50	1 17 55.89		50	1 19 6.71		50	1 20 18.20
18	0	1 15 37.65	27	0	1 16 47.06	36	0	1 17 57.20	45	0	1 19 8.03	54	0	1 20 19.54
	10	1 15 38.93		10	1 16 48.36		10	1 17 58.50		10	1 19 9.35		10	1 20 20.87
	20	1 15 40.21		20	1 16 49.65		20	1 17 59.80		20	1 19 10.67		20	1 20 22.20
	30	1 15 41.49		30	1 16 50.95		30	1 18 1.11		30	1 19 11.99		30	1 20 23.54
	40	1 15 42.77		40	1 16 52.24		40	1 18 2.41		40	1 19 13.30		40	1 20 24.87
	50	1 15 44.06		50	1 16 53.54		50	1 18 3.71		50	1 19 14.62		50	1 20 26.21
19	0	1 15 45.33	28	0	1 16 54.83	37	0	1 18 5.02	46	0	1 19 15.94	55	0	1 20 27.54

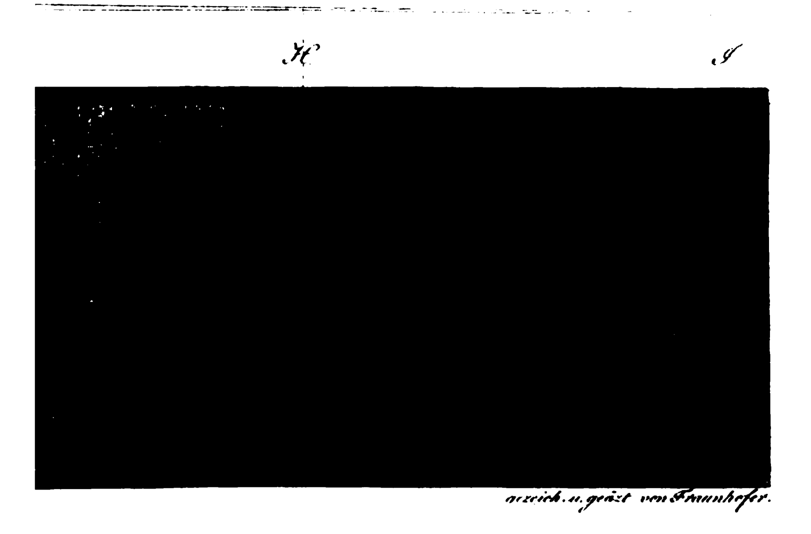
29°

		Unpro-portio-nalität.					Unpro-portio-nalität.					Unpro-portio-nalität.					Unpro-portio-nalität.					Unpro-portio-nalität.		
′	″	°	′	″	′	″	°	′	″	′	″	°	′	″	′	″	°	′	″	′	″	°	′	″
55	0	1	20	27.54	56	0	1	20	35.54	57	0	1	20	43.55	58	0	1	20	51.55	59	0	1	20	59.57
	10	1	20	28.87		10	1	20	36.88		10	1	20	44.88		10	1	20	52.88		10	1	21	0.91
	20	1	20	30.21		20	1	20	38.21		20	1	20	46.22		20	1	20	54.22		20	1	21	2.25
	30	1	20	31.54		30	1	20	39.55		30	1	20	47.55		30	1	20	55.55		30	1	21	3.59
	40	1	20	32.88		40	1	20	40.88		40	1	20	48.88		40	1	20	56.89		40	1	21	4.94
	50	1	20	34.21		50	1	20	42.21		50	1	20	50.22		50	1	20	58.23		50	1	21	6.28
56	0	1	20	35.54	57	0	1	20	43.55	58	0	1	20	51.55	59	0	1	20	59.57	60	0	1	21	7.62

Berichtigungen.

Seite 4, Zeile 14 v. ob., statt: „Fig. 1," lese „Fig. 1. und Fig. 1.a."
Seite 24, Zeile 6 v. ob., ist beizufügen nach z. B.: „Compendium der Experimentalphysik von Dr. G. Recknagel 1888. 2. Aufl. S. 883."
Zeile 2 v. u., statt „Sthrahlen", lese: „Strahlen".
Seite 97, Zeile 1 v. ob., statt: „§ 6", lese: „§ 7".
„ 99, „ „ „ „ „ „
„ 101, „ „ „ „ „ „
„ 103, „ „ „ „ „ „
„ 105, „ „ „ „ „ „
„ 107, „ „ „ „ „ „
„ 109, „ „ „ „ „ „
„ 110, „ „ „ „ „ „
Seite 147, Zeile 18 v. ob., statt: „zersetzt", lese: „zerlegt".
Zeile 21 v. ob., statt: „heben wir auch", lese: „heben auch".
Seite 151, Zeile 19 v. u., statt: „$A_4 \mp R_4$", lese: „$A_4' \mp R_4$".
Zeile 14 v. u., statt: „6.950 907 n", lese: „6.959 907 n".
Seite 152, Zeile 3 v. ob., statt: „$\pm R_6 =$ 1096.713 1096.713", lese:
„$\pm R_6 = -$ 1096.713 — 1096.713".
Seite 155, Zeile 13 v. ob., statt: „$\mp R_6 =$ 1095.623 1095.623", lese:
„$\pm R_6 = -$ 1095.623 — 1095.623".
Seite 156, Zeile 14 v. u., statt: „$\log 2 R_6 \sin^2 \frac{\eta_6}{2}$", lese: „$\log \pm 2 R_6 \sin^2 \frac{\eta_6}{2}$".
Zeile 2 v. u., statt: „$2 R_6 \sin^2 \frac{\eta_6}{2}$", lese: „$\pm 2 R_6 \sin^2 \frac{\eta_6}{2}$".
Seite 157, Zeile 16 v. u., ist beizufügen nach Tabelle: „[Beilage Nr. 4]".
Seite 159, Zeile 5 v. ob., statt: „$A_2' \mp R_4 - D_8$", lese: „$A_2' \mp R_4 - D_3$".
Zeile 8 v. ob., statt: „7.687 113", lese: „7.687 113 n".
Seite 160, Zeile 13 v. ob., statt: „$\pm R_6 =$ 1101.3891 1101.3891", lese:
„$\pm R_6 = -$ 1101.3891 — 1101.3891".

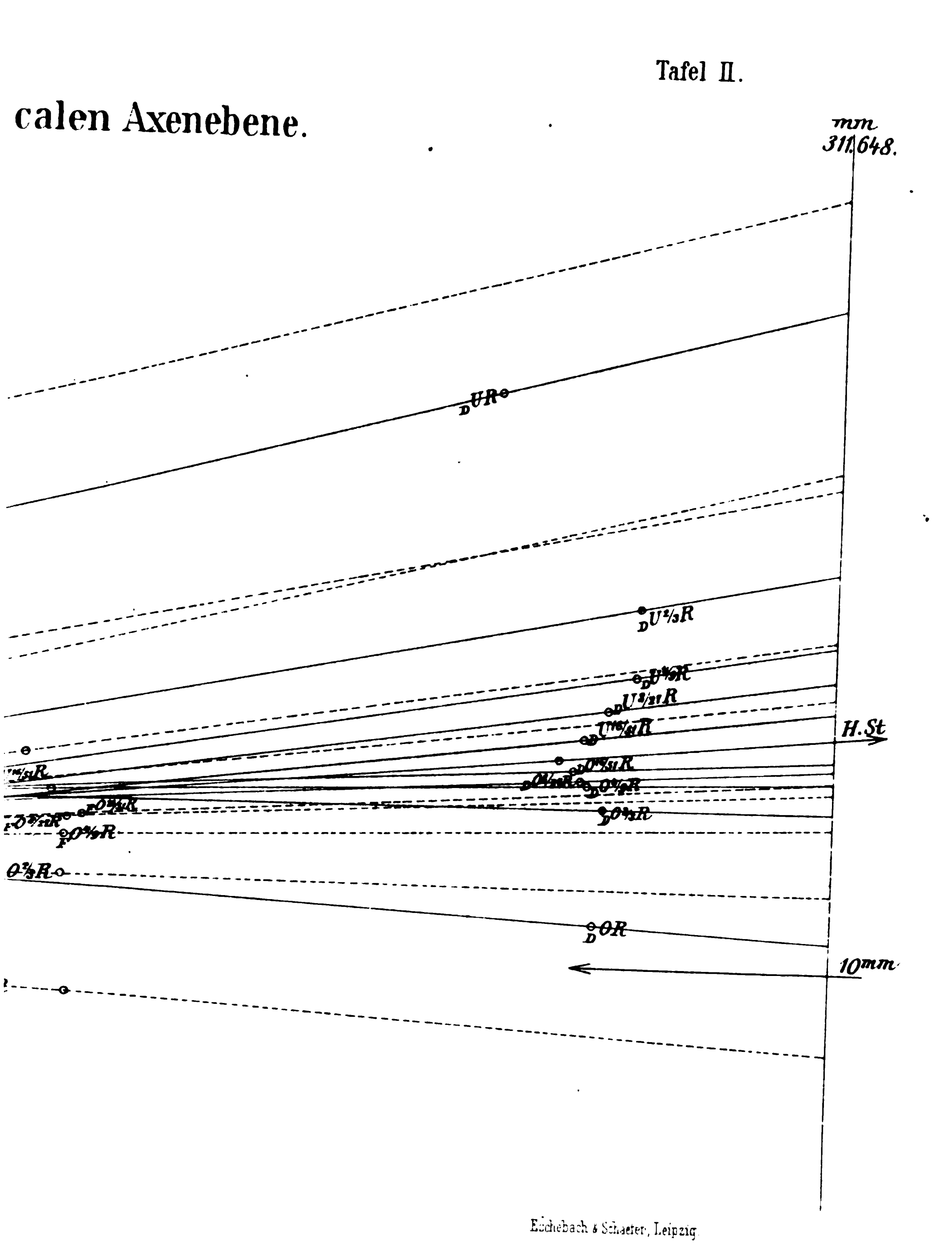
Taf. I.



gezeich. u. geäzt von Fraunhofer.

Tafel II.

calen Axenebene.



Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Tafel IV.

0,34 0,33 0,32 0,31 0,30 0,29 0,28 0,27

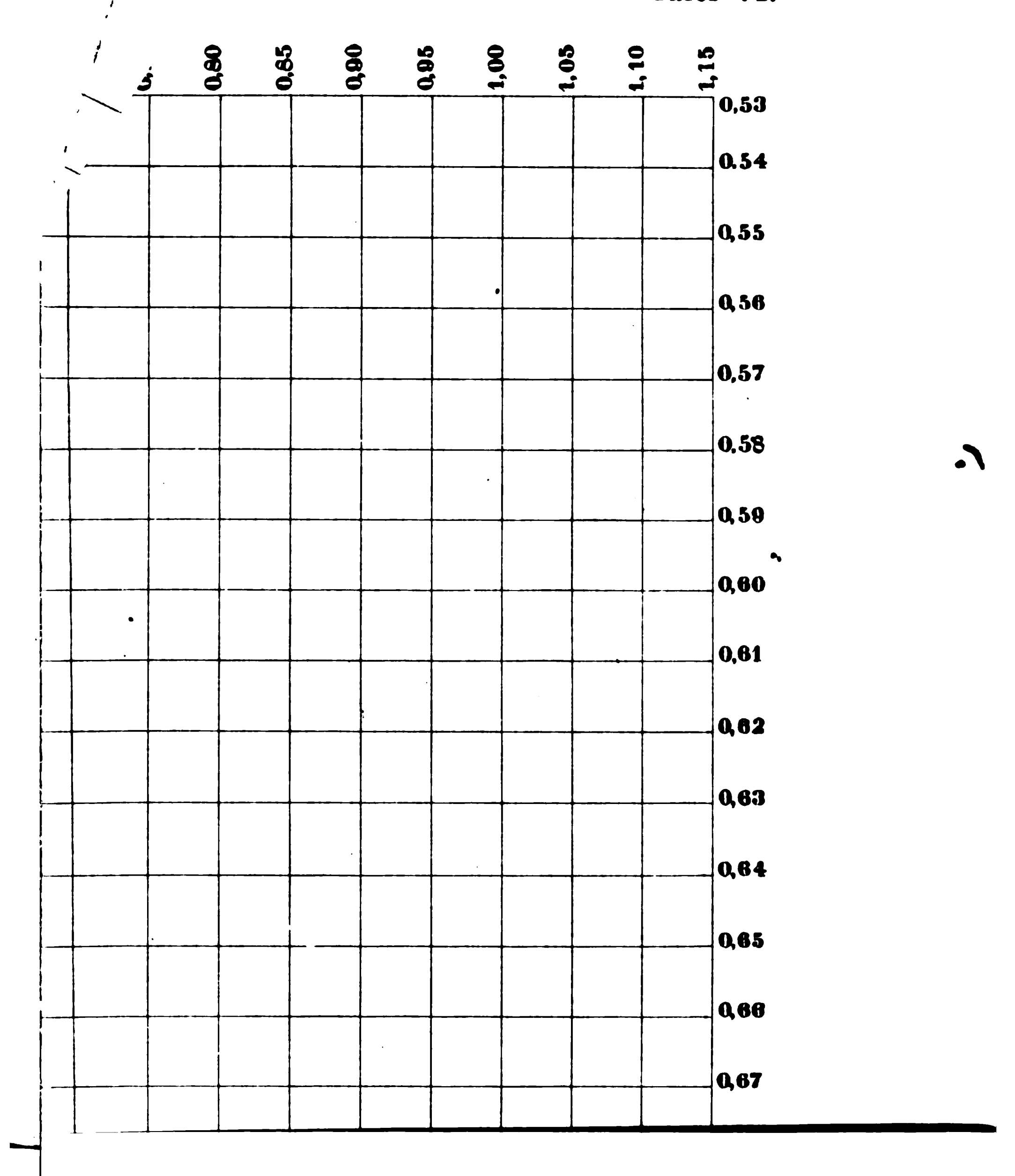
0,53
0,54
0,55
0,56
0,57
0,58
0,59
0,60
0,61
0,62
0,63
0,64
0,65
0,66
0,67

Tafel V.

0,31 0,30 0,29 0,28

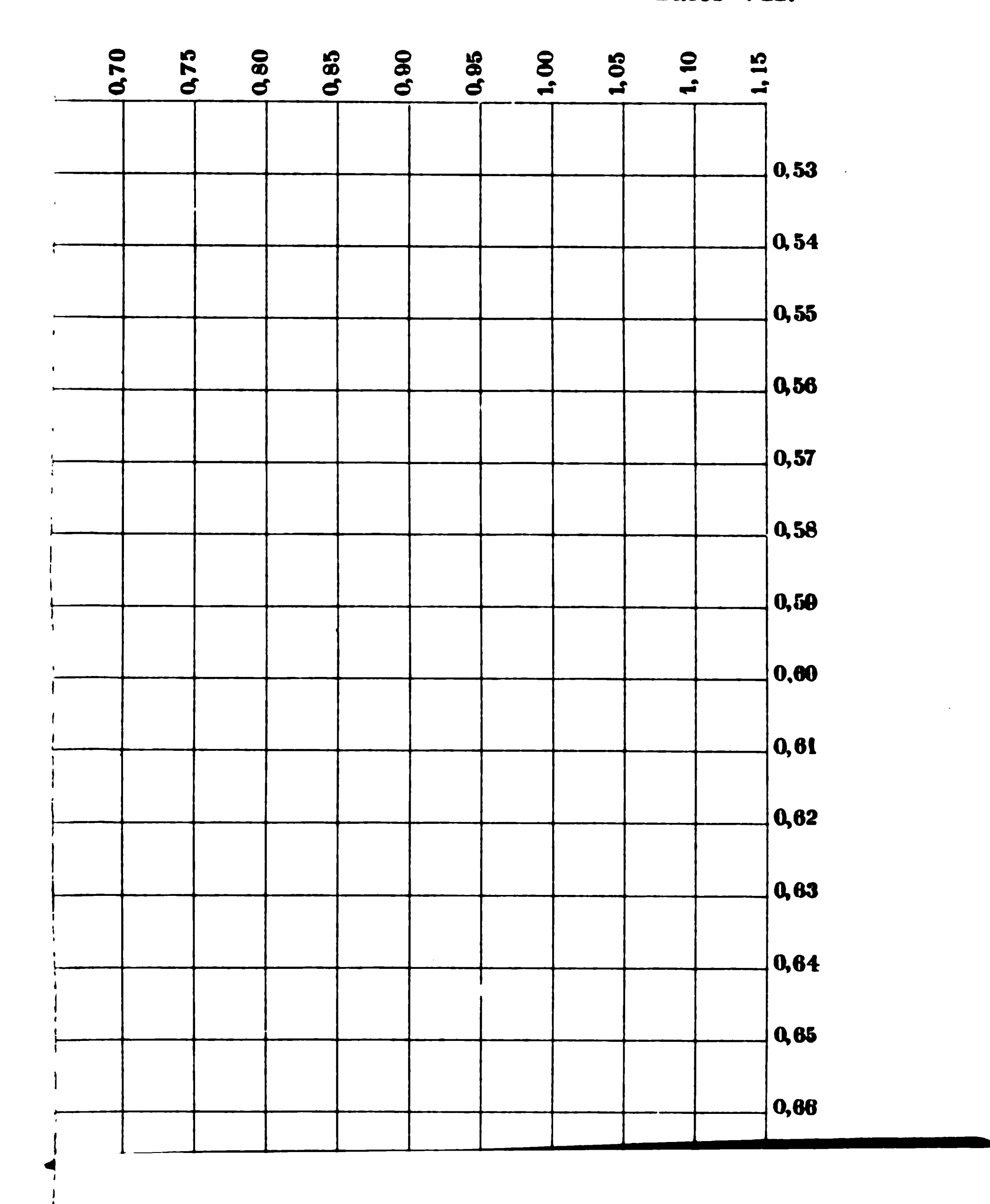
0,53
0,54
0,55
0,56
0,57
0,58
0 59
0,60
0,61
0,62
0,63
0,64
0,65
0,66

Tafel VI.



0,80
0,85
0,90
0,95
1,00
1,05
1,10
1,15
0,53
0,54
0,55
0,56
0,57
0,58
0,59
0,60
0,61
0,62
0,63
0,64
0,65
0,66
0,67

Tafel VII.



0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1,00
1,05
1,10
1,15
0,53
0,54
0,55
0,56
0,57
0,58
0,59
0,60
0,61
0,62
0,63
0,64
0,65
0,66

HANDBUCH

DER

ANGEWANDTEN OPTIK

VON

DR. ADOLPH STEINHEIL, UND DR. ERNST VOIT,

INHABER DER FIRMA C. A. STEINHEIL SÖHNE UND MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN MÜNCHEN.

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU MÜNCHEN.

I. BAND.

VORAUSSETZUNG FÜR DIE BERECHNUNG OPTISCHER SYSTEME UND ANWENDUNG AUF EINFACHE UND ACHROMATISCHE LINSEN.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND 7 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1891.

Neumann, Dr. **Carl**, ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme. [XVI u. 240 S.] gr. 8. 1875. geh. n. ℳ 7.20.

——— einige Notizen hinsichtlich der in neuerer Zeit gegen die Gesetze von Ampère und Weber erhobenen Einwände. Separat-Abdruck aus dem XI. Bande der Mathematischen Annalen. [S. 309—340.] gr. 8. 1877. geh. n. ℳ 1.20.

Neumann, Dr. **Franz**, Professor der Physik und Mineralogie an der Universität zu Königsberg, Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der Universität Königsberg. Herausgegeben von seinen Schülern in zwanglosen Heften. 1. Heft: Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion. [VIII u. 116 S.] gr. 8. 1881. geh. n. ℳ 3.60.

——— ——— 2. Heft: Einleitung in die theoretische Physik. Herausgegeben von Dr. C. Pape, Professor der Physik an der Universität zu Königsberg. Mit in den Text gedruckten Figuren. [X u. 291 S.] gr. 8. 1883. geh. n. ℳ 8.—

——— ——— 3. Heft: Vorlesungen über elektrische Ströme. Herausgegeben von Dr. K. VonderMühll, ausserordentl. Professor an der Universität Leipzig. Mit in den Text gedruckten Figuren. [X u. 310 S.] gr. 8. 1884. geh. n. ℳ 9.60.

——— ——— 4. Heft: Vorlesungen über theoretische Optik Herausgegeben von Dr. E. Dorn, Professor der Physik an der technischen Hochschule zu Darmstadt. Mit Figuren im Text (und einem Bildnis Neumanns in Lichtdruck). [VIII u. 310 S] gr. 8. 1885. geh. n. ℳ 9.60.

——— ——— 5. Heft: Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers. Herausgegeben von Dr. Oskar Emil Meyer, Professor der Physik an der Universität Breslau. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1885. geh. n. ℳ 11.60.

——— ——— 6. Heft: Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Herausgegeben von Dr. Carl Neumann, ord. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. [XVI u. 364 S.] gr. 8. 1887. geh. n. ℳ 12.—

Reusch, **E.**, Professor der Physik an der Universität Tübingen, Theorie der Cylinderlinsen. Mit zwei lith. Tafeln. [VI u. 35 S.] gr. 8. 1868. geh. n. ℳ 1.60.

——— Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. Mit fünf auf Stein gravirten Tafeln [in besonderem Hefte]. [VII u. 70 S.] gr. 8. 1870. geh. n. ℳ 3.—

Röthig, Dr. **Oscar**, Oberlehrer an der Friedrich-Werder'schen Gewerbeschule in Berlin, die Probleme der Brechung und Reflexion. [VIII u. 112 S.] gr. 8. 1876. geh. n. ℳ 2.80.

Ruete, Dr. **C. G. Th.**, Professor und Geh. Medicinalrath, das Stereoscop. Eine populäre Darstellung. Mit 27 stereoscopischen Bildern in einer Beilage. Zweite durchaus neu bearbeitete Auflage. [XII u. 188 S.] gr. 8. 1867. geh. n. ℳ 6.—

Schmidt, Dr. **Wilib.**, Professor an der Landesschule zu Grimma, die Brechung des Lichts in Gläsern, insbesondere die achromatische und aplanatische Objectivlinse. [121 S.] gr. 8. 1874. geh. n. ℳ 3.60.

Steinhauser, Anton, k. k. Professor in Wien, die Lehre von der Aufstellung empirischer Formeln, mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate für Mathematiker, Physiker, Techniker bearbeitet. Mit 15 Figuren. [VI u. 292 S.] gr. 8. 1889. geh. n. ℳ 8.—

Tumlirz, Dr. O., Privatdocent der Physik an der deutschen Universität in Prag, die electromagnetische Theorie des Lichtes. [VIII u. 158 S. mit in den Text gedruckten Figuren.] gr. 8. 1883. geh. n. ℳ 3.60.

Waltenhofen, A. von, k. k. ord. Professor der Physik an der deutschen technischen Hochschule zu Prag, Grundriss der allgemeinen mechanischen Physik. Die wichtigsten Lehrsätze der Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper, der mechanischen Wärmetheorie und der Potentialtheorie nebst einer mathematischen Einleitung. Für Studirende an Hochschulen und für Lehramtscandidaten. [XII u. 361 S.] gr. 8. 1875. geh. n. ℳ 8.—

Wand, Theodor, Consistorial-Assessor und Mitglied der bayrischen Abgeordneten-Kammer, die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie nebst ihren vorzüglichsten Anwendungen. Mit 8 in den Text gedruckten Holzschnitten. [VIII u. 184 S.] gr. 8. 1871. geh. n. ℳ 3.—

Wittwer, Dr. **W. C.**, Professor der Physik am k. Lyceum zu Regensburg, die Moleculargesetze dargestellt. Mit einer Figurentafel. [VIII u. 155 S.] gr. 8. 1871. geh. n. ℳ 3.—

Wüllner, Dr. **Adolf**, Professor der Physik an der königl. polytechnischen Schule zu Aachen, Einleitung in die Dioptrik des Auges. Mit 19 Figuren in Holzschnitt. [IV u. 93 S.] gr. 8. 1866. geh. ℳ 2.40.

——— Lehrbuch der Experimentalphysik. Vier Bände. Vierte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. geh. n. ℳ 48.80.

Einzeln:

I. Band. Allgemeine Physik und Akustik. 4. Auflage. [VIII u. 849 S.] 1882. n. ℳ 10.—

II. — Die Lehre vom Licht. Mit vielen Holzschnitten u. 4 Spectraltafeln. 4. Auflage. [VIII u. 704 S.] 1883. n. ℳ 10.—

III. — Die Lehre von der Wärme. A. u. d. T.: Die Lehre von der Wärme vom Standpunkte der mechanischen Wärmetheorie. Mit vielen Holzschnitten. 4. Auflage. [VIII u. 825 S.] 1885. n. ℳ 12.—

IV. — Die Lehre vom Magnetismus und der Electricität. 4. Auflage. [XII u. 1231 S.] 1886. n. ℳ 16.80.

——— Compendium der Physik für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen. Zwei Bände. Mit zahlreichen Abbildungen im Text und einer farbigen Spectraltafel. gr. 8. geh. 1879. Beide Bände zusammen n. ℳ 19.20.

Einzeln jeder Band n. ℳ 9.60.

I. Band. Allgemeine Physik, Akustik u. Optik. [VIII u. 659 S.]

II. — Die Lehre von der Wärme, dem Magnetismus un der Elektricität. [VIII u. 703 S.]

Zahn, Dr. **W. von**, Untersuchungen über Contactelectricität. Mit einer lithogr. Tafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. 1882. geh. n. ℳ 2.—

Zetzsche, Dr. **Karl Ed.**, die Copirtelegraphen, die Typendrucktelegraphen und die Doppeltelegraphie. Ein Beitrag zur Geschichte der elektrischen Telegraphie. Mit 110 Holzschnitten. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1865. geh. n. ℳ 5.60.

